Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ БЫСТРО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

Б. П. Демидович

(Москва)

Исследуется вопрос о существовании и свойствах ограниченных колебаний квазилинейной системы седлового типа при наличии быстро меняющейся внешней силы[1]. Полученные результаты обобщают теорему Фарнелля, Лангенхопа и Левинсона [1].

Приношу благодарность В. В. Немыцкому, в семинаре которого были доложены и обсуждены предварительные результаты этой работы.

§ 1. Линейная система с (α, β) свойством. Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Здесь x — действительный n-мерный вектор (матрица-столбец) и $P(t)$ — вещественная $n \times n$ матрица, определенная и непрерывная для всех значений t (при $-\infty < t < +\infty$).

Пусть $X(t)$ — каноническая фундаментальная матрица решений системы (1.1) такая, что $X(0) = I_n$, где I_n — единичная $n \times n$ матрица. Тогда

$$X(t, t_0) = X(t) X^{-1}(t_0) \qquad (-\infty < t < +\infty, \ -\infty < t_0 < +\infty) \tag{1.2}$$

есть фундаментальная система решений, определяемая начальным условием: $X(t_0, t_0) = I_n$ (матрица Коши).

Определение (*1.1*). Будем говорить, что система (1.1) (или матрица $P(t)$) обладает свойством (α, β), если ее матрица Коши $X(t, t_0)$ распадается на две подсистемы решений

$$X_\alpha(t, t_0) = X(t) A X^{-1}(t_0), \qquad X_\beta(t, t_0) = X(t) B X^{-1}(t_0) \tag{1.3}$$

такие, что

$$\|X_\alpha(t, t_0)\| \leqslant a e^{-\alpha(t-t_0)} \ \text{при}\ t \geqslant t_0, \qquad \|X_\beta(t, t_0)\| \leqslant b e^{\beta(t-t_0)} \ \text{при}\ t \leqslant t_0 \tag{1.4}$$

Здесь a, b, α, β — положительные числа; A и B — постоянные $n \times n$ матрицы, причем $A + B = I_n$;

$$\|X\| = \sum_{i,j} |x_{i,j}| \text{ — норма матрицы } X = [x_{ij}].$$

---

[1] Для простоты выкладок все рассматриваемые матрицы и функции будем считать действительными. Однако основные результаты статьи, с очевидными изменениями, будут справедливы также для систем дифференциальных уравнений, правые части которых непрерывные комплексные функции действительной независимой переменной t, аналитические относительно зависимых переменных, а сами решения — комплекснозначны.

Неравенства (1.4) представляют собой обобщение известных условий К. П. Персидского [2], которые получаются при $A = I_n$ и $B = 0$. Сходные двусторонние условия встречались также у А. Д. Майзеля [3]. Аналогичные условия для систем дифференциальных уравнений в банаховых пространствах имеются у М. Г. Крейна [4], Массера и Шеффера [5].

Заметим, что система (1.1) заведомо обладает свойством (α, β), если матрица $P(t) = P$ постоянна, причем $m\,(m \leqslant n)$ ее характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ имеют отрицательные вещественные части, а $n-m$ характеристических чисел $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ — положительные вещественные части. В этом случае

$$A = S\begin{bmatrix} I_m & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} S^{-1}, \qquad B = S\begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & I_{n-m} \end{bmatrix} S^{-1}$$

Здесь I_m и I_{n-m} — единичные матрицы порядков m и $n-m$, а S — неособенная матрица, приводящая матрицу P к форме Жордана; причем m-ранг матрицы $X_\alpha(t, t_0)$, а $n-m$-ранг матрицы $X_\beta(t, t_0)$.

В более общем случае свойство (α, β) имеет место, если система (1.1) приводима [6,7] к системе с постоянной матрицей, вещественные части характеристических чисел которой отличны от нуля. В частности, например, такой будет линейная однородная система с периодической матрицей $P(t)$, не имеющая нулевых и чисто мнимых характеристических показателей.

