Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Л. Гольденвейзер
(Москва)

Рассматриваются линейные задачи о свободных колебаниях и устойчивости тонких упругих оболочек. Основная цель заключается в исследовании асимптотики собственных значений в зависимости от густоты и конфигурации узловых линий собственных функций.

1. Показано [1], что во многих случаях приближенное построение напряженного и деформированного состояния тонкой упругой оболочки сводится к интегрированию системы уравнений

$$\begin{gathered} L(C) - a^2R^2N(2EhW) + Z = 0 \\ L(2EhW) + N(C) = 0 \end{gathered} \qquad \left(a^2 = \frac{h^2}{3R^2(1-\sigma^2)}\right) \tag{1.1}$$

Здесь C — функция напряжения, через которую легко выражаются усилия и моменты оболочки; W — нормальный прогиб; R — некоторый характерный радиус кривизны; Z — нормальная составляющая внешней поверхностной нагрузки; L, N — дифференциальные операторы

$$L = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{1}{R_2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{1}{R_1}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$$

$$N = \Delta\Delta, \qquad \Delta = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$$

Уравнения (1.1) выписаны в предположении, что срединная поверхность оболочки отнесена к линиям кривизны и первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$I = A^2d\alpha^2 + B^2d\beta^2$$

Под R_1, R_2 подразумеваются главные радиусы кривизны и принимается, что коэффициенты операторов L и N в рассматриваемой области ограничены.

При помощи (1.1) можно приближенно строить напряженные и деформированные состояния оболочки в том случае, когда их изменяемость достаточно велика. Ниже будет показано, что этого достаточно для предстоящих исследований.

2. В задачах о колебаниях, устойчивости и динамической устойчивости надо положить

$$Z = -\frac{m}{2Eh}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(2EhW) + (q_0 + q_t)\,M(2EhW) \tag{2.1}$$

где m — масса единицы площади оболочки

$$M = T_1\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)+T_2\left(\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+$$
$$+S_1\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)-S_2\left(\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{AB^2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$$

Предполагается, что на оболочку действует некоторая поверхностная нагрузка, интенсивность которой определяется величиной q_0+q_t, где q_0 — постоянная, а q_t — переменная (во времени) составляющие интенсивности, и при достаточно малых значениях q_0+q_t в оболочке возникает безмоментное напряженное состояние, определяемое значениями тангенциальных усилий (T_1, T_2, S_1, S_2 — заданные функции α, β).

$$T_1^\circ = 2Eh\,(q_0+q_t)\,T_1, \qquad T_2^\circ = 2Eh\,(q_0+q_t)\,T_2$$
$$S_1^\circ = 2Eh\,(q_0+q_t)\,S_1, \qquad S_2^\circ = 2Eh\,(q_0+q_t)\,S_2$$

Здесь, как это часто делается, отброшены тангенциальные составляющие сил инерции в задачах об устойчивости и дополнительной приведенной нагрузки в динамических задачах.

3. Будем решать систему (1.1), (2.1) методом Галеркина. Положим

$$C=\gamma c, \qquad 2EhW=\zeta w \tag{3.1}$$

где c, w — заданные функции, а γ и ζ — искомые числа (в задаче о статической устойчивости) или искомые функции t (в задачах о колебаниях и динамической устойчивости). Тогда, помножив первое из уравнений (1.1) на w, а второе — на c и проинтегрировав полученные равенства получим уравнения для определения γ и ζ

$$\begin{gathered}\gamma\iint L\,(c)\,wAB\,d\alpha\,d\beta-a^2R^2\zeta\iint N\,(w)\,wAB\,d\alpha\,d\beta\,-\\-\frac{m}{2Eh}\frac{d^2\zeta}{dt^2}\iint w^2AB\,d\alpha\,d\beta+(q_0+q_t)\,\zeta\iint M\,(w)\,wAB\,d\alpha\,d\beta=0\\ \gamma\iint N\,(c)\,cAB\,d\alpha\,d\beta+\zeta\iint L\,(w)\,cAB\,d\alpha\,d\beta=0\end{gathered}\tag{3.2}$$

4. Положив в (3.2) $q_0+q_t=0$ и заменив γ, ζ на $\gamma\cos\omega t$, $\zeta\cos\omega t$, получим для частоты свободных колебаний оболочки формулу

$$\frac{m}{2Eh}\,\omega^2=k^{2\rho-4}\,\frac{1}{\nu'}\left(l+k^{8-2\rho-2/\tau}\,\frac{R^2}{3\,(1-\sigma^2)}\,n\right) \tag{4.1}$$

Здесь k — большой (для тонкой оболочки) параметр

$$k=\left(\frac{h}{R}\right)^{-\tau} \qquad (\tau>0) \tag{4.2}$$

(τ — произвольное положительное число), а l, n и ν' — числа, определяемые формулами

$$\begin{aligned}k^{2\rho}l&=\iint L\,(c)\,wAB\,d\alpha\,d\beta\iint L\,(w)\,cAB\,d\alpha\,d\beta\\ k^8n&=\iint N\,(w)\,wAB\,d\alpha\,d\beta\iint N\,(c)\,cAB\,d\alpha\,d\beta\\ k^4\nu'&=\iint N\,(c)\,cAB\,d\alpha\,d\beta\iint w^2AB\,d\alpha\,d\beta\end{aligned}\tag{4.3}$$

В левые части соотношений (4.3) введены множителями различные степени параметра k для удобства дальнейшего изложения (ρ — пока произвольное число).

