

## ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНО ОПЕРТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

К. К. Ливанов (Москва)

Осесимметрические колебания цилиндрической оболочки исследовались в работах [1<sup>2</sup>]. В работе [1] методом неопределенной длины [3] получено точное численное решение задачи о колебаниях пологой цилиндрической оболочки с защемленными со свободно опертыми краями. В работе [2] проведено экспериментальное исследование осесимметрических колебаний цилиндрической оболочки.

В предлагаемой работе осесимметрические колебания цилиндрической оболочки исследованы при помощи функции перемещений, для которой найдено выражение, дающее все собственные функции краевой задачи. Частоты и формы колебаний свободно опертой по краям оболочки исследованы с учетом всех сил инерции и с учетом только нормальной составляющей силы инерции в широком диапазоне изменения безразмерной кривизны. Сравнение результатов показывает, что частота, вычисляемая без учета тангенциальных сил инерции, близка к низшей частоте колебаний только при малых значениях безразмерной кривизны. Показано, что колебания с преобладанием поперечных перемещений не всегда протекают с низшей частотой. Такие колебания всегда протекают с частотой, близкой к частоте, вычисленной без учета тангенциальных сил инерции.

1. Рассмотрим цилиндрическую оболочку длины  $a$ , радиуса  $R$  и толщины  $h$ . Собственные осесимметрические колебания этой оболочки в пустоте описываются уравнениями ([4], стр. 257)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \delta n \left( \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} - c \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^3} \right) &= \frac{1 - \nu^2}{E} a^2 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \delta n \left( \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} - c \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} \right) + c \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + (c \delta^4 n^4 + \delta^2 n^2) w &= - \frac{1 - \nu^2}{E} a^2 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\alpha$  — координата вдоль образующей цилиндра, отнесенная к длине оболочки,  $\delta = a/nR$  — безразмерная кривизна оболочки,  $c = h^2/12a^2$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $\mu$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки соответственно.

Предположим, что оболочка испытывает гармонические колебания с частотой  $\omega$ . Тогда, представляя перемещения в виде

$$u(\alpha, t) = u(\alpha) e^{\omega t}, \quad w(\alpha, t) = w(\alpha) e^{\omega t}$$

перепишем систему (1.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{d\alpha^2} - \Omega^2 n^2 \right) u + \delta n \left( \nu \frac{d}{d\alpha} - c \frac{d^3}{d\alpha^3} \right) w &= 0 \quad \left( \Omega^2 = \frac{a^2 \mu (1 - \nu^2)}{n^2 E} \omega^2 \right) \\ \delta n \left( \nu \frac{d}{d\alpha} - c \frac{d^3}{d\alpha^3} \right) u + \left( c \frac{d^4}{d\alpha^4} + \Omega^2 n^2 + c \delta^4 n^4 + \delta^2 n^2 \right) w &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\Omega$  — безразмерная частота. В системах (1.1) и (1.2) параметр  $n$  — произвольное число, в дальнейшем равное числу полуволи по длине оболочки.

Рассмотрим операторный определитель системы (1.2). Для того чтобы ввести функцию перемещений, нужно брать алгебраические дополнения либо к элементам первой строки, либо к элементам второй строки этого определителя.

2. Введем функцию перемещений  $\Phi(\alpha)$  следующими равенствами:

$$u(\alpha) = \delta n (c \Phi''' - \nu \Phi'), \quad w(\alpha) = \Phi'' - \Omega^2 n^2 \Phi \quad (2.1)$$

Подстановкой (2.1) в (1.2) нетрудно убедиться, что первое уравнение системы (1.2) удовлетворится тождественно, а второе примет вид

$$\begin{aligned} c(1 - \delta^2 n^2 c) \Phi^{\text{VI}} + cn^2 (2\delta^2 \nu - \Omega^2) \Phi^{\text{IV}} + \\ + n^2 (\Omega^2 + \delta^4 n^2 c + \delta^2 - \delta^2 \nu^2) \Phi'' - n^4 \Omega^2 (\Omega^2 + \delta^4 n^2 c + \delta^2) \Phi = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) в выражения усилий и моментов через перемещения ([4],

стр. 256), получаем

$$N_1 = \frac{Eh\Omega^2 n^2}{(1-\nu^2)R} (c\Phi'' - \nu\Phi)$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)a^2} [(1-\delta^2 n^2 c)\Phi^{IV} + (\delta^2 n^2 \nu - \Omega^2 n^2)\Phi'']$$

В случае подвижных шарниров в осевом направлении на краях оболочки

$$w = 0, \quad N_1 = 0, \quad M_1 = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \quad \alpha = 1 \quad (2.3)$$

