Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

# К ТЕОРИИ СИСТЕМ С АЛЬТЕРНИРОВАНИЕМ

Я. Н. Ройтенберг
(Москва)

Системами с альтернированием будем называть динамические системы, условия функционирования которых периодически изменяются, так что на некотором интервале времени $0 < t < \tau_1$ структура системы и приложенные к ней силы имеют один вид, а на следующем интервале времени $\tau_1 < t < \tau$ — другой вид. Процесс чередования этих условий повторяется с периодом $\tau = \mathrm{const}$, называемым периодом альтернирования.

К системам с альтернированием относятся импульсные системы, системы прерывистого регулирования, электрические системы с выпрямителями и электромагнитными аппаратами с насыщением и др. [1-4].

Каждому из интервалов, на которые делится период альтернирования, соответствует некоторая система дифференциальных уравнений, в общем случае с переменными коэффициентами, изменяющимися как в течение одного периода альтернирования, так и от одного периода к другому. При помощи этих систем уравнений можно построить систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, справедливую для любого момента времени. Однако во многих задачах предпочтительным является рассмотрение указанных выше чередующихся систем дифференциальных уравнений, так как коэффициенты этих уравнений обычно имеют более удобное для изучения строение.

**1. Уравнения движения.** Для изучения систем с альтернированием целесообразно перейти от чередующихся систем дифференциальных уравнений к системе разностных уравнений, которую можно получить следующим образом.

Начнем рассмотрение движения с некоторого момента времени $n\tau + \varepsilon$, где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \tau_1$, а $n$ — произвольное целое число. В течение интервала времени $n\tau + \varepsilon < t < n\tau + \tau_1$ движение описывается системой линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{z}_j + \sum_{k=1}^{r} b_{jk}(t)\, z_k = x_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.1}$$

Здесь $z_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ — фазовые координаты системы, $x_j(t)$ — заданные внешние силы. Систему скалярных уравнений (1.1) можно заменить матричным уравнением

$$\dot{z} + b(t)\, z = x(t) \tag{1.2}$$
$$(z = \| z_j \|,\ b(t) = \| b_{jk}(t) \|,\quad x(t) = \| x_j(t) \|)$$

Решение матричного уравнения (1.2) имеет следующий вид

$$z(t) = L(t, n\tau + \varepsilon)\, z(n\tau + \varepsilon) + \int_{n\tau+\varepsilon}^{t} L(t, \xi)\, x(\xi)\, d\xi \tag{1.3}$$
$$(L(t, \xi) = \sigma(t)\, \sigma^{-1}(\xi))$$

Здесь $\sigma(t)$ — фундаментальная матрица для однородного матричного уравнения, получаемого из (1.2) при $x(t) \equiv 0$. Через $\sigma^{-1}(t)$ обозначена обратная матрица. Функция $L(t, \xi) = \| L_{jk}(t, \xi) \|$ представляет собой матричную функцию веса для системы дифференциальных уравнений (1.1).

Элементы матрицы $z(t)$, согласно (1.3), имеют вид

$$z_\mu(t) = \sum_{k=1}^{r} L_{\mu k}(t, n\tau + \varepsilon)\, z_k(n\tau + \varepsilon) + \int_{n\tau+\varepsilon}^{t} \sum_{k=1}^{r} L_{\mu k}(t, \xi)\, x_k(\xi)\, d\xi$$

$$(\mu = 1, \ldots, r) \tag{1.4}$$

В момент времени $t = n\tau + \tau_1$ фазовые координаты $z_\mu$ будут

$$z_\mu(n\tau + \tau_1) = \sum_{k=1}^{r} L_{\mu k}(n\tau + \tau_1, n\tau + \varepsilon)\, z_k(n\tau + \varepsilon) +$$

$$+ \int_{n\tau+\varepsilon}^{n\tau+\tau_1} \sum_{k=1}^{r} L_{\mu k}(n\tau + \tau_1, \xi)\, x_k(\xi)\, d\xi \quad (\mu = 1, \ldots, r) \tag{1.5}$$

На следующем интервале времени $n\tau + \tau_1 < t < (n + 1)\tau$ движение системы будет описываться дифференциальными уравнениями

$$\dot{z}_j + \sum_{k=1}^{r} c_{jk}(t)\, z_k = s_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.6}$$

Система скалярных уравнений (1.6) эквивалентна матричному уравнению

$$\dot{z} + c(t)\, z = s(t), \qquad (c(t) = \| c_{jk}(t) \|, \; s(t) = \| s_j(t) \|) \tag{1.7}$$

Матричное дифференциальное уравнение (1.7) имеет решение:

$$z(t) = M(t, n\tau + \tau_1)\, z(n\tau + \tau_1) + \int_{n\tau+\tau_1}^{t} M(t, \xi)\, s(\xi)\, d\xi \tag{1.8}$$

Здесь $M(t, \xi) = \| M_{jk}(t, \xi) \|$ — матричная функция веса системы (1.6).