Равным образом, положив в (3.2) $q_t = 0$ и считая, что γ, ζ — не зависят от t, получим для критического значения q_0 в задаче о статической устойчивости формулу

$$q_0 = k^{2\rho-\chi-4} \frac{1}{\nu} \left(l + k^{8-2\rho-2/\tau} \frac{R^2}{3(1-\sigma^2)} n\right) \tag{4.4}$$

в которой, помимо (4.3), обозначено (χ — пока произвольное число):

$$k^{4+\chi}\nu = \iint N(c)\, cAB\, d\alpha\, d\beta \iint M(w)\, wAB\, d\alpha\, d\beta \tag{4.5}$$

Нетрудно получить и дифференциальное уравнение динамической устойчивости. Следуя В. В. Болотину [2], запишем его так:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \omega^{\circ 2}\left(1 - \frac{q_0 + q_t}{q_0^{\circ}}\right)\zeta = 0$$

Здесь ω° и q_0^c — значения чисел ω и q_0, определяемые формулами (4.1) и (4.4). В дальнейшем ограничимся только анализом формул (4.1) и (4.4), хотя метод исследования применим и к изучению свойств уравнения динамической устойчивости.

5. Зададим c и w в формулах (3.1) в виде

$$c = c_* \left[r_- \cos k(f_1 - f_2) - r_+ \cos k(f_1 + f_2)\right] \tag{5.1}$$
$$w = w_* \left[\cos k(f_1 - f_2) - \cos k(f_1 + f_2)\right]$$

где c_*, w_*, f_1, f_2, r_-, r_+ — функции α, β, зависящие от нашего выбора, а k — большой параметр (4.2). Наложим на w_* и c_* требования

$$w_* \geqslant 0, \qquad c_* \geqslant 0 \tag{5.2}$$

и рассмотрим свойства напряженного и деформированного состояния D, определяемого формулами (3.1), (5.1). Учитывая (5.2) и заметив, что

$$\cos k(f_1 - f_2) - \cos k(f_1 + f_2) = 2 \sin kf_1 \sin kf_2$$

заключаем, что узловыми линиями D (кривыми, вдоль которых $w = 0$) могут быть только линии уровня функций f_1 и f_2. Следовательно, выбрав соответствующим образом f_1 и f_2 можно добиться, чтобы D имело две системы узловых линий, каждая из которых принадлежит некоторому наперед заданному семейству кривых. Можно два семейства свести и к одному. Для этого надо, например[1], положить $f_2 = \mathrm{const} \neq n/\pi\; k$. Густота узловых линий D будет увеличиваться с увеличением k, т. е. при данном h / R с увеличением τ. Число τ, так же как в задачах о статическом равновесии оболочек [1], будем называть показателем изменяемости.

Итак, за счет выбора f_1 и f_2 можно добиться, чтобы напряженное и деформированное состояние (3.1), (5.1) имело две (или одну) системы узловых линий, принадлежащих двум (или одному) заранее заданным семействам кривых; за счет выбора показателя изменяемости τ можно при фиксированных f_1 и f_2 увеличивать или уменьшать густоту узловых линий; наконец, за счет выбора c_*, w_*, не нарушая условий (5.2) и не из-

[1] Уменьшить число семейств узловых линий до одного можно и другим способом: положив, что линии уровня функций f_1 и f_2 совпадают, т. е. между f_1 и f_2 существует функциональная зависимость. Для определенности ниже будет всегда применяться прием, описанный в тексте. Это, в частности, обозначает, что исключается возможность выполнения во всех точках рассматриваемой области равенств

$$f_1 + f_2 = \mathrm{const}, \quad f_1 - f_2 = \mathrm{const}$$

меняя узловых линий, можно выполнить граничные условия задачи (последние предполагаются однородными).

С помощью (3.1), (5.1) можно получить сколь угодно густую сетку узловых линий, не требуя, чтобы f_1, f_2 c_*, w_*, имели большую изменяемость. Поэтому постулируем, что функции f_1, f_2, w_*, c_*, r_-, r_+ можно подобрать так, чтобы их изменяемость была не слишком велика и чтобы c и w были достаточно близки, в смысле близости интегралов (4.3), (4.5), к некоторому решению уравнений (1.1), (2.1). При таком выборе f_1, f_2, w_*, c_*, r_-, r_+ формулы (4. 1) и (4.4) будут давать значения ω^2 и q_0, достаточно близкие к точным. Принятое предположение будет правильным, если правильны два следующих предположения:

(a) что w можно вышеуказанным способом апроксимировать при помощи второй формулы (5.1) за счет выбора f_1, f_2, w_*;

(b) что r_-, r_+ и c_* можно подобрать так, чтобы при выбранном w первая формула (5.1) достаточно точно апроксимировала c.

Предположение (a) можно считать оправданным рассуждениями, приведенными в этом параграфе. Предположение (b) будет рассмотрено ниже.