Так как  $(1 - \delta^2 n^2 c) > 0$  (толщина не превышает радиуса) и  $c\Omega^2 n^2 - \nu \neq 0$  ( $\Omega$  в данной задаче не может быть вещественным числом, если не рассматривать движения оболочки как твердого тела), то условия (2.3) можно переписать в виде

$$\Phi = \Phi'' = \Phi^{IV} = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \quad \alpha = 1 \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.2) имеет вид  $\Phi(\alpha) = c_1 e^{z_1 \alpha} + \dots + c_6 e^{z_6 \alpha}$ , где  $z_1 \dots z_6$  — корни характеристического многочлена

$$c(1 - \delta^2 n^2 c)z^6 + cn^2(2\delta^2 \nu - \Omega^2)z^4 + n^2(\Omega^2 + \delta^4 n^2 c + \delta^2 - \delta^2 \nu^2)z^2 - n^4 \Omega^2(\Omega^2 + \delta^4 n^2 c + \delta^2) = 0 \quad (2.5)$$

Используя граничные условия (2.4), можно из корней  $z_k$  составить характеристический определитель и приравнять его нулю. Вид этого определителя зависит от кратности корней. Однако А. А. Мовчан показал, что можно избежать рассмотрения случаев различных кратностей, исследуя уравнение

$$\Delta / \sigma = 0 \quad (2.6)$$

Здесь  $\Delta$  — характеристический определитель для простых корней, а  $\sigma$  — определитель Вандермонда, составленный из величин  $z_1, \dots, z_6$ . Так как характеристический многочлен содержит только четные степени  $z$ , то можно написать  $z_1 = -z_4, z_2 = -z_5, z_3 = -z_6$ . С учетом этого из уравнения (2.6) имеем

$$\frac{\text{sh } z_1}{z_1} \frac{\text{sh } z_2}{z_2} \frac{\text{sh } z_3}{z_3} = 0$$

Отсюда видно, что граничные условия (2.4) выполняются в том случае, если корнями уравнения (2.7) будут величины  $\pi ni$  и  $-\pi ni$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Поэтому решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям (2.4), будет иметь вид

$$\Phi(\alpha) = \sin \pi n \alpha \quad (2.7)$$

Можно показать, что все другие решения краевой задачи (2.2), (2.4) отличаются от (2.7) числовым множителем. Подставляя  $z = \pi ni$  в (2.5), получим уравнение частот свободно опертой оболочки

$$\Omega^4 + [\pi^2 + \delta^2 + cn^2(\pi^4 + \delta^4)]\Omega^2 + \pi^2 \delta^2 (1 - \nu^2) + cn^2 [(1 - \delta^2 n^2 c)\pi^6 + \pi^2 \delta^4 - 2\delta^2 \nu \pi^4] = 0 \quad (2.8)$$

При фиксированных  $\delta, n, c, \nu$  уравнение (2.8) дает четыре частоты

$$\Omega_1 = i \{ 0,5 [\pi^2 + \delta^2 + cn^2(\pi^4 + \delta^4)] - 0,5 ([\pi^2 + \delta^2 + cn^2(\pi^4 + \delta^4)]^2 - 4\delta^2 \pi^2 (1 - \nu^2) - 4cn^2 [(1 - \delta^2 cn^2)\pi^6 - 2\delta^2 \pi^4 \nu + \pi^2 \delta^4]^{1/2} \}^{1/2}$$

$$\Omega_2 = i \{ 0,5 [\pi^2 + \delta^2 + cn^2(\pi^4 + \delta^4)] + 0,5 ([\pi^2 + \delta^2 + cn^2(\pi^4 + \delta^4)]^2 - 4\delta^2 \pi^2 (1 - \nu^2) - 4cn^2 [(1 - \delta^2 cn^2)\pi^6 - 2\delta^2 \pi^4 \nu + \pi^2 \delta^4]^{1/2} \}^{1/2}$$

$$\Omega_3 = -\Omega_1, \quad \Omega_4 = -\Omega_2 \quad (2.9)$$

При  $\delta = 0$  (для полосы шириной  $a$ ) получаем  $\Omega_1 = \sqrt{c} \pi^2 ni, \Omega_2 = \pi i$ . Подставив (2.7) в (2.1), получим выражение для перемещений

$$u(\alpha) = -\delta \pi n^2 (\nu + \pi^2 n^2 c) \cos \pi n \alpha, \quad w(\alpha) = -n^2 (\pi^2 + \Omega^2) \sin \pi n \alpha \quad (2.10)$$