Элементы матрицы $z(t)$, согласно (1.8), будут

$$z_j(t) = \sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu}(t, n\tau + \tau_1)\, z_\mu(n\tau + \tau_1) + \int_{n\tau+\tau_1}^{t} \sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu}(t, \xi)\, s_\mu(\xi)\, d\xi$$

$$(j = 1, \ldots, r) \tag{1.9}$$

В конце рассматриваемого интервала, т. е. в момент времени $t = n\tau + \tau$, фазовые координаты системы примут следующие значения:

$$z_j((n + 1)\tau) = \sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu}((n + 1)\tau, n\tau + \tau_1)\, z_\mu(n\tau + \tau_1) +$$

$$+ \int_{n\tau+\tau_1}^{(n+1)\tau} \sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu}((n + 1)\tau, \xi)\, s_\mu(\xi)\, d\xi \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.10}$$

Подставляя равенства в (1.10) значения $z_\mu(n\tau + \tau_1)$ из (1.5), приведем эти соотношения к следующему виду:

$$z_j((n+1)\tau) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu}((n+1)\tau, n\tau+\tau_1) L_{\mu k}(n\tau+\tau_1, n\tau+\varepsilon) z_k(n\tau+\varepsilon) +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu}((n+1)\tau, n\tau+\tau_1) \int_{n\tau+\varepsilon}^{n\tau+\tau_1} \sum_{k=1}^{r} L_{\mu k}(n\tau+\tau_1, \xi) x_k(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_{n\tau+\tau_1}^{(n+1)\tau} \sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu}((n+1)\tau, \xi) s_\mu(\xi)\, d\xi \qquad (j = 1, \ldots, r) \qquad (1.11)$$

На интервале времени $(n+1)\tau < t < (n+1)\tau + \varepsilon$, заканчивающемся в момент времени $(n+1)\tau + \varepsilon$, отстоящий от начального момента времени $n\tau + \varepsilon$ на один период альтернирования, будет иметь место система дифференциальных уравнений (1.1). Фазовые координаты системы в соответствии с (1.4) будут изменяться по следующему закону

$$z_\nu(t) = \sum_{j=1}^{r} L_{\nu j}(t, (n+1)\tau) z_j((n+1)\tau) + \int_{(n+1)\tau}^{t} \sum_{j=1}^{r} L_{\nu j}(t, \xi) x_j(\xi)\, d\xi$$
$$(\nu = 1, \ldots, r) \qquad (1.12)$$

В момент времени $t = (n+1)\tau + \varepsilon$ фазовые координаты $z_\nu$ примут следующие значения:

$$z_\nu((n+1)\tau+\varepsilon) = \sum_{j=1}^{r} L_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, (n+1)\tau) z_j((n+1)\tau) +$$
$$+ \int_{(n+1)\tau}^{(n+1)\tau+\varepsilon} \sum_{j=1}^{r} L_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, \xi) x_j(\xi)\, d\xi \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \quad (1.13)$$

Подставляя значения $z_j((n+1)\tau)$ из (1.11), можно привести соотношения (1.13) к виду

$$z_\nu((n+1)\tau+\varepsilon) + \sum_{k=1}^{r} a_{\nu k}^*(n\tau+\varepsilon) z_k(n\tau+\varepsilon) = X_\nu^*(n\tau+\varepsilon)$$
$$(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \tau_1 \qquad \nu = 1, \ldots, r) \qquad (1.14)$$