6. Задача теперь будет заключаться в построении асимптотических (при $k \to \infty$) выражений для интегралов (4.3), (4.5) в предположении, что c и w имеют вид (5. 1). Легко проверить, что имеет место формула:

$$\begin{aligned} P(a) = &-k^2\,[P_0^- r_- a_* \cos k(f_1 - f_2) - P_0^+ r_+ a_* \cos k(f_1 + f_2)] - \\ &- k\,[P_1^-(r_- a_*) \sin k(f_1 - f_2) - P_1^+(r_+ a_*) \sin k(f_1 + f_2)] + \\ &+ [P_2(r_- a_*) \cos k(f_1 - f_2) - P_2(r_+ a_*) \cos k(f_1 + f_2)] \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь P — оператор второго порядка, под которым можно подразумевать L или M; a — функция вида (5.1), под которой можно подразумевать c или w (если a отождествляется с w, то r_- и r_+ надо считать равными единице.) Остальные обозначения в (6.1) следующие:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{A^2}\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{1}{B^2}\frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 \\ L_1 &= \frac{2}{A^2R_2}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{2}{B^2R_1}\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2R_2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2R_1}\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + \\ &+ \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{AR_2}\right)\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{BR_1}\right)\frac{\partial f}{\partial \beta}, \qquad L_2 = L, \\ M_0 &= T_1\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 + T_2\frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 + (S_1 - S_2)\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{1}{B}\frac{df}{\partial \beta}, \quad M_2 = M \end{aligned} \tag{6.2}$$

(Формула M_1 не выписывается, так как она не понадобится.)

$$P_j^{\pm} = P_j\,|_{f=f_1 \pm f_2} \tag{6.3}$$

Для оператора N соответствующая формула имеет вид

$$N(a) = k^4\,[N_0^- r_- a_* \cos k(f_1 - f_2) - N_0^+ r_+ a_* \cos k(f_1 + f_2)] + \ldots \tag{6.4}$$

где

$$N_0 = \left[\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2\right]^2, \qquad N_j^{\pm} = N_j\,|_{f=f_1 \pm f_2} \tag{6.5}$$

а точками обозначены слагаемые, содержащие множители со степенями k ниже четвертой.

7. Для дальнейшего будут полезны следующие замечания относительно формул п. 6.

Выражения $P_j^{\pm}$ и $N_j^{\pm}$ — линейные дифференциальные операторы относительно независимых переменных (α, β), порядок которых равен их нижнему индексу. В частности, $P_0^{\pm}$ и $N_0^{\pm}$ — операторы нулевого порядка, т. е. выражения, не содержащие символов производных, и поэтому в (6.1) и (6.4) величины, стоящие за $P_0^{\pm}$ и $N_0^{\pm}$, не взяты в скобки.

Коэффициенты $P_j^{\pm}$ и $N_j^{\pm}$ зависят от функции f, под которой надо подразумевать $f_1 - f_2$ или $f_1 + f_2$ в зависимости от смысла верхнего индекса. Исключение представляют $P_2^{\pm}$ и $N_4^{\pm}$ (случай, когда нижний индекс равен порядку исходного оператора). В $P_2^{\pm}$ и $N_4^{\pm}$ функция f не входит. Поэтому в (6.1) при P_2 опущены значки (плюс) и (минус), показывающие, что надо подразумевать под f.

Первая формула (6.5) показывает, что N_0— величина положительная для любой поверхности, каков бы ни был знак ее гауссовой кривизны K (здесь и в дальнейшем исключен неинтересный случай, когда и f_1 и f_2 константы).

Рассмотрим вопрос о знаке выражения L_0, определенного (6.2).

Если $K > 0$, то можно принять, что R_1 и R_2 — положительны и L_0 будет положительной величиной.

Если $K = 0$, то, положив для конкретности $R_1 = \infty$, получим

$$L_0 = \frac{1}{A^2}\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2$$

Вообще говоря, R_2 может менять знак (например, в цилиндрической оболочке, поперечное сечение которой имеет точку перегиба), но такие случаи здесь и всюду в дальнейшем мы исключим из рассмотрения. Тогда можно принять, что $R_2 > 0$ и L_0 при $K = 0$ будет неотрицательной величиной. При этом, как показывают первая и третья формулы (6.2), из тождества $L_0 \equiv 0$ вытекает тождество $L_1 \equiv 0$.

Если $K < 0$, то в первой формуле (6.2) R_1 и R_2 будут иметь разные знаки и относительно знака L_0 ничего определенного сказать нельзя.

8. Вернемся к обсуждению предположения (b), сформулированного в конце п. 5. Примем, что справедливо предшествующее предположение (a) и что соответствующим подбором w_*, f_1, f_2 в формулах (5.1) и (3.1) достаточно точно апроксимировано w. Тогда можно попытаться найти функцию напряжения c при помощи второго уравнения (1.1) и сравнить этот результат с тем, который можно получить подбором c_*, r_- r_+ в формулах (5.1) и (3.1). Проведем эти выкладки приближенно, считая, что параметр k сколь угодно велик, и сохраняя в выражениях только члены с самыми высокими степенями k (здесь и далее в таких выкладках знак равенства заменяется знаком $\approx$).

Согласно (3. 1) и (6.4) имеем

$$N(C) \approx k^4 \gamma c_* \left[r_- N_0^- \cos k(f_1 - f_2) - r_+ N_0^+ \cos k(f_1 + f_2)\right] \qquad (8.1)$$

Можно считать, что c_*, r_- и r_+ отличны от нуля. Кроме того, в п. 7 было показано, что N_0^+ и N_0^- положительны. Поэтому в правой части (8.1) коэффициенты при $\cos k(f_1 - f_2)$ и $\cos k(f_1 + f_2)$ заведомо отличны от нуля.