3. Можно ввести функцию перемещений другими формулами

$$u(\alpha) = c\Phi^{IV} + n^2(\Omega^2 + \delta^4 n^2 c + \delta^2)\Phi, \quad w(\alpha) = \delta n (c\Phi''' - \nu\Phi') \quad (3.1)$$

При этом второе уравнение системы (1.2) удовлетворяется тождественно, первое превратится в уравнение (2.2). Выражая усилие и момент через функцию перемещений, можно граничные условия (2.3) записать в следующем виде:

$$\Phi' = \Phi''' = \Phi^V = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \alpha = 1 \quad (3.2)$$

Тогда уравнение приведет к виду

$$z_1 z_2 z_3 \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 \operatorname{sh} z_3 = 0$$

Отсюда находим  $z_k = \pm \pi n i$  и, следовательно, решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям (3.2), примет вид

$$\Phi(\alpha) = \cos \pi n \alpha \quad (3.3)$$

Уравнение частот будет совпадать с уравнением (2.8). Перемещения можно получить, подставив (3.3) в (3.1)

$$u(\alpha) = n^2 (\Omega^2 + \delta^2 + \delta^4 n^2 c + \pi^4 n^2 c) \cos \pi n \alpha, \quad w(\alpha) = \delta n^2 \pi (v + c \pi^2 n^2) \sin \pi n \alpha \quad (3.4)$$

Иногда для упрощения расчетов пренебрегают силами инерции от касательного перемещения. Это допущение эквивалентно отбрасыванию производной по времени в первом уравнении (1.1), в силу чего в первом уравнении (1.2) и в формулах (2.1) исчезнут члены, содержащие множителем частоту. Уравнение (2.8) приводится к виду

$$\Omega^2 + \delta^2 (1 - v^2) + n^2 c (\delta^4 + \pi^4 - 2\delta^2 v \pi^2 - \pi^4 \delta^2 n^2 c) = 0 \quad (3.5)$$

Определяемую этим уравнением частоту будем обозначать  $\Omega^-$ . При  $\delta = 0$  эта частота совпадает с  $\Omega_1$ .

4. Чтобы дать представление о влиянии безразмерной кривизны  $\delta$  на частоты  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega^-$ , на фиг. 1 приведены результаты численных расчетов для значений  $c = 1/3 \cdot 10^{-6}$ ,  $v = 1/3$ ,  $n = 1, 2, \dots, 5$ ,  $\delta = 1, 2, \dots, 20$ .

Расчетами обнаружено, что изменение  $n$  влияет только на третью значащую цифру частот и поэтому на фиг. 1 различным  $n = 1, 2, \dots, 5$  соответствует одна и та же кривая. На фиг. 1 видно, что частота  $\Omega^-$  близка к частоте  $\Omega_1$  (нижней для указанных  $n$ ) только при малых значениях безразмерной кривизны ( $\delta < 2$ ). При больших  $\delta$  частота  $\Omega^-$  сильно отличается от нижней частоты  $\Omega_1$ .

Отбрасывая в выражениях (2.9) и (3.6) члены, содержащие множителем малый параметр  $c$ , получим приближенные формулы для частот

$$\Omega_1 = i \sqrt{0.5 (\pi^2 + \delta^2 - \sqrt{(\pi^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 v^2 \pi^2})}$$

$$\Omega_2 = i \sqrt{0.5 (\pi^2 + \delta^2 + \sqrt{(\pi^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 v^2 \pi^2})}$$

$$\Omega^- = i \delta \sqrt{1 - v^2}$$

Эти формулы дают при  $c \leq 1/3 \cdot 10^{-6}$ ,  $v = 1/3$ ,  $n < 6$ ,  $1 \leq \delta \leq 20$  не менее трех верных значащих цифр частот.

Рассмотрим перемещения цилиндрической оболочки. Для каждой из частот  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  можно по формулам (2.10) и (3.4) найти две системы перемещений. Однако можно убедиться в пропорциональности этих систем перемещений, воспользовавшись тем, что частоты удовлетворяют уравнению (2.8). Поэтому для нахождения перемещений соответствующих данной частоте, можно пользоваться любой из систем формул (2.10) или (3.4). Для определенности будем пользоваться формулами (2.10) для частоты  $\Omega_1$  и формулами (3.4) для частоты  $\Omega_2$ . Тогда, учитывая, что перемещения задаются с точностью до множителя, можно с использованием легкопроверяемого тождества

$$\Omega_2^2 + \delta^2 + \delta^4 n^2 c + \pi^4 n^2 c \equiv -(\Omega_1^2 + \pi^2)$$