Отметим еще, что свойство (α, β) для системы (1.1) выполнено, если

$$P(t) = \Lambda(t) + Q(t)$$

где $\Lambda(t) = [\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)]$ — диагональная матрица и $Q(t)$ — абсолютно интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ (двусторонняя L-диагональная система [8,9]), причем

$$\lambda_1(t) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m(t) \leqslant -\alpha < 0 < \beta \leqslant \lambda_{m+1}(t) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(t)$$

Лемма 1.1 Пусть матрица $P(t)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, причем выполнено свойство (α, β). Тогда существует ограниченная $n \times n$ матрица $G(t, t_1) \in C^1$ при $t \neq t_1$ $(-\infty < t < +\infty;\ -\infty < t_1 < +\infty)$ такая, что

$$\begin{array}{ll} (1) & G(t, t-0) - G(t, t+0) = I_n \\ (2) & G'_t(t, t_1) = P(t)\,G(t, t_1) \quad \text{при } t \neq t_1 \\ & G'_{t_1}(t, t_1) = -G(t, t_1)\,P(t_1) \quad \text{при } t \neq t_1 \\ (3) & \|G(t, t_1)\| \leqslant ce^{-\gamma|t-t_1|} \quad (c,\ \gamma = \text{const} > 0) \end{array} \tag{1.5}$$

(4) Если сверх того $f(t)$ — вектор-функция типа $n \times 1$, непрерывная при $-\infty < t < +\infty$, то неоднородная система

$$\frac{dy}{dt} = P(t)\,y + f(t) \tag{1.6}$$

имеет ограниченное на $(-\infty, +\infty)$ решение

$$\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\,f(t_1)\,dt_1 \tag{1.7}$$

при условии, что интеграл (1.7) сходится равномерно по t на каждом конечном интервале $(-l, l) \subset (-\infty, +\infty)$ и ограничен на $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Положим

$$G(t, t_1) = \begin{cases} X_\alpha(t, t_1) \text{ при } t > t_1 \\ -X_\beta(t, t_1) \text{ при } t < t_1 \end{cases}$$

где матрицы $X_\alpha(t, t_0)$ и $X_\beta(t, t_0)$ определяются формулами (1.3).

Очевидно, имеем

1) $G(t, t-0) - G(t, t+0) = X(t) AX^{-1}(t) + X(t) BX^{-1}(t) =$
$= X(t)(A+B) X^{-1}(t) = X(t) I_n X^{-1}(t) = I_n$

2) Если $C = A$ при $t > t_1$ и $C = -B$ при $t < t_1$, то

$$G(t, t_1) = X(t) CX^{-1}(t_1) \tag{1.8}$$

и при $t \neq t_1$ имеем

$$G_t'(t, t_1) = X'(t) CX^{-1}(t_1) = P(t) X(t) CX^{-1}(t_1) = P(t) G(t, t_1)$$

$$G_{t_1}'(t, t_1) = -X(t) CX^{-1}(t_1) X'(t_1) X^{-1}(t_1) =$$
$$= -X(t) CX^{-1}(t_1) P(t_1) X(t_1) X^{-1}(t_1) = -G(t, t_1) P(t_1)$$

3) Используя неравенства (1.4), находим

$$\|G(t, t_1)\| \leqslant ae^{-\alpha(t-t_1)} \quad \text{при } t > t_1, \qquad \|G(t, t_1)\| \leqslant be^{\beta(t-t_1)} \quad \text{при } t < t_1,$$

Отсюда, полагая $c = \max(a, b)$ и $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, получим (1.5).

4) Рассмотрим вектор-функцию, определяемую формулой (1.7). Имеем

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t, t_1) f(t_1) dt_1 + \int_{t}^{+\infty} G(t, t_1) f(t_1) dt_1$$

Производя формальное дифференцирование последней формулы по t и учитывая условия 1 и 2, получим

$$\eta'(t) = G(t, t-0) f(t) + \int_{-\infty}^{t} P(t) G(t, t_1) f(t_1) dt_1 - G(t, t+0) f(t) +$$
$$+ \int_{t}^{+\infty} P(t) G(t, t_1) f(t_1) dt_1 = f(t) + P(t) \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1) f(t_1) dt_1 \tag{1.9}$$

Так как матрица $P(t)$ ограничена на каждом конечном промежутке $(-l, l)$ и предполагается, что интегралы

$$\int_{-\infty}^{t} G(t, t_1) f(t_1) dt_1, \qquad \int_{t}^{+\infty} G(t, t_1) f(t_1) dt_1$$

сходятся равномерно на $(-l, l)$, то очевидно, то интегралы

$$\int_{-\infty}^{t} G_t'(t, t_1) f(t_1) dt_1, \qquad \int_{t}^{+\infty} G_t'(t, t_1) f(t_1) dt_1$$

также сходятся равномерно на $(-l, l)$. Следовательно, в силу известной теоремы анализа, производная вектор-функции $\eta(t)$ при $-\infty < t < +\infty$ определяется формулой (1.9). Отсюда

$$\eta'(t) = f(t) + P(t) \eta(t)$$

т. е. $\eta(t)$ — ограниченное решение неоднородной системы (1.6).