Для главной части $L\,(2EhW)$ при помощи (6.1) получим:

в случае, когда L_0^- и L_0^+ отличны от нуля

$$L\,(2EhW) \approx k^2\zeta w_* \,[L_0^- \cos k\,(f_1 - f_2) - L_0^+ \cos k\,(f_1 + f_2)] \qquad (8.2)$$

в случае, когда $L_0^- = L_0^+ = 0$, а L_1^- и L_1^+ отличны от нуля

$$L\,(2EhW) \approx -k\zeta\,[L_1^-(w_*) \sin k\,(f_1 - f_2) - L_1^+(w_*) \sin k\,(f_1 + f_2)] \qquad (8.3)$$

в случае, когда $L_0^- = L_0^+ = L_1^- = L_1^+ = 0$

$$L\,(2EhW) \approx \zeta\,[L_2(w_*) \cos k\,(f_1 - f_2) - L_2(w_*) \cos k\,(f_1 + f_2)] \qquad (8.4)$$

Из замечаний, высказанных в п. 7, вытекает, что для оболочки положительной кривизны всегда имеет место (8.2), для оболочки нулевой кривизны возможны (8.2) и (8.4) и только для оболочки отрицательной кривизны может оказаться справедливой формула (8.3).

Заменив во втором уравнении (1.1) $N\,(C)$ приближенным выражением (8.1), а $L\,(2EhW)$ — приближенным выражением (8.2) или (8.4), можно удовлетворить полученные уравнения, подобрав в этом равенстве c_*, r_-, r_+ так, чтобы обращались в нули коэффициенты при $\cos k\,(f_1 - f_2)$ и $\cos k\,(f_1 + f_2)$ в отдельности. Отсюда следует, что предположение (b) можно считать справедливым во всех случаях за исключением, быть может, случая, когда срединная поверхность оболочки имеет отрицательную кривизну.

Замечание. Легко видеть, что если кривизна срединной поверхности положительна, а также если кривизна срединной поверхности равна нулю, но функции f_1 и f_2 выбраны так, что L_0^+ и L_0^- отличны от нуля, то r_- и r_+ будут иметь одинаковые знаки.

9. Имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \iint \varphi\,(\alpha, \beta) \cos kf\,(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta &= k^{-1}H\,(\varphi) \\ \iint \varphi\,(\alpha, \beta) \sin kf\,(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta &= k^{-1}H\,(\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (f \neq \mathrm{const}) \qquad (9.1)$$

где H — некоторый (различный в различных случаях) функционал от φ, ограниченный при $k \to \infty$. При $\varphi \equiv 0$, конечно, и $H\,(\varphi) = 0$, но последнее равенство может выполняться и при $\varphi \not\equiv 0$.

Доказательство справедливости соотношений (9.1) проведем при упрощающем предположении, что всюду в области $f_\alpha' \neq 0$. Тогда, взяв для определенности первое соотношение (9.1), можно написать

$$\iint \varphi\,(\alpha, \beta) \cos kf\,(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \frac{1}{k} \iint \frac{\varphi\,(\alpha, \beta)}{f_\alpha'\,(\alpha, \beta)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sin kf\,(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

Отсюда по формуле интегрирования по частям

$$\iint \varphi\,(\alpha, \beta) \cos kf\,(\alpha, \beta) = \frac{1}{k} \oint \frac{\varphi\,(\alpha, \beta)}{f_\alpha'\,(\alpha, \beta)} \sin kf\,(\alpha, \beta)\, ds - \\ - \frac{1}{k} \iint \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\varphi\,(\alpha, \beta)}{f_\alpha'\,(\alpha, \beta)} \right] \sin kf\,(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

Интеграл по области и интеграл по контуру, ограничивающему эту область, конечны (при очевидных предположениях о функциях φ и f), и требуемое положение доказано.

Из (9.1) вытекают формулы

$$\iint \varphi(\alpha, \beta) \cos kf(\alpha, \beta) \cos kg(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \tag{9.2}$$

$$= \frac{1}{2} \iint \varphi(\alpha, \beta)\, [\cos k(f - g) + \cos k(f + g)]\, d\alpha\, d\beta =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \iint \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta + k^{-1} H(\varphi) \text{ при } f = g \text{ или } f = -g \\ k^{-1} H(\varphi) \text{ при } f - g \neq \text{const и } f + g \neq \text{const} \end{cases}$$

$$\iint \varphi(\alpha, \beta) \cos kf(\alpha, \beta) \sin kg(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = k^{-1} H(\varphi) \tag{9.3}$$

$$\text{при } f - g \neq \text{const}, \quad f + g \neq \text{const}$$

Замечание. Случаи, когда $f - g = \text{const}$ или $f + g = \text{const}$, не представляют интереса, как вытекает из сноски в п. 5.

10. При помощи (9.2) и (9.3) легко вычислить главные части (при $k \to \infty$) интегралов, входящих в (4.3) и (4.5)

Учитывая, что N_0^- и N_0^+ положительны во всех точках рассматриваемой области, получаем

$$\iint N(w) wAB\, d\alpha\, d\beta \approx \frac{k^4}{2} \iint [N_0^- + N_0^+]\, w_*^2 AB\, d\alpha\, d\beta$$

$$\iint N(c)\, cAB\, d\alpha\, d\beta \approx \frac{k^4}{2} \iint [r_-^2 N_0^- + r_+^2 N_0^+]\, c_*^2 AB\, d\alpha\, d\beta \tag{10.1}$$

$$\iint w^2 AB\, d\alpha\, d\beta \approx \iint w_*^2 AB\, d\alpha\, d\beta$$

Далее имеем приближенные равенства

$$\iint L(c)\, wAB\, d\alpha\, d\beta \approx \iint L(w)\, cAB\, d\alpha\, d\beta \approx$$

$$\approx -\frac{k^2}{2} \iint [L_0^- r_- + L_0^+ r_+]\, c_* w_* AB\, d\alpha\, d\beta \tag{10.2}$$