где

$$a_{\nu k}^*(n\tau+\varepsilon) = -\sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} L_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, (n+1)\tau) M_{j\mu}((n+1)\tau, n\tau+\tau_1) \times$$
$$\times L_{\mu k}(n\tau+\tau_1, n\tau+\varepsilon) \qquad (1.15)$$

$$X_\nu^*(n\tau+\varepsilon) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} L_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, (n+1)\tau) M_{j\mu}((n+1)\tau, n\tau+\tau_1) \times$$
$$\times \int_{n\tau+\varepsilon}^{n\tau+\tau_1} \sum_{k=1}^{r} L_{\mu k}(n\tau+\tau_1, \xi) x_k(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^{r} L_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, (n+1)\tau) \int_{n\tau+\tau_1}^{(n+1)\tau} \sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu}((n+1)\tau, \xi) s_\mu(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_{(n+1)\tau}^{(n+1)\tau+\varepsilon} \sum_{j=1}^{r} L_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, \xi) x_j(\xi)\, d\xi \qquad (1.16)$$

Перейдем теперь к получению соотношений, аналогичных соотношениям (1.14), для значений $\varepsilon$ на интервале $\tau_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \tau$.

На интервале времени $n\tau + \varepsilon < t < (n+1)\tau$ будет иметь место система дифференциальных уравнений (1.6). В соответствии с (1.9) фазовые координаты $z_\mu$ будут изменяться по закону

$$z_\mu(t) = \sum_{k=1}^{r} M_{\mu k}(t, n\tau+\varepsilon)\, z_k(n\tau+\varepsilon) + \int_{n\tau+\varepsilon}^{t} \sum_{k=1}^{r} M_{\mu k}(t, \xi)\, s_\mu(\xi)\, d\xi$$
$$(\mu = 1, \ldots, r) \qquad (1.17)$$

В момент времени $t = (n+1)\tau$ функции $z_\mu(t)$ принимают значения

$$z_\mu((n+1)\tau) = \sum_{k=1}^{r} M_{\mu k}((n+1)\tau, n\tau+\varepsilon)\, z_k(n\tau+\varepsilon) + \\ + \int_{n\tau+\varepsilon}^{(n+1)\tau} \sum_{k=1}^{r} M_{\mu k}((n+1)\tau, \xi)\, s_\mu(\xi)\, d\xi \qquad (\mu = 1, \ldots, r) \qquad (1.18)$$

На следующем интервале времени $(n+1)\tau < t < (n+1)\tau + \tau$ имеет место система дифференциальных уравнений (1.1) и изменение фазовых координат в соответствии с (1.4) будет происходить по закону

$$z_j(t) = \sum_{\mu=1}^{r} L_{j\mu}(t, (n+1)\tau)\, z_\mu((n+1)\tau) + \int_{(n+1)\tau}^{t} \sum_{\mu=1}^{r} L_{j\mu}(t, \xi)\, x_\mu(\xi)\, d\xi$$
$$(j = 1, \ldots, r) \qquad (1.19)$$

В момент времени $t = (n+1)\tau + \tau_1$ значения фазовых координат согласно (1.19) и (1.18) будут

$$z_j((n+1)\tau + \tau_1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{r} L_{j\mu}((n+1)\tau+\tau_1, (n+1)\tau)\, M_{\mu k}((n+1)\tau, n\tau+\varepsilon) z_k(n\tau+\varepsilon) + \\ + \sum_{\mu=1}^{r} L_{j\mu}((n+1)\tau+\tau_1, (n+1)\tau) \int_{n\tau+\varepsilon}^{(n+1)\tau} \sum_{k=1}^{r} M_{\mu k}((n+1)\tau, \xi)\, s_k(\xi) d\xi + \\ + \int_{(n+1)\tau}^{(n+1)\tau+\tau_1} \sum_{\mu=1}^{r} L_{j\mu}((n+1)\tau+\tau_1, \xi)\, x_\mu(\xi)\, d\xi \qquad (j = 1, \ldots, r) \; (1.20)$$

На интервале времени $(n+1)\tau + \tau_1 < t < (n+1)\tau + \varepsilon$ будет иметь место система дифференциальных уравнений (1.6), и закон изменения фазовых координат в соответствии с (1.9) будет следующим:

$$z_\nu(t) = \sum_{j=1}^{r} M_{\nu j}(t, (n+1)\tau+\tau_1)\, z_j((n+1)\tau+\tau_1) + \\ + \int_{(n+1)\tau+\tau_1}^{t} \sum_{j=1}^{r} M_{\nu j}(t, \xi)\, s_j(\xi)\, d\xi \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \qquad (1.21)$$

В момент времени $t = (n+1)\tau + \varepsilon$ значения функций $z_\nu(t)$ будут

$$z_\nu((n+1)\tau+\varepsilon) = \sum_{j=1}^{r} M_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, (n+1)\tau+\tau_1)\, z_j((n+1)\tau+\tau_1) + \int\limits_{(n+1)\tau+\tau_1}^{(n+1)\tau+\varepsilon} \sum_{j=1}^{r} M_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, \xi)\, s_j(\xi)\, d\xi \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{1.22}$$