Следствие. Ограниченное решение $\eta(t)$ неоднородной системы (1.6) заведомо существует, если: а) вектор-функция $f(t)$ непрерывна и ограничена на $(-\infty, +\infty)$; или б) матрица $P(t)$ и вектор-функция

$$F(t) = \int_0^t f(t_1)\,dt_1$$

непрерывны и ограничены на $(-\infty, +\infty)$ (при этом ограниченность вектор-функции $f(t)$ не предполагается).

Доказательство. а) Если $\| f(t) \| \leqslant k$ при $t \in (-\infty, +\infty)$, где k — положительная постоянная, то равномерная сходимость интеграла (1.7), на любом конечном промежутке, и его ограниченность очевидна.

б) Пусть $\| P(t) \| \leqslant c_1$ и $\| F(t) \| \leqslant c_2$, где c_1 и c_2 — положительные постоянные. Тогда, интегрируя по частям, будем иметь

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1) f(t_1)\,dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1) F'(t_1)\,dt_1 =$$

$$= G(t, t_1) F(t_1) \Big|_{t_1=-\infty}^{t_1=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} G'_{t_1}(t, t_1)\, F(t_1)\,dt_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1) P(t_1) F(t_1)\,dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(t, t_1) F(t_1)\,dt_1 \qquad (1.10)$$

Здесь

$$G_1(t, t_1) = G(t, t_1)\, P(t_1), \qquad \| G_1(t, t_1) \| \leqslant \| G(t, t_1) \|\, \| P(t_1) \| \leqslant c c_1 e^{-\gamma |t - t_1|}$$

Следовательно, интеграл (1.10) сходится равномерно по параметру t на каждом конечном интервале оси $-\infty < t < +\infty$.

Замечания. 1.1. Если $f(t)$ ограничена, то

$$\| \eta(t) \| \leqslant \Gamma \sup_t \| f(t) \| \qquad \left(\Gamma = \sup_t \int_{-\infty}^{+\infty} \| G(t, t_1) \|\, dt_1 \leqslant \frac{2c}{\gamma} \right)$$

1.2. Если $P(t)$ и $F(t)$ — ограничены, то в силу формулы (1.10), имеем

$$\| \eta(t) \| \leqslant \Gamma_1 \sup_t \| F(t) \| \qquad \left(\Gamma_1 = \sup_t \int_{-\infty}^{+\infty} \| G_1(t, t_1) \|\, dt_1 \right)$$

Лемма 1.2. Если матрица $P(t)$ и вектор-функция $f(t)$ почти периодические и $P(t)$ обладает свойством (α, β), причем однородная система (1.1) не имеет нетривиальных ограниченных на оси $-\infty < t < +\infty$ решений, то ограниченное решение $\eta(t)$ неоднородной системы (1.6) будет также почти периодическим.

Лемма представляет собой несколько измененную теорему Фавара [16].

Доказательство. Пусть τ — общий почти период матриц $P(t)$ и $f(t)$ с точностью до ε, т. е.

$$\begin{aligned} \| \Delta_\tau P(t) \| &= \| P(t+\tau) - P(t) \| < \varepsilon \\ \| \Delta_\tau f(t) \| &= \| f(t+\tau) - f(t) \| < \varepsilon \end{aligned} \qquad \text{при } -\infty < t < +\infty$$

Полагая $\Delta_\tau \eta(t) = \eta(t+\tau) - \eta(t)$, будем иметь

$$\frac{d}{dt}[\Delta_\tau \eta(t)] = P(t) \cdot \Delta_\tau \eta(t) + [\Delta_\tau P(t)\, \eta(t+\tau) + \Delta_\tau(t)]$$

Так как матрица $\Delta_\tau P(t)\cdot\eta(t+\tau)+\Delta_\tau f(t)$ ограничена и в силу условия леммы 1.2 неоднородная система с матрицей $P(t)$ и ограниченным свободным членом имеет лишь единственное ограниченное решение, то

$$\Delta_\tau \eta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\,[\Delta_\tau P(t_1)\cdot\eta(t_1+\tau)+\Delta_\tau f(t_1)]\,dt_1 .$$

Следовательно,

$$\|\Delta_\tau\eta(t)\|\leqslant \Gamma\varepsilon(M+1) \quad \text{при } -\infty<t<+\infty \qquad (M=\sup_t\|\eta(t)\|<+\infty)$$

и значит $\eta(t)$ — почти периодическая вектор-функция.

Замечание. Если в условии (1.4) $A=I_n$ и $B=0$, или $A=0$ и $B=I_n$, то однородная система (1.1) не имеет нетривиальных решений, ограниченных на $(-\infty, +\infty)$.