которые будут справедливы только при условии, что

$$\iint [L_0^- r_- + L_0^+ r_+]\, c_* w_* AB\, d\alpha\, d\beta \neq 0 \tag{10.3}$$

Если (10.3) нарушается вследствие того, что во всех точках рассматриваемой области выполняются равенства

$$L_0^- = L_0^+ = 0 \tag{10.4}$$

то вместо (10.2) получим

$$\iint L(c)\, wAB\, d\alpha\, d\beta = Q_1, \qquad \iint L(w)\, cAB\, d\alpha\, d\beta = Q_2 \tag{10.5}$$

Здесь Q_1, Q_2 — величины, остающиеся конечными при $k \to \infty$, и в частности, если, кроме (10.4), выполняются и равенства

$$L_1^+ = L_1^- = 0 \tag{10.6}$$

то (10.5) приобретают вид

$$\begin{aligned} &\iint L(c)\, wAB\, d\alpha\, d\beta \approx \frac{1}{2} \iint L_2 (r_- c_* + r_+ c_*)\, w_* AB\, d\alpha\, d\beta \\ &\iint L(w)\, cAB\, d\alpha\, d\beta \approx \frac{1}{2} \iint L_2(w_*)\, (r_- c_* + r_+ c_*)\, AB\, d\alpha\, d\beta \end{aligned} \tag{10.7}$$

Если же (10.3) нарушается, но L_0^- и L_0^+ не равны тождественному нулю, то вместо (10.2), вообще говоря, получатся формулы вида

$$\iint L\,(c)\,wAB\,d\alpha\,d\beta \approx kE_1, \qquad \iint L\,(w)\,cAB\,d\alpha\,d\beta = kE_2 \tag{10.8}$$

где E_1, E_2 — величины, остающиеся конечными при $k \to \infty$.

Сравнив (10.1), (10.2), (10.5) и (10.8) с формулами (4.3), можно сделать вывод, что в (4.3) под l, n и ν' можно подразумевать величины, остающиеся конечными при $k \to \infty$, если соответствующим образом будет подобрано ρ. А именно, надо считать, что $\rho = 2$, когда выполняется требование (10.3) и $\rho = 0$, когда всюду в рассматриваемой области имеют место равенства (10.4). Если одновременно неверны соотношения (10.3) и (10.4), то надо, вообще говоря, считать, что $\rho = 1$, но возможны и случаи, когда $\rho = 0$.

Так же можно убедиться, что в (4.5) надо считать $\chi = 2$, если

$$\iint [M_0^- + M_0^+]\,w^2AB\,d\alpha\,d\beta \neq 0 \tag{10.9}$$

надо считать $\chi = 0$, если всюду в рассматриваемой области

$$M_0^- = M_0^+ = 0 \tag{10.10}$$

надо считать $\chi = 1$ или $\chi = 0$, если нарушаются и (10.9) и (10.10).

11. Рассмотрим условия, при которых выполняются соотношения (10.3) или (10.4).

Если кривизна срединной поверхности оболочки положительна, то L_0^+, L_0^-, r_-, r_+ — положительные величины (см. п. п. 7,8). Принято, кроме того, что c_*, w_* неотрицательны и, разумеется, отличны от тождественного нуля. Таким образом, для оболочки положительной кривизны соотношение (10.3) всегда выполняется.

Если кривизна срединной поверхности равна нулю, то L_0^-, L_0^+ — неотрицательные величины (п. 7). Кроме того, было показано, что из тождества $L_0 \equiv 0$ вытекает тождество $L_1 \equiv 0$ и, наконец, что r_- и r_+ имеют одинаковые знаки, если L_0^+ и L_0^- отличны от нуля. Отсюда вытекает, что соотношение (10.3) в рассматриваемом случае может нарушаться только тогда, когда во всех точках выполняются равенства (10.4) и (10.6). В развернутом виде равенства (10.4) записываются так:

$$\frac{1}{A^2}\frac{1}{R_2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial\alpha}\right]^2 = 0, \qquad \frac{1}{A^2}\frac{1}{R_2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial\alpha}\right]^2 = 0$$

Эти равенства выполняются только при условии, что

$$\frac{\partial f_1}{\partial\alpha} \equiv \frac{\partial f_2}{\partial\alpha} \equiv 0.$$

Так как возможность функциональной зависимости между f_1 и f_2 исключена, то для выполнения соотношений (10.3) надо положить, что $f_1 = f_1(\beta)$, $f_2 = \text{const}$ (или $f_1 = \text{const}$, $f_2 = f_2(\beta)$).

Итак, для оболочки нулевой кривизны соотношения (10.3) не выполняются тогда и только тогда, когда напряженное и деформированное состояние (3.1), (5.1) имеет только одну систему узловых линий, состоящую из линий β-const, т. е. асимптотических линий (прямолинейных образующих) срединной поверхности. При этом надо принимать $\rho = 0$. Во всех других случаях выполняется условие (10.3) и надо так же, как для оболочки положительной кривизны, принимать $\rho = 2$.