получить две системы перемещений

$$u(\alpha) = P \cos \pi n \alpha, \quad w(\alpha) = \sin \pi n \alpha \quad (4.1)$$

$$u(\alpha) = \cos \pi n \alpha, \quad w(\alpha) = -P \sin \pi n \alpha, \quad P = \frac{\delta \pi (v + \pi^2 n^2 c)}{\Omega_1^2 + \pi^2} \quad (4.2)$$

Перемещения (4.1) соответствуют частоте  $\Omega_1$ , перемещения (4.2) — частоте  $\Omega_2$ . Величину  $P$  назовем амплитудой. Амплитуда  $P$  вычислялась для  $c = 1/3 \cdot 10^{-6}$ ,  $\nu = 1/3$ ,  $n = 1, \dots, 5$ ,  $\delta = 0, 1, \dots, 20$ . Расчетами обнаружено, что изменение  $n$  влияет только на третью значащую цифру амплитуды; поэтому на графике зависимость амплитуды от безразмерной кривизны изображается одной и той же кривой для различных  $n = 1, \dots, 5$ . Отбрасывая в выражении для  $P$  члены с малым множителем  $c$ , получим приближенную формулу

$$P = \frac{2\delta\nu\pi}{\pi^2 - \delta^2 + \sqrt{(\pi^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2\nu^2\pi^2}} \quad (4.3)$$

дающую при  $c \leq 1/3 \cdot 10^{-6}$ ,  $n < 6$ ,  $\nu = 1/3$ ,  $0 \leq \delta \leq 20$  не менее трех верных значащих цифр.

Исследуем зависимость амплитуды  $P$  от безразмерной кривизны оболочки  $\delta$ . При  $\delta = 0$  (для бесконечной полосы) амплитуда  $P = 0$ . Используя (4.1) и (4.2), убеждаемся, что при  $\delta = 0$  частота  $\Omega_1$  будет частотой изгибных колебаний (отлично от нуля только перемещение  $w$ ), а частота  $\Omega_2$  — частотой продольных колебаний (отлично от нуля только перемещение  $u$ ). При  $\delta > 0$  амплитуда  $P$  не обращается в нуль. Это означает, что при  $\delta > 0$  каждой частоте будут соответствовать колебания с отличным от нуля как продольным, так и поперечным перемещением. Назовем частоту  $\Omega_1$  (соответственно  $\Omega_2$ ) частотой преимущественных поперечных (соответственно продольных) колебаний, если  $P < 1$ , и частотой преимущественных продольных (соответственно поперечных) колебаний при  $P > 1$ . Из рассмотрения графика (фиг. 2) можно заключить, что при  $\delta < \delta^*$  ( $\delta^*$  — зависящая от  $c, n, \nu$  кривизна, для которой  $P = 1$ ) частота  $\Omega_1$  будет частотой преимущественных поперечных колебаний, а частота  $\Omega_2$  — частотой преимущественных продольных колебаний. При  $\delta > \delta^*$  частота  $\Omega_1$  (низшая для рассматриваемой совокупности значений параметров) будет частотой преимущественных продольных колебаний, а частота  $\Omega_2$  — частотой преимущественных поперечных колебаний. Приближенное значение  $\delta^*$  для нескольких первых значений  $n$  можно найти, полагая в (4.3)  $P = 1$ . Решая получившееся уравнение относительно  $\delta$ , получим  $\delta^* = \pi$ .