Действительно, если, например, $A=I_n$ и $B=0$, то $X(t, t_0)=X_a(t_1, t_0)$ и справедливость замечания легко вытекает из первого неравенства (1.4).

§ 2. Существование ограниченных решений квазилинейной системы. Пусть

$$\frac{dy}{dt}=P(t)\,y+f(\omega t, y, \mu)+e(\omega t) \tag{2.1}$$

где y — искомый $n\times 1$ вектор; μ — малый действительный параметр; ω — большой положительный параметр; $P(t)$ — матрица $n\times n$, непрерывная и ограниченная на $(-\infty, +\infty)$, обладающая (α, β) свойством; $f(t, y, \mu)$ — вектор-функция типа $n\times 1$, определенная и непрерывная в области $D=\{|t|<+\infty,\ \|y\|<+\infty,\ |\mu|<\Lambda\}$, удовлетворяющая в каждой подобласти $D_r=\{|t|<+\infty, \|y\|\leqslant r<+\infty, |\mu|\leqslant\mu_0<\Lambda\}$ условию Липшица

$$\|f(t, y, \mu)-f(t, z, \mu)\|\leqslant L(r, \mu_0)\,\|y-z\| \qquad (\|y\|\leqslant r,\ \|z\|\leqslant r) \tag{2.2}$$

где $L(r, \mu_0)$ — положительная скалярная функция, не зависящая от t, причем

$$\lim L(r, \mu_0)=0 \qquad \text{при } \mu_0\to 0 \tag{2.3}$$

и сверх того

$$\|f(t, 0, \mu)\|\leqslant k \qquad (k=\text{const}) \tag{2.4}$$

Наконец, в (2.1) непрерывная $n\times 1$ вектор-функция $e(t)$ предполагается с ограниченным на $(-\infty, +\infty)$ интегралом

$$E(t)=\int_0^t e(t_1)\,dt_1, \qquad \|E(t)\|\leqslant k_1 \qquad (k_1=\text{const}) \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. Существует положительная постоянная μ_0 такая, что при $|\mu|\leqslant\mu_0$ система (2.1) имеет по меньшей мере одно решение $\eta=\eta(t)$, ограниченное на всей оси $-\infty<t<+\infty$. (Если $e(t)$—ограничена, то ограниченности интеграла $E(t)$ не требуется.)

Этот результат аналогичен теореме Перрона [11]; однако предположения относительно правой части системы (2.1) более общие, в частности, не предполагается ее ограниченность по t.

Для случая постоянной матрицы $P(t)=\text{const}$ аналогичный результат был получен автором [12].

Доказательство. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\,[f(\omega t_1, y(t_1), \mu) + e(\omega t_1)]\,dt_1 \tag{2.6}$$

где $G(t, t_1)$ определяется на основании леммы 1.1 и удовлетворяет неравенству (1.5). В силу леммы 1.1 непрерывное ограниченное решение $\eta(t)$ интегрального уравнения (2.6) будет ограниченным решением системы(2.1).

Для доказательства существования решения $\eta(t)$ применим метод последовательных приближений, полагая

$$y^{(0)}(t) = 0$$

$$y^{(p)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\,[f(\omega t_1, y^{(p-1)}(t_1), \mu) + e(\omega t_1)]\,dt_1 \quad (p = 1, 2, \ldots) \tag{2.7}$$

Учитывая ограниченность функции $E(t)$, имеем

$$y^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\,f(\omega t_1, 0, \mu)\,dt_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\,e(\omega t_1)\,dt_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\,f(\omega t_1, 0, \mu)\,dt_1 + \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\frac{d}{dt_1}E(\omega t_1)\,dt_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\,f(\omega t_1, 0, \mu)\,dt_1 + \frac{1}{\omega}\,G(t, t_1)\,E(\omega t_1)\Big|_{t_1=-\infty}^{t_1=+\infty} -$$

$$- \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} G_{t_1}'(t, t_1)\,E(\omega t_1)\,dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\,f(\omega t_1, 0, \mu)\,dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\,P(t_1)\,E(\omega t_1)\,dt_1$$

Отсюда, используя оценки (2.4) и (2.5), получим

$$\|y^{(1)}(t)\| \leqslant \Gamma k + \frac{1}{\omega}\cdot\Gamma_1 k_1 = R \tag{2.8}$$

где

$$\Gamma = \sup_t \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, t_1)\|\,dt_1, \qquad \Gamma_1 = \sup_t \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, t_1)\,P(t_1)\|\,dt_1$$