Если кривизна срединной поверхности оболочки отрицательна, то о знаке L_0 в общем случае нельзя сказать ничего определенного и вопрос о выборе значений ρ становится сложнее. В связи с этим, далее исключим из рассмотрения оболочки отрицательной кривизны. Тем самым исключаются из рассмотрения и случаи, когда $\rho = 1$, так как они не могут иметь место ни для оболочек положительной кривизны, ни для оболочек нулевой кривизны (если в последней, как предполагается, не меняется знак R_2).

12. Вернемся к формуле (4.1) и при ее помощи исследуем асимптотику частот собственных колебаний оболочки, считая, что показатель изменяемости τ положителен и, следовательно, параметр k сколь угодно велик при достаточно малом h/R.

Сохранив в (4.1) только главные части (при $k \to \infty$), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{2Eh}\omega^2 \approx k^{2\rho-4}\frac{l}{\nu'} && \text{при } \tau < \tau_0 \\
&\frac{m}{2Eh}\omega^2 \approx k^{2\rho-4}\frac{1}{\nu'}\left(l + \frac{R}{3(1-\sigma^2)}n\right) && \text{при } \tau = \tau_0 \qquad (12.1)\\
&\frac{m}{2Eh}\omega^2 \approx k^{4-2/\tau}\frac{R^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{n}{\nu'} && \text{при } \tau > \tau_0
\end{aligned}$$

Здесь τ_0 — число, определяемое формулой

$$\tau_0 = \frac{1}{4-\rho} \qquad (12.2)$$

которое назовем характеристическим значением показателя изменяемости τ. Отметим, что τ_0 зависит от ρ, которое может иметь только три значения (2, 1, 0) и соответственно этому существуют только три характеристических значения показателя изменяемости: 1/2, 1/3, 1/4. Эти значения показателя изменяемости играют особую роль и в задачах о статическом равновесии теории оболочек [3]. Учитывая (4.2), можно написать

$$k^{2\rho-4} = \left(\frac{h}{R}\right)^{(4-2\rho)\tau}, \qquad k^{4-2/\tau} = \left(\frac{h}{R}\right)^{2-4\tau} \qquad (12.3)$$

Отсюда следует, что, согласно (12.1), ω^2 с возрастанием τ убывает или (при $\rho = 2$) не возрастает, пока τ остается меньше своего характеристического значения τ_0; далее, когда τ превзойдет τ_0, ω^2 начинает возрастать с возрастанием τ.

Рассмотрим случай, когда $\rho = 2$. В оболочке положительной кривизны он будет иметь место всегда (п. 11). В оболочке нулевой кривизны это будет тогда, когда в число узловых линий входит, по меньшей мере, одно семейство линий, не совпадающих с прямолинейными образующими.

В перечисленных выше случаях согласно первой формуле (12.1) частота собственных колебаний будет оставаться соизмеримой $(h/R)^\circ$, пока $\tau < \tau_0 = 1/2$ и, следовательно, в известных пределах возрастание τ не сопровождается существенным увеличением частот собственных колебаний. Затем при $\tau > \tau_0 = 1/2$, согласно третьей формуле (12.1), частоты собственных колебаний существенно возрастают с ростом τ по закону $(h/R)^{2-4\tau}$. Вопрос о том, при каком значении показателя изменяемости τ

частота колебаний может оказаться минимальной, требует в данном случае более конкретного анализа.

Пусть теперь $\rho = 0$. Такое значение ρ будет иметь место в случае, когда оболочка нулевой кривизны совершает колебания, имея одно семейство узловых линий, проходящих вдоль прямолинейных образующих.

Формулы (12.1) и (12.3) показывают для этого случая, что, пока $\tau < \tau_0 = 1/4$, частоты собственных колебаний будут соизмеримы $(h/R)^{4\tau}$, т. е. убывают с возрастанием показателя изменяемости τ. При $\tau > \tau_0$ частоты собственных колебаний соизмеримы $(h/R)^{2-4\tau}$ и возрастают с возрастанием τ. Характеристическому значению $\tau_0 = 1/4$ будет соответствовать наинизшая частота. Она соизмерима $(h/R)^1$, и, следовательно, существенно ниже (при сколь угодно малых h/R) наинизшей частоты, которая может получиться при колебаниях оболочки нулевой кривизны в случае, когда $\rho = 2$, т. е. когда есть, по меньшей мере, одно семейство узловых линий, не проходящих вдоль прямолинейных образующих.

Напомним, что возрастание показателя изменяемости означает увеличение числа узловых линий. Таким образом, здесь имеет место типичная для задач теории оболочек инверсия: убывание собственных значений при возрастании числа узловых линий. Это будет происходить только до известного предела — до достижения показателем изменяемости характеристического значения,— а затем восстанавливается обычная закономерность: возрастание собственных значений при возрастании числа узловых линий.