Подставляя значения $z_j((n+1)\tau+\tau_1)$ из (1.20), приведем соотношения (1.22) к виду

$$z_\nu((n+1)\tau+\varepsilon) + \sum_{k=1}^{r} a_{\nu k}^{**}(n\tau+\varepsilon)\, z_k(n\tau+\varepsilon) = X_\nu^{**}(n\tau+\varepsilon) \tag{1.23}$$

$$(\tau_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \tau, \ \nu = 1, \ldots, r)$$

Здесь

$$a_{\nu k}^{**}(n\tau+\varepsilon) = -\sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, (n+1)\tau+\tau_1) \times L_{j\mu}((n+1)\tau+\tau_1, (n+1)\tau)\, M_{\mu k}((n+1)\tau, n\tau+\varepsilon) \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned} X_\nu^{**}(n\tau+\varepsilon) = {} & \sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, (n+1)\tau+\tau_1) \times \\ & \times L_{j\mu}((n+1)\tau+\tau_1, (n+1)\tau) \int\limits_{n\tau+\varepsilon}^{(n+1)\tau} \sum_{k=1}^{r} M_{\mu k}((n+1)\tau, \xi)\, s_k(\xi) d\xi + \\ & + \sum_{j=1}^{r} M_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, (n+1)\tau+\tau_1) \int\limits_{(n+1)\tau}^{(n+1)\tau+\tau_1} \sum_{\mu=1}^{r} L_{j\mu}((n+1)\tau+\tau_1, \xi) \times \\ & \times x_\mu(\xi)\, d\xi + \int\limits_{(n+1)\tau+\tau_1}^{(n+1)\tau+\varepsilon} \sum_{j=1}^{r} M_{\nu j}((n+1)\tau+\varepsilon, \xi)\, s_j(\xi)\, d\xi \end{aligned} \tag{1.25}$$

Таким образом, в соответствии с (1.14) и (1.23) при значениях $\varepsilon$, лежащих на интервале $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \tau$, равном одному периоду альтернирования, имеют место следующие соотношения:

$$z_\nu((n+1)\tau+\varepsilon) + \sum_{k=1}^{r} a_{\nu k}(n\tau+\varepsilon)\, z_k(n\tau+\varepsilon) = X_\nu(n\tau+\varepsilon) \tag{1.26}$$

$$(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \tau, \ \nu = 1, \ldots, r)$$

Здесь

$$a_{\nu k}(n\tau+\varepsilon) = a_{\nu k}^{*}(n\tau+\varepsilon)\, 1(\tau_{1+} - \varepsilon) + a_{\nu k}^{**}(n\tau+\varepsilon)\, 1(\varepsilon - \tau_1 +) \tag{1.27}$$

$$X_\nu(n\tau+\varepsilon) = X_\nu^{*}(n\tau+\varepsilon)\, 1(\tau_1 + -\varepsilon) + X_\nu^{**}(n\tau+\varepsilon)\, 1(\varepsilon - \tau_1 +) \tag{1.28}$$

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Соотношения (1.26) связывают между собой значения функций $z_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ в моменты времени $n\tau+\varepsilon$ и $(n+1)\tau+\varepsilon$, отличающиеся между собой на величину одного периода альтернирования. Здесь $n$ –

любое целое число, а величина $\varepsilon$ может принимать любое значение из интервала $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \tau$.

Соотношения (1.26) справедливы для любого значения аргумента

$$t = \vartheta\tau + \varepsilon \qquad \left(\vartheta = \left[\frac{t}{\tau}\right]\right) \tag{1.29}$$

где через $\vartheta$ обозначена целая часть $t/\tau$; поэтому эти соотношения можно переписать так:

$$z_\nu (t + \tau) + \sum_{k=1}^{r} a_{\nu k} (t)\, z_k (t) = X_\nu (t) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{1.30}$$

Соотношения (1.30) представляют собой разностные уравнения, описывающие движение рассматриваемой здесь системы с альтернированием.