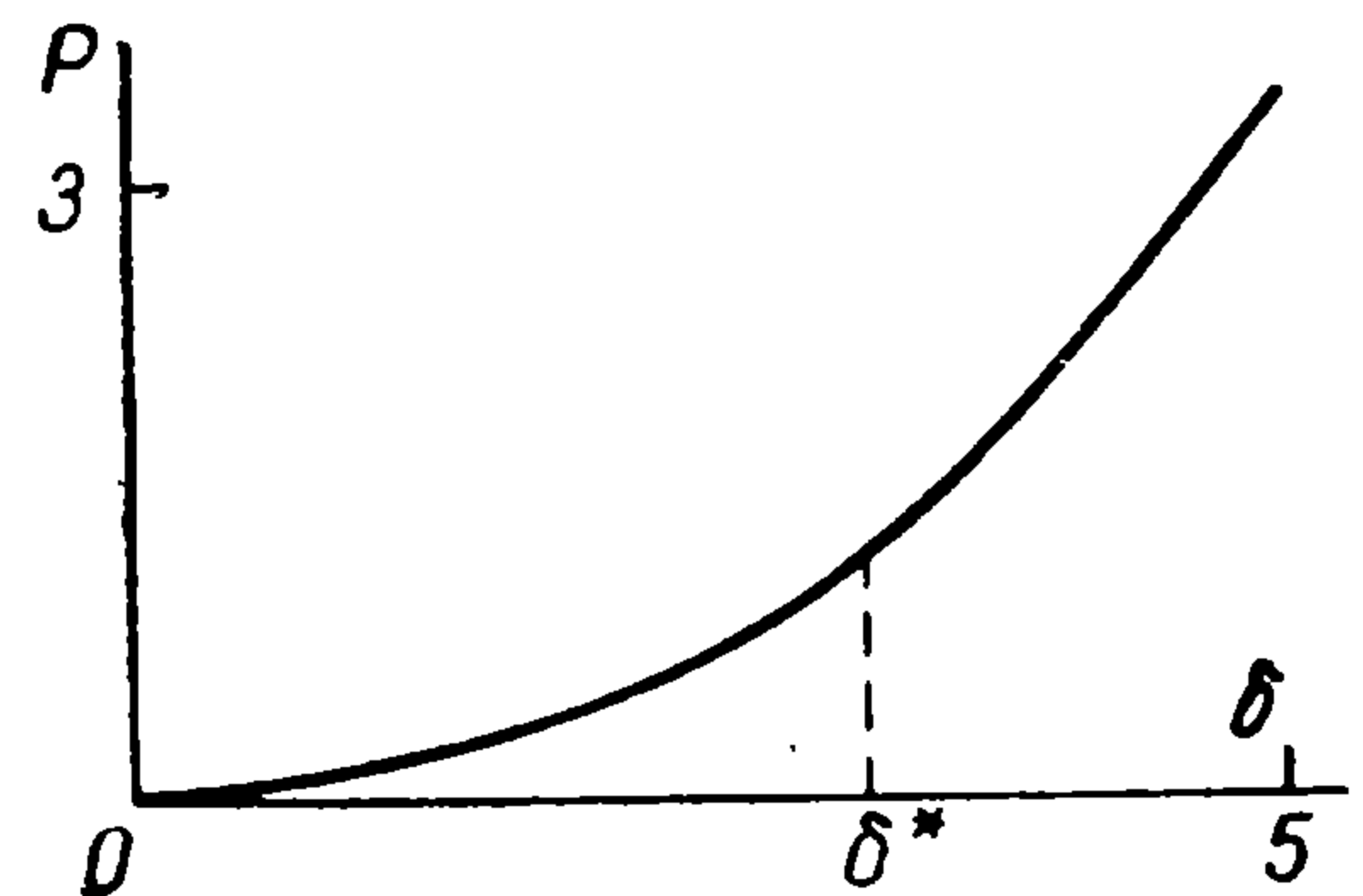
Видно, что низшая частота не всегда соответствует преимущественным изгибным колебаниям [5] (стр. 118), [6] (стр. 135). Так, для рассматриваемой совокупности параметров низшая частота соответствует преимущественным продольным колебаниям, если  $\delta > \delta^*$ . Следует подчеркнуть, что частота  $\Omega^-$  при малых  $\delta$  близка к частоте  $\Omega_1$ , а при больших  $\delta$  — к частоте  $\Omega_2$ . Иначе говоря, частота  $\Omega^-$  близка всегда к частоте преимущественных поперечных колебаний.

В опытах [2] оболочке давались начальные поперечные возмущения и, следовательно, измерялась частота преимущественных поперечных колебаний, т. е. частота, близкая к  $\Omega^-$ . Однако, как показано выше, эта «изгибная частота» не всегда будет низшей. При больших  $\delta$  частота преимущественных продольных колебаний будет существенно ниже получаемой в опытах «изгибной частоты».

Поступила 28 IV 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О л л и к К. К. Об осесимметрических колебаниях кругоцилиндрических оболочек. Тр. Таллинского политехнического ин-та, 1958, № 147.
2. Б р е с л а в с к и й В. Е. О колебаниях цилиндрических оболочек. Ипж. сб. АН СССР, 1953, т. 16.
3. F l ü g g e W. Statik und Dynamik der Schalen. Berlin, 1934.
4. В л а с о в В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
5. Б р е с л а в с к и й В. Е. Собственные колебания круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием гидростатического давления. Изв. АН АН СССР, ОТН, 1956, № 12.
6. Н и к у л и н М. М. Влияние осевых усилий на частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки. Сб. Прочность цилиндрических оболочек. Оборонгиз, 1959.



Фиг. 2