13. Обратимся к анализу формулы (4.4). Сохранив в правой части этого равенства только главные (при $k \to \infty$) части, получим

$$q_0 \approx k^{2\rho-\chi-4}\frac{l}{\nu} \qquad \text{при } \tau < \tau_0$$

$$q_0 \approx k^{2\rho-\chi-4}\left(l + \frac{R^2}{3(1-\sigma^2)}n\right)\frac{1}{\nu} \qquad \text{при } \tau = \tau_0$$

$$q_0 \approx k^{4-\chi-2/\tau}\frac{R^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{n}{\nu} \qquad \text{при } \tau > \tau_0$$

Здесь τ_0 — характеристический показатель изменяемости — имеет тот же смысл, что и в п. 12. Параметр k определяется (4.2). Отсюда

$$k^{2\rho-\chi-4} = \left(\frac{h}{R}\right)^{(4+\chi-2\rho)\tau}, \qquad k^{4-\chi-2/\tau} = \left(\frac{h}{R}\right)^{2-(4-\chi)\tau}$$

Здесь ρ и χ могут принимать только значения 0, 1, 2. Поэтому $k^{2\rho-\chi-4}$ с возрастанием τ либо убывает, либо (при $\rho = 2$, $\chi = 0$) сохраняет свои значения, а $k^{4-\chi-2/\tau}$ всегда возрастает вместе с τ. Из этого вытекает, что $\{q_0\}_{\min}$ будет соизмеримо величине

$$k^{4-\chi-2/\tau_0} = \left(\frac{h}{R}\right)^{2-(4-\chi)\tau_0} = \left(\frac{h}{R}\right)^{\lambda} \left(\lambda = 2 - \frac{4-\chi}{4-\rho}\right) \tag{13.1}$$

Соответствующее значение q_0 будет достигаться при $\tau = \tau_0$ (исключение представляет случай $\rho = 2$, $\chi = 0$, который, как будет видно, можно не принимать в расчет).

В задачах устойчивости интерес представляют наименьшие значения критической силы, поэтому необходимо выяснить, при каких обстоятельствах в (13.1) достигает наибольшей величины показатель λ, значения которого выписаны здесь в таблице справа для значений $\rho = 2, 1, 0$ и $\chi = 2, 1, 0$.

	$\chi=2$	$\chi=1$	$\chi=0$
$\rho=2$	1	$^1/_2$	0
$\rho=1$	$^4/_3$	1	$^2/_3$
$\rho=0$	$^3/_2$	$^5/_4$	1

Пусть оболочка имеет положительную кривизну. Тогда имеет место равенство $\rho = 2$, как бы ни были расположены узловые линии формы потери устойчивости. Очевидно, что конфигурацию этих линий всегда можно выбрать так, чтобы в зависимости от нашего желания выполнились или нарушились условия (10.9), (10.10), т. е. чтобы χ получило нужное значение. Отсюда ясно, что конфигурацию узловых линий надо подчинить требованию, чтобы при данных T_1, T_2, S_1, S_2 выполнялось требование (10.9), влекущее за собой равенство $\chi = 2$, так как тогда λ примет наибольшее возможное при $\rho = 2$ значение, равное единице. Отсюда, в частности, и следует, что случай $\rho = 2$ и $\chi = 0$ не представляет интереса.

Пусть кривизна оболочки равна нулю. Тогда будут существовать такие формы потери устойчивости, при которых $\rho = 0$. Это будет потеря устойчивости с одним семейством узловых линий, совпадающих с прямолинейными образующими. Но приведенная выше таблица показывает, что при $\rho = 0$ значения λ не меньше единицы и равны единице только при $\chi = 0$. Вместе с тем равенство $\rho = 0$ достигается только при совершенно определенной конфигурации узловых линий и на нее нельзя накладывать дополнительные требования, как в случае оболочки положительной кривизны. Поэтому для оболочки нулевой кривизны возможны два случая:

Случай 1. При данном докритическом напряженном состоянии (T_1, T_2, S_1, S_2) существуют такие f_1, f_2, соответствующие потере устойчивости с одним семейством узловых линий, проходящих вдоль прямолинейных образующих, при которых выполняется условие (10.9).

Случай 2. При данном докритическом напряженном сотоянии (T_1, T_2, S_1, S_2,) при любых f_1, f_2, соответствующих потере устойчивости с одним семейством узловых линий, проходящих вдоль прямолинейных образующих, условие (10.9) нарушается и выполняется условие (10.10).

В случае 1 будет иметь место потеря устойчивости с одним семейством узловых линий, проходящих вдоль прямолинейных образующих, критическое значение q_0 при этом будет соизмеримо $(h\,/\,R)^{3/2}$, а показатель изменяемости будет иметь значение, равное $1\,/\,4$. Это вытекает из того, что f_1 и f_2 в рассматриваемом случае можно выбрать так, чтобы $\rho = 0$ и $\chi = 2$, а из таблицы значений λ видно, что при этом λ принимает наибольшее из возможных значений, равное $3\,/\,2$. Примером случая 1 может служить задача о цилиндрической оболочке, подверженной внешнему давлению. Тогда докритическое напряженное состояние будет таким:

$$T_1 = S_1 = S_2 = 0, \qquad T_2 < 0$$

Следовательно

$$M_0 = T_2 \frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2$$

Для того чтобы узловые линии совпадали с прямолинейными образующими, функции f_1 и f_2 надо выбрать, например, так: $f_1 = f_1\,(\beta)$, $f_2 = \mathrm{const}$.

При этом

$$M_0^- = T_2 \frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right)^2, \qquad M_0^+ = T_2 \frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right)^2$$

и условие (10.9) заведомо выполняется.

В случае 2, выбрав f_1 и f_2 так, чтобы узловые линии проходили вдоль прямолинейных образующих, получим $\rho = 0$ и $\chi = 0$. Этому в таблице соответствует $\lambda = 1$. Такое же значение имеет λ и при $\rho = 2$, т. е. тогда, когда узловые линии имеют произвольную конфигурацию, исключая только такую, при которой нарушается условие (10.9). Это значит, что в случае 2 совпадение узловых линий с прямолинейными образующими не приводит к существенному уменьшению критической нагрузки. Примером случая 2 может служить цилиндрическая оболочка, подверженная осевому сжатию. Имеем

$$T_1 < 0, \qquad T_2 = S_1 = S_2 = 0$$

Отсюда

$$M_0 = T_1 \frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2, \qquad M_0^- = T_1 \frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)^2, \qquad M_0^+ = T_1 \frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)^2$$

Выбрав f_1 и f_2 так же, как в предыдущем примере, убедимся, что равенство (10.10) всегда выполняется.