При решении системы разностных уравнений (1.30) необходимо задать закон, по которому изменяются искомые функции $z_j (t)$ на интервале времени $0 < t < \tau$. Полагая в выражениях (1.4) и (1.9) $n = \varepsilon = 0$, найдем, что на интервале времени $0 < t < \tau$

$$z (t) = z^* (t) \tag{1.31}$$

где $z^* (t)$ — матрица, элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} z_j^* (t) = \Bigg\{\sum_{k=1}^{r} \Bigg[L_{jk} (t, 0)\, 1 (\tau_{1_+} - t) + \sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu} (t,\tau_1) L_{\mu k} (\tau_1,0) \times \\ \times 1 (t - \tau_{1_+})\Bigg] z_k (0) + \int_0^t \sum_{k=1}^{r} L_{jk} (t, \xi)\, x_k (\xi)\, d\xi 1 (\tau_{1_+} - t) + \\ + \Bigg[\sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu} (t, \tau_1) \int_0^{\tau_1} \sum_{k=1}^{r} L_{\mu k} (\tau_1, \xi)\, x_k (\xi)\, d\xi + \\ + \int_{\tau_1}^{t} \sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu} (t, \xi)\, s_\mu (\xi)\, d\xi\Bigg] 1 (t - \tau_{1+})\Bigg\} 1 (\tau - t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \end{aligned} \tag{1.32}$$

**2. Решение системы линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами.** Система скалярных разностных уравнений (1.30) эквивалентна матричному уравнению

$$\begin{gathered} z (t + \tau) + a (t)\, z (t) = X (t) \\ (a (t) = \| a_{\nu k} (t) \|, \; X (t) = \| X_\nu (t) \|) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Обозначим через $\theta (t)$ фундаментальную матрицу для однородного матричного уравнения

$$z (t + \tau) + a (t)\, z (t) = 0$$

Столбцы матрицы $\theta (t)$ будут линейно независимыми частными решениями этого уравнения; матрица $\theta (t)$ поэтому удовлетворяет уравнению

$$\theta (t + \tau) + a (t)\, \theta (t) = 0 \tag{2.2}$$

Общее решение уравнения (2.1) можно получить при помощи метода вариации произвольных постоянных, для чего положим

$$z (t) = \theta (t)\, \chi (t) \tag{2.3}$$

где $\chi(t)$ — матрица-столбец, подлежащая определению. Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.1), получим

$$\theta(t+\tau)\chi(t+\tau)+a(t)\theta(t)\chi(t)=X(t)$$

или

$$\theta(t+\tau)[\chi(t)+\chi(t+\tau)-\chi(t)]+a(t)\theta(t)\chi(t)=X(t) \quad (2.4)$$

Учитывая соотношение (2.2), можно привести уравнение (2.4) к виду

$$\theta(t+\tau)\Delta\chi(t)=X(t), \quad \text{или} \quad \Delta\chi(t)=\theta^{-1}(t+\tau)X(t), \quad (2.5)$$

где $\theta^{-1}(t)$ обратная матрица для матрицы $\theta(t)$. Из (2.5) следует [5], что

$$\chi(t)=\sum_{i=1}^{\vartheta}\theta^{-1}(t+\tau-i\tau)X(t-i\tau)+A(t) \quad (2.6)$$

где, согласно (1.29), $\vartheta$ — целая часть $t/\tau$. а $A(t)$ — периодическая функция с периодом $\tau$, подлежащая определению.

Заменяя индекс суммирования $i$ при помощи соотношения $i=\vartheta-j+1$, преобразуем выражение (2.6) к такому виду:

$$\chi(t)=\sum_{j=1}^{\vartheta}\theta^{-1}(t-\vartheta\tau+j\tau)X(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)+A(t) \quad (2.7)$$

Выражение (2.3) принимает вид

$$z(t)=\sum_{j=1}^{\vartheta}\theta(t)\theta^{-1}(t-\vartheta\tau+j\tau)X(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)+\theta(t)A(t) \quad (2.8)$$

На интервале времени $0<t<\tau$ первое слагаемое в правой части выражения (2.8) обращается в нуль. Чтобы второе слагаемое в правой части выражения (2.8) в соответствии с (1.31) совпадало на этом интервале времени с $z^*(t)$, необходимо выбрать в качестве периодической функции $A(t)$ следующую функцию:

$$A(t)=\theta^{-1}(t-\vartheta\tau)z^*(t-\vartheta\tau) \quad (2.9)$$

где $z^*(t)$ — матрица, элементы которой определены выражениями (1.32).