Используя условие (2.3), выберем положительное число μ_0 столь малым, чтобы при $|\mu| \leqslant \mu_0$ было выполнено неравенство

$$L = L(2R, \mu_0) < \frac{1}{2\Gamma}$$

Применяя метод математической индукции, легко доказать, что все приближения $y^{(p)}(t)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют неравенству

$$\|y^{(p)}(t) - y^{(p-1)}(t)\| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} R$$

при $-\infty < t < +\infty$ и, следовательно,

$$\|y^{(p)}(t)\| \leqslant \sum_{q=1}^{p} \|y^{(q)}(t) - y^{(q-1)}(t)\| \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right)R < 2R$$

Обычным приемом доказывается, что существует

$$\eta(t) = \lim y^{(p)}(t) \qquad \text{при } p \to \infty \tag{2.9}$$

причем имеют место оценки

$$\|\eta(t) - y^{(p)}(t)\| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} R, \qquad \|\eta(t)\| \leqslant 2R \tag{2.10}$$

где R определяется формулой (2.8).

Из последнего неравенства следует, что

$$y^{(p)}(t) \rightrightarrows \eta(t) \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

Предельная функция $\eta(t)$ будет единственным[1] ограниченным непрерывным решением интегрального уравнения (2.6), а следовательно, и ограниченным решением квазилинейной системы (2.1).

Замечание. Ограниченное решение $\eta(t)$ квазилинейной системы (2.1), удовлетворяющее интегральному уравнению (2.6), будем называть регулярным.

Следствие. Если $f(t, 0, \mu) \equiv 0$, то при достаточно большом ω амплитуда регулярного ограниченного решения $\eta(t)$ сколь угодно мала.

Действительно, полагая $k = 0$, из формул (2.8) и (20.10) имеем

$$\|\eta(t)\| \leqslant \frac{2k_1\Gamma_1}{\omega} \tag{2.11}$$

Теорема 2.2 Пусть квазилинейная система (2.1) такова, что матрица $P(t)$, а также векторы-функции $f(t, y, \mu)$, $e(t)$ почти периодические по t и, сверх того, однородная система (1.1) с матрицей $P(t)$ не имеет ограниченных на оси $-\infty < t < +\infty$ нетривиальных решений. Тогда при $|\mu| \leqslant \mu_0$ ограниченное решение $\eta(t)$ квазилинейной системы (2.1) также почти периодическое.

Для случая постоянной матрицы $P(t) = \text{const}$ аналогичные теоремы были доказаны Г. И. Бирюк [13], автором [12] и Лангехопом [14].

Доказательство. В силу леммы 1.2 все последовательные приближения $y^{(p)}(t)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ для ограниченного решения $\eta(t)$ почти периодические. А так как

$$y^{(p)}(t) \rightrightarrows \eta(t) \qquad \text{на } (-\infty, +\infty)$$

то $\eta(t)$ также почти периодическая вектор-функция.

Замечание. Если $A = I_n$ и $B = 0$ или $A = 0$ и $B = I_n$, то требование отсутствия нетривиальных ограниченных решений однородной системы (1.1) становится излишним (см. § 1, замечание к лемме 1.2).

Следствие. Если матрица $P(t)$ периодическая с периодом T/ω и вектор-функции $f(t, y, \mu)$, $e(t)$ периодические по t с общим периодом T, то в условиях теоремы 2.2 ограниченное решение $\eta(t)$ квазилинейной системы (2.1) периодическое с периодом T/ω.

Если, сверх того, $f(t, 0, \mu) \equiv 0$, то

$$\|\eta(t)\| \leqslant \frac{2\Gamma_1}{\omega} \sup \left\| \int_0^t e(t_1)\, dt_1 \right\| \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{2.12}$$

---

[1] Единственность ограниченного решения $\eta(t)$ интегрального уравнения (2.6) легко доказать от противного.

Действительно, полагая

$$z(t) = \eta\left(t + \frac{T}{\omega}\right) - \eta(t)$$

и учитывая периодичность функции $f(t, y, \mu)$ будем иметь

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t_1)\left[f\left(\omega t_1, \eta\left(t_1 + \frac{T}{\omega}\right), \mu\right) - f(\omega t_1, \eta(t_1), \mu) \right] dt_1$$

Отсюда

$$\sup_t \| z(t) \| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \| G(t, t_1) \| L \left\| \eta\left(t_1 + \frac{T}{\omega}\right) - \eta(t_1) \right\| dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \Gamma \frac{1}{2\Gamma} \sup_t \left\| \eta\left(t_1 + \frac{T}{\omega}\right) - \eta(t_1) \right\| = \frac{1}{2} \sup_t \| z(t) \|$$

Следовательно,

$$\sup_t \| z(t) \| = \sup_t \left\| \eta\left(t + \frac{T}{\omega}\right) - \eta(t) \right\| = 0$$

т. е.

$$\eta\left(t + \frac{T}{\omega}\right) \equiv \eta(t) \qquad \text{при } -\infty < t < +\infty$$

и значит ограниченное решение $\eta(t)$ будет периодическим с периодом T/ω.