14. Просматривая еще раз таблицу значений λ, можно заметить, что, выбрав для оболочки нулевой кривизны f_1 и f_2 так, чтобы узловые линии формы потери устойчивости проходили вдоль прямолинейных образующих, можем в некоторых случаях получить эффект двоякого рода. Это произойдет тогда, когда одновременно с равенствами

$$L_0^+ = L_0^- = 0 \tag{14.1}$$

выполнятся и равенства

$$M_0^+ = M_0^- = 0 \tag{14.2}$$

При этом, во-первых, вместо $\rho = 2$ получим $\rho = 0$ в силу (14.1), что приведет к увеличению λ, а, во-вторых, вместо $\chi = 2$ получим $\chi = 0$ в силу (14.2), что приведет к уменьшению λ.

Потеря устойчивости происходит при наибольшем λ, и возникает вопрос, не следует ли выбрать f_1, f_2 так, чтобы равенства (14.1) выполнялись не точно, а с известной степенью приближения.

Как пример рассмотрим цилиндрическую оболочку, скручиваемую сдвигающими усилиями. Докритическое состояние определится так:

$$T_1 = T_2 = 0, \qquad S_1 = -S_2 = S = \text{const} \neq 0$$

Отсюда

$$M_0^- = \frac{2S}{AB}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\right), \qquad M_0^+ = \frac{2S}{AB}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta} + \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\right)$$

Кроме того, имеем

$$L_0 = \frac{1}{A^2}\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)^2, \qquad L_0^+ = \frac{1}{A^2}\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)^2$$

Легко видеть, что, выбрав $f_2 = \text{const}$ и $f_1 = f_1(\beta)$, т. е., совместив узловые линии с прямолинейными образующими, получим $\rho = 0$, $\chi = 0$, так что λ будет равно единице. С другой стороны, выбрав

$$f_2 = \text{const}, \quad f_1 = f_1^1(\beta) + k^{-1} f_1^2(\alpha, \beta)$$

т. е. обеспечив малое отклонение узловых линий от прямолинейных образующих, получим

$$M_0^- = M_0^+ = k^{-1}\frac{2S}{AB}\frac{\partial f^2}{\partial\alpha}\frac{\partial f_1^1}{\partial\beta}, \qquad L_0^- = L_0^+ = k^{-2}\frac{1}{A^2}\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial f_1^2}{\partial\alpha}\right)^2$$

Отсюда $\rho = 0$, $\chi = 1$ и значение λ увеличится с 1 до $5/4$.

15. В предлагаемой работе выполнен анализ асимптотических свойств собственных значений в задачах теории оболочек, т. е. выявлены закономерности, которые вступают в силу, начиная с некоторого достаточно малого значения $(h/R)_0$ параметра h/R и проявляются тем ярче, чем меньше этот параметр. В разных задачах будет различен и порядок малости $(h/R)_0$. Он зависит от таких параметров задачи, как, например, длины оболочки, числа, характеризующего отношение радиусов кривизн, характеристики быстроты изменения от точки к точке коэффициентов уравнения (1.1) и т. д. Изложенные результаты имеют реальный смысл тогда, когда порядок величины $(h/R)_0$ не выходит за пределы значений, встречающихся на практике. Это значит, что перечисленные параметры должны иметь не слишком большие и не слишком малые значения.

В докторской диссертации (О равновесии тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. 1950 г.) Н. А. Алумяэ исследовал другими методами асимптотику критических нагрузок с учетом влияния некоторых из упоминавшихся параметров. В тех случаях, когда можно провести сравнение, результаты Н. А. Алумяэ совпадают с изложенными здесь. Предполагаемое исследование не претендует на полноту и в том смысле, что были исключены из рассмотрения случаи, когда коэффициенты уравнений (1.1) принимают бесконечные значения в интересующей нас области (это будет, например, в вершине конуса, на окружности, разделяющей в торе зоны положительной и отрицательной кривизны и т. д.). Напомним, кроме того, что были исключены из рассмотрения оболочки отрицательной кривизны и такие оболочки нулевой кривизны, у которых меняет знак отличная от нуля кривизна. Метод исследования основан на предположении, что параметр k велик. Поэтому существенным будет требование, чтобы показатель изменяемости τ был положительным. Переносить полученные результаты на случай $\tau = 0$ можно только по экстраполяции. В этом смысле условным является, например, утверждение (п. 12), что частота собственных колебаний для оболочек положительной кривизны остается соизмеримой $(h / R)^\circ$, пока $\tau < \tau_0 = 1/2$ (значение $\tau = 0$ сюда включается по экстраполяции).

Отметим, в заключение, что область применимости исходного уравнения (1.1) также определяется требованием, чтобы показатель изменяемости искомого напряженного и деформированного состояния был положительным. Поэтому нет смысла заменять (1.1) точными уравнениями, так как тогда становится непригоден и метод исследования.

Поступила 25 IV 1961 Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. ГИТТЛ, 1953.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, 1956.
3. Гольденвейзер А. Л. Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки. ПММ, 1945, т. XI, вып. 6.