При таком выборе периодической функции $A(t)$ выражение (2.8) принимает вид

$$z(t)=\theta(t)\theta^{-1}(t-\vartheta\tau)z^*(t-\vartheta\tau)+ \\ +\sum_{j=1}^{\vartheta}\theta(t)\theta^{-1}(t-\vartheta\tau+j\tau)X(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \quad (2.10)$$

Введем теперь функцию

$$N(t, j\tau)=\theta(t)\theta^{-1}(t-\vartheta\tau+j\tau) \quad (2.11)$$

представляющую собой матричную функцию веса для рассматриваемой системы разностных уравнений.

Выражение (2.10) можно представить так:

$$z(t)=N(t, 0)z^*(t-\vartheta\tau)+\sum_{j=1}^{\vartheta}N(t, j\tau)X(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \quad (2.12)$$

Элементы матрицы $z(t)$ будут иметь следующий вид:

$$z_s(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{sk}(t, 0)\, z_k^*(t - \vartheta\tau) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\vartheta} N_{sk}(t, j\tau)\, X_k(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \qquad (s = 1, \ldots, r) \quad (2.13)$$

Выражения (2.13) представляют собой решение матричного разностного уравнения (2.1), совпадающее на интервале $0 < t < \tau$ с наперед заданной матрицей $z^*(t)$.

**3. Определение функции веса для системы разностных уравнений.** Определение фундаментальной матрицы $\theta(t)$, необходимой для построения функции веса $N(t, j\tau)$ является достаточно трудной задачей. Для фиксированных значений аргумента $t = t_1$ функция веса $N(t_1, j\tau)$ может быть построена в результате решения сопряженной системы разностных уравнений, как это показано ниже.

Для момента времени $t = t_1$ искомые функции $z_s(t)$ имеют согласно (2.13) следующие значения:

$$z_s(t_1) = \sum_{k=1}^{r} N_{sk}(t_1, 0)\, z_k^*(t_1 - \vartheta_1\tau) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{\vartheta_1} N_{sk}(t_1, j\tau)\, X_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau - \tau) \qquad (s = 1, \ldots, r) \quad (3.1)$$

В выражение (3.1) входят функции $N_{sk}(t_1, j\tau)$, являющиеся элементами матричной функции веса для фиксированного значения аргумента $t = t_1$. Чтобы определить их, рассмотрим сопряженное матричное уравнение

$$Z(t) + a_T^{*}(t)\, Z(t + \tau) = 0 \quad (3.2)$$

Здесь $a_T(t)$ — транспонированная матрица для матрицы $a(t)$.

Матричное уравнение (3.2) эквивалентно следующей системе скалярных уравнений:

$$Z_k^{*}(t) + \sum_{l=1}^{r} a_{lk}(t)\, Z_l(t + \tau) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \quad (3.3)$$

Умножая $\mu$-е уравнение ($\mu = 1, \ldots, r$) исходной системы разностных уравнений (2.1)

$$z_\mu(t + \tau) + \sum_{l=1}^{r} a_{\mu l}(t)\, z_l(t) = X_\mu(t)$$

на $Z_\mu(t + \tau)$, а $\nu$-е уравнение ($\nu = 1, \ldots, r$) системы (3.3) на $-z_\nu(t)$ и складывая левые и правые части всех вновь полученных при этом уравнений, найдем следующее соотношение

$$\Delta \sum_{k=1}^{r} Z_k(t)\, z_k(t) = \sum_{k=1}^{r} Z_k(t + \tau)\, X_k(t) \quad (3.4)$$

Из соотношения (3.4) следует, что

$$\sum_{k=1}^{r} Z_k(t)\, z_k(t) = \sum_{i=1}^{\vartheta} \sum_{k=1}^{r} Z_k(t + \tau - i\tau)\, X_k(t - i\tau) + B(t) \tag{3.5}$$

где $B(t)$ — периодическая функция, подлежащая определению.

Заменяя, как и выше, индекс суммирования $i$ при помощи соотношения $i = \vartheta - j + 1$, преобразуем соотношение (3.5) к виду

$$\sum_{k=1}^{r} Z_k(t)\, z_k(t) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\vartheta} Z_k(t - \vartheta\tau + j\tau)\, X_k(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) + B(t) \tag{3.6}$$

На интервале $0 < t < \tau$ первое слагаемое в правой части соотношения (3.6) обращается в нуль. Для того чтобы второе слагаемое в правой части соотношения (3.6) совпадало на этом интервале времени с левой частью (3.6), необходимо выбрать в качестве периодической функции $B(t)$ следующую функцию:

$$B(t) = \sum_{k=1}^{r} Z_k^*(t - \vartheta\tau)\, z_k^*(t - \vartheta\tau) \tag{3.7}$$

где $Z_k^*(t)$ — матрица, которая определена лишь на интервале $0 < t < \tau$ и совпадает на этом интервале с матрицей $Z(t)$. Очевидно, что для возможности построения решения сопряженного матричного уравнения (3.2), течение искомой матрицы $Z(t)$ на интервале $0 < t < \tau$ должно быть наперед задано.