Что касается неравенства (2.12), то оно непосредственно вытекает из формулы (2.11).

Замечание. В работе [1] рассматривалась система вида (2.1) (без параметра μ) в предположениях: 1) матрица $P(t) = \text{const}$; 2) функции $f(t, y)$, $e(t) = ke_0(t)$ $(k > 0)$ и $E(t)$ — периодические по t с периодом $T = 1$; 3) $\| f(t, y) - f(t, z) \| \leqslant L \| y - z \|$, где L — достаточно малая положительная постоянная; 4) $f(t, 0) \equiv 0$. При $\omega \geqslant \omega_0$ гарантировалось существование периодического решения $y = p(t)$ периода $1/\omega$ и такого, что

$$\| p(t) \| \leqslant \frac{k\rho}{1 + \omega}$$

где ρ — положительная постоянная, не зависящая от параметра k. Теорема 2.2 усиливает этот результат.

§ 3. Устойчивость регулярного ограниченного решения квазилинейной системы.

Теорема 3.1. Пусть матрица $P(t)$ обладает свойством (α, β) и такова, что ранг $X_\alpha(t_0, t_0)$ равен m $(m \leqslant n)$, где t_0 — фиксировано. Тогда при $|\mu| \leqslant \mu_1$ регулярное ограниченное решение $\eta(t)$ квазилинейной системы (2.1) асимптотически условно устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$ на многообразии S_m^+ решений $y(t)$, зависящем от m параметров, причем устойчивость экспоненциального типа; а именно, если

$$\| \eta(t) \| \leqslant 2R, \qquad y(t) \in S_m^+, \qquad \| y(t_0) - \eta(t_0) \| \leqslant \rho(t_0)$$

где $\rho(t_0)$ — достаточно малая положительная постоянная, то

$$\| y(t) - \eta(t) \| \leqslant \frac{R}{\rho(t_0)} \| y(t_0) - \eta(t_0) \| e^{-1/2\gamma(t - t_0)} \quad \text{при } t \geqslant t_0 \tag{3.1}$$

где γ определяется из формулы (1.5).

Замечание. Для случая $P(t) = \text{const}$ аналогичные результаты имеются у И. Г. Петровского [15], Э. А. Коддингтона и Н. Левинсона [16], и автора [12].

Доказательство. Положим $\Delta \equiv \Delta(t) = y(t) - \eta(t)$. Из системы (2.1) имеем

$$\frac{d\Delta}{dt} = P(t)\,\Delta(t) + \varphi(t, \Delta(t)) \tag{3.2}$$

где

$$\varphi(t, \Delta(t)) = f(\omega t, \eta(t) + \Delta(t), \mu) - f(\omega t, \eta(t), \mu) \tag{3.3}$$

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\Delta(t) = X_\alpha(t, t_0)\,g + \int_{t_0}^{+\infty} G(t, t_1)\,\varphi(t_1, \Delta(t_1))\,dt_1 \tag{3.4}$$

где g — постоянный $n\times 1$ вектор. Если $\Delta(t)$ непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая уравнению (3.4), то дифференцируя равенство (3.4) по t и учитывая свойства матриц $X_\alpha(t, t_0)$ и $G(t, t_1)$, при $t > t_0$ имеем

$$\Delta'(t) = P(t)\,X_\alpha(t, t_0)\,g + [G(t, t-0) - G(t, t+0)]\,\varphi(t, \Delta(t)) +$$
$$+ P(t)\int_{t_0}^{+\infty} G(t, t_1)\,\varphi(t_1, \Delta(t_1))\,dt_1 \equiv P(t)\,\Delta(t) + \varphi(t, \Delta(t))$$

Таким образом, решение $\Delta(t)$ интегрального уравнения (3.4) будет также решением дифференциального уравнения (3.2).