Может оказаться необходимым, как это потребуется ниже, наперед задать течение матрицы $Z(t)$ не на начальном интервале времени $(0, \tau)$, а на другом интервале $(j\tau, (j+1)\tau)$. В силу разностных уравнений (3.3) такое задание уже однозначно определяет течение матрицы $Z(t)$ на начальном интервале $(0, \tau)$.

Подставляя в (3.6) найденное для $B(t)$ выражение (3.7), получим

$$\sum_{k=1}^{r} Z_k(t)\, z_k(t) = \sum_{k=1}^{r} Z_k^*(t - \vartheta\tau)\, z_k^*(t - \vartheta\tau) + \\ + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\vartheta} Z_k(t - \vartheta\tau + j\tau)\, X_k(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \tag{3.8}$$

Согласно сказанному выше, $Z_k(t) = Z_k^*(t)$ при $0 < t < \tau$; поэтому звездочку у $Z_k^*$ в соотношении (3.8) можно опустить.

Для фиксированного момента времени $t = t_1$ соотношение (3.8) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{r} Z_k(t_1)\, z_k(t_1) = \sum_{k=1}^{r} Z_k(t_1 - \vartheta_1\tau)\, z_k^*(t_1 - \vartheta_1\tau) + \\ + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\vartheta_1} Z_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau)\, X_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau - \tau) \tag{3.9}$$

Функции $Z_k(t)$ будут решениями системы линейных разностных уравнений (3.3). Потребуем, чтобы эти решения удовлетворяли условиям

$$Z_s(t) = 1,\ Z_\mu(t) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, r) \tag{3.10}$$

для любого значения $t$ на интервале $\vartheta_1\tau < t < (\vartheta_1 + 1)\tau$.

При условиях (3.10) соотношение (3.9) принимает следующий вид:

$$z_s(t_1) = \sum_{k=1}^{r} Z_k(t_1 - \vartheta_1\tau)\, z_k^*(t_1 - \vartheta_1\tau) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\vartheta_1} Z_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau)\, X_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau - \tau) \tag{3.11}$$

где индекс $s$ фиксирован.

Сравнивая выражения (3.11) и (3.1), можно видеть [6], что для фиксированного $s$

$$N_{sk}(t_1, j\tau) = Z_k(t_1 - \vartheta_1\tau + j\tau) \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{3.12}$$

матрицы $Z_k$ будут решениями сопряженной системы разностных уравнений (3.3), удовлетворяющие для любого момента времени $t$ на интервале $\vartheta_1\tau < t < (\vartheta_1 + 1)\tau$ условиям (3.10).

**4. Применение разностных уравнений с дискретным аргументом.** Полагая в разностных уравнениях (1.26) $\varepsilon = 0$, получим

$$z_\nu((n+1)\tau) + \sum_{k=1}^{r} a_{\nu k}(n\tau)\, z_k(n\tau) = X_\nu(n\tau) \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots \\ \nu = 1, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Здесь в соответствии с (1.15) и (1.16)

$$a_{\nu k}(n\tau) = -\sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu\mu}((n+1)\tau, n\tau + \tau_1)\, L_{\mu k}(n\tau + \tau_1, n\tau) \tag{4.2}$$

$$X_\nu(n\tau) = \sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu\mu}((n+1)\tau, n\tau + \tau_1) \int_{n\tau}^{n\tau+\tau_1} \sum_{k=1}^{r} L_{\mu k}(n\tau + \tau_1, \xi)\, x_k(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{n\tau+\tau_1}^{(n+1)\tau} \sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu\mu}((n+1)\tau, \xi)\, s_\mu(\xi)\, d\xi \tag{4.3}$$