Выберем положительное число μ_1 столь малым, чтобы при $|\mu| \leqslant \mu_1$ имело место неравенство

$$L_1 = L(3R, \mu_1) \leqslant \min\left(\frac{1}{2\Gamma}, \frac{\gamma q}{3c}\right) \qquad (0<q<1) \tag{3.5}$$

Далее подчиним норму вектора g неравенству

$$\|g\| \leqslant \frac{R_1}{a} \qquad (R_1 \leqslant R(1-q)) \tag{3.6}$$

и пусть

$$r = a\,\|g\| \tag{3.7}$$

Для нахождения решения интегрального уравнения (3.4) в классе функций $\{\|\Delta(t)\| \leqslant R$ при $t_0 \leqslant t < +\infty\}$, при условиях (3.5) и (3.6), применим метод последовательных приближений, полагая

$$\Delta^{(0)}(t) = X_\alpha(t, t_0)\,g$$
$$\Delta^{(s)}(t) = \Delta^{(0)}(t) + \int_{t_0}^{+\infty} G(t, t_1)\,\varphi(t_1, \Delta^{(s-1)}(t_1))\,dt_1 \tag{3.8}$$

где $t \geqslant t_0$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Так как

$$\|\Delta^{(0)}(t)\| \leqslant a\,\|g\|\,e^{-\gamma(t-t_0)} \leqslant re^{-\frac{1}{2}\gamma(t-t_0)}$$
$$\|\varphi(t, \Delta^{(0)}(t)\| \leqslant L_1\|\Delta^{(0)}(t)\| \leqslant \frac{\gamma q}{3c}\,re^{-\frac{1}{2}\gamma(t-t_0)}$$

то используя свойства матрицы $G(t, t_1)$, на основании формул (3.8) и (3.5), имеем

$$\|\Delta^{(1)}(t)\| \leqslant \|\Delta^{(0)}(t)\| + \int_{t_0}^{+\infty} ce^{-\gamma|t-t_1|}\,\frac{\gamma q}{3c}\,re^{-\frac{1}{2}\gamma(t_1-t_0)}\,dt_1 \leqslant re^{-\frac{1}{2}\gamma(t-t_0)} + \frac{\gamma q}{3}\,rJ(t)$$

где

$$J(t) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\gamma|t-t_1|}e^{-\frac{1}{2}\gamma(t_1-t_0)}dt_1 < \frac{3}{\gamma}\,e^{-\frac{1}{2}\gamma(t-t_0)}$$

Поэтому

$$\| \Delta^{(1)}(t) \| < r(1+q)\, e^{-{}^1\!/_2\gamma(t-t_0)}$$

Вообще, если

$$\| \Delta^{(s-1)}(t) \| < r(1+q+\ldots+q^{s-1})\, e^{-{}^1\!/_2\gamma(t-t_0)} \tag{3.9}$$

то из формул (3.8) и (3.5) получаем

$$\| \Delta^{(s)}(t) \| \leqslant \| \Delta^{(0)}(t) \| + \int_{t_0}^{+\infty} c e^{-\gamma|t-t_1|} \frac{\gamma q}{3c} r(1+q+\ldots+q^{s-1})\, e^{-{}^1\!/_2\gamma(t_1-t_0)} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant r e^{-{}^1\!/_2\gamma(t-t_0)} + \frac{\gamma r}{3}(q+q^2+\ldots+q^s)\, J(t) <$$

$$< r(1+q+\ldots+q^s)\, e^{-{}^1\!/_2\gamma(t-t_0)}$$

Следовательно, для любого натурального s справедливо неравенство

$$\| \Delta^{(s)}(t) \| < \frac{r}{1-q} e^{-{}^1\!/_2\gamma(t-t_0)} \leqslant R e^{-{}^1\!/_2\gamma(t-t_0)} \tag{3.10}$$

Далее, так как $\| \eta(t) + \Delta^{(s)}(t) \| \leqslant 3R$, то имеем

$$\sup_t \| \Delta^{(s+1)}(t) - \Delta^{(s)}(t) \| \leqslant \sup_t \int_{t_0}^{+\infty} \| G(t, t_1) \| \times$$

$$\times \| f(\omega t_1, \eta(t_1) + \Delta^{(s)}(t_1)\, \mu) - f(\omega t_1, \eta(t_1) + \Delta^{(s-1)}(t_1), \mu) \| dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sup_t \| \Delta^{(s)}(t) - \Delta^{(s-1)}(t) \| \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

Отсюда, так же как при доказательстве теоремы 2.1, получаем, что

$$\Delta^{(s)} \rightrightarrows \Delta(t) \text{ на } (-\infty, +\infty)$$

Предельная вектор-функция $\Delta(t)$ будет удовлетворять интегральному уравнению (3.4), а следовательно, и дифференциальному уравнению (3.2). Так как $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то из вида уравнения (3.2) следует, что $y(t) = \eta(t) + \Delta(t)$ также будет решением уравнения (2.1).

Переходя к пределу при $s \to \infty$ в (3.10), получим

$$\| \Delta(t) \| = \| y(t) - \eta(t) \| \leqslant \frac{r}{1-q} e^{-{}^1\!/_2\gamma(t-t_0)} = \frac{a}{1-q} \| g \| e^{-{}^1\!/_2\gamma(t-t_0)} \text{ при } t \geqslant t_0 \tag{3.11}$$

Ввиду того что ранг матрицы $X_\alpha(t, t_0)$ равен m и $\varphi(t, \Delta(t))$ сколь угодно мала по норме, если величина $\| g \|$ достаточно мала, то из теории неявных функций вытекает, что при $\| g \| \leqslant g_0$ существует многообразие $S_m^{+(0)}$ начальных значений $\Delta(t_0)$ и соответствующее многообразие векторов-функций g, зависящие от m параметров $h_1, \ldots, h_m$, такие, что

$$\| g \| \leqslant K(t_0) \, \| \Delta(t_0)$$

Здесь $K(t_0)$ — некоторая положительная функция. Множество решений $y(t) = \eta(t) + \Delta(t)$, где $\Delta(t_0) \in S_m^{+(0)}$ обозначим через S_m^{+}. Из формулы (3.11) при $y(t)\in S_m^+$ будем иметь

$$\|y(t)-\eta(t)\|\leqslant\frac{a}{1-q}K(t_0)\|y(t_0)-\eta(t_0)\|e^{-1/2\gamma(t-t_0)}\qquad \text{при } t\geqslant t_0$$

если только

$$\|y(t_0)-\eta(t_0)\|\leqslant\frac{R}{a_1K(t_0)}=\rho(t_0),\qquad a_1=\max\left(\frac{a}{1-q},\ \frac{R_:}{g_0}\right)$$

Следовательно,

$$\|y(t)-\eta(t)\|\leqslant\frac{R}{\rho(t_0)}\|y(t_0)-\eta(t_0)\|e^{-1/2\gamma(t-t_0)}\tag{3.12}$$

Следствие 3.1. Если p ранг матрицы $X_\beta(t_0, t_0)$, то регулярное ограниченное решение $\eta(t)$ квазилинейной системы (2.1) условно асимптотически устойчиво при $t\to-\infty$ на многообразии решений S_p^-, зависящем от p параметров, причем устойчивость экспоненциального типа.

Следствие 3.2. Если m ранг матрицы $X_\alpha(t_0, t_0)$ равен порядку системы (1.1), то регулярное ограниченное решение $\eta(t)$ квазилинейной системы (2.1) экспоненциально устойчиво по Ляпунову при $t\to+\infty$ (ср. [1]).

Поступила 2 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Farnell A. B., Langenhop C. E., Levinson N. Forced periodic solutions of a stable non-linear system of differential equations, Journ. of Math. and Phys., 1950, XXIX, № 1, 300—302.
2. Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. Физ.-матем. об-ва при Казанском гос. ун-те, 1936—1937, т. VIII.
3. Майзель А. Д. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений. Тр. Уральск. политехн. ин-та, № 5, Математика, 1954.
4. Крейн М. Г. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости. Успехи математ. наук, 1948, т. 111, 3(25), 166—169.
5. Massera J. L., Schäffer J. J. Linear differential equations and functional analysis, I, Ann. of math., 1958, 67, No. 3, 517—573.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
7. Еругин Н. П., Приводимые системы. Тр. Матем. ин-та им В. А. Стеклова, 1946, т. XIII.
8. Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations, Duke math. J., 1948, t. 15.
9. Раппопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев. Изд-во АН УССР, 1954.
10. Favard J. Sur les équations différentielles á coefficients presque périodiques, Acta math., 1927, 51, 31—81.
11. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Zeit., 1930, 32, 703—728.
12. Демидович Б. П., Об ограниченных решениях некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Матем. сб., 1956, т. 40 (82), 1, 73—94.
13. Бирюк Г. И. Об одной теореме существования почти периодических решений некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром. ДАН СССР, 1954, т. 96, № 1, 5—7.
14. Langenhop C. E. Note on almost periodic solutions of nonlinear differential equations. J. Math. and Phys., 1959, 38, № 2, 126—129.
15. Петровский И. Г. О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки. Матем. сб., 1934, 41 : 1, 107—156.
16. Коддингтон Э. А. и Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИИЛ, 1958, гл. XIII.