Соотношения (4.3) связывают между собой значения искомых функций $z_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ в моменты времени $n\tau$ и $(n+1)\tau$ ($n$ — любое целое число), представляющие собой начальные моменты времени соответственно для двух последовательных периодов альтернирования. Эти соотношения, справедливые лишь для целочисленных значений $n$, представляют собой разностные уравнения с дискретным аргументом. Решения уравнений (4.1) будут, таким образом, определять последовательности значений фазовых координат $z_\nu$ в дискретных точках, являющихся границами периодов альтернирования, т. е. в моменты времени $t = n\tau$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Эти решения можно получить изложенным в пп. 2 и 3 методом, заменив (4.1) системой разностных уравнений

$$z_\nu(t + \tau) + \sum_{k=1}^{r} a_{\nu k}^\circ(t)\, z_k(t) = X_\nu^\circ(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{4.4}$$

где $a_{\nu k}^\circ(t)$ и $X_\nu^\circ(t)$ — ступенчатые функции, сохраняющие при $\vartheta\tau \leqslant t < (\vartheta + 1)\tau$ значения $a_{\nu k}(\vartheta\tau)$ и $X_\nu(\vartheta\tau)$, соответственно. Здесь через $\vartheta$, как и выше (1.29), обозначена целая часть $t/\tau$. Решение системы уравнений (4.4) для значений $t$, кратных периоду альтернирования $\tau$, в соответствии с (2.13) будет

$$z_\nu(\vartheta\tau) = \sum_{k=1}^{r} N_{\nu k}(\vartheta\tau, 0)\, z_k(0) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\vartheta} N_{\nu k}(\vartheta\tau, j\tau)\, X_k(j\tau - \tau) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{4.5}$$

В некоторых случаях, в частности, когда (1.1) и (1.6) представляют собой системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, нахождение выражений (4.5) не представляет затруднений.

В промежутки времени $\vartheta\tau < t < (\vartheta + 1)\tau$ фазовые координаты $z_\nu$ в соответствии с (1.4) и (1.9) будут изменяться по закону

$$z_\nu(t) = z_\nu^{**}(t) \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned} z_\nu^{**}(t) = \Bigg\{ \sum_{k=1}^{r} \Big[ L_{\nu k}(t, \vartheta\tau)\, 1(\vartheta\tau + \tau_{1+} - t) &+ \\ + \sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu\mu}(t, \vartheta\tau + \tau_1)\, L_{\mu k}(\vartheta\tau + \tau_1, \vartheta\tau)\, 1(t - \vartheta\tau - \tau_{1+})\Big] z_k(\vartheta\tau) &+ \\ + \int_{\vartheta\tau}^{t} \sum_{k=1}^{r} L_{\nu k}(t, \xi)\, x_k(\xi)\, d\xi\, 1(\vartheta\tau + \tau_{1+} - t) &+ \\ + \Bigg[ \sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu\mu}(t, \vartheta\tau + \tau_1) \int_{\vartheta\tau}^{\vartheta\tau + \tau_1} \sum_{k=1}^{r} L_{\mu k}(\vartheta\tau + \tau_1, \xi)\, x_k(\xi)\, d\xi &+ \\ + \int_{\vartheta\tau + \tau_1}^{t} \sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu\mu}(t, \xi)\, s_\mu(\xi)\, d\xi \Bigg] 1(t - \vartheta\tau - \tau_1 +) \Bigg\} & \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что для произвольного момента времени $t$ значения фазовых координат будут

$$z_\nu(t) = z_\nu(\vartheta\tau) + z_\nu^{**}(t)\,[1(t - \vartheta\tau_+) - 1(t - \vartheta\tau - \tau-)] \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{4.8}$$

**5. Альтернирующие системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** В этом случае матричные функции веса для систем дифференциальных уравнений (1.1) и (1.4) принимают вид

$$L(t, \xi) = L(t - \xi), \qquad M(t, \xi) = M(t - \xi) \tag{5.1}$$

Коэффициенты $a_{\nu k}(n\tau + \varepsilon)$ разностных уравнений (1.26), определяемые выражениями (1.27), (1.15) и (1.24), в соответствии с (5.1) преобразовываются к виду

$$\begin{aligned} a_{\nu k}(n\tau + \varepsilon) = &- \sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} L_{\nu j}(\varepsilon)\, M_{j\mu}(\tau_2)\, L_{\mu k}(\tau_1 - \varepsilon)\, 1(\tau_{1+} - \varepsilon) - \\ &- \sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu j}(\varepsilon - \tau_1)\, L_{j\mu}(\tau_1)\, M_{\mu k}(\tau - \varepsilon) 1(\varepsilon - \tau_{1+}) \\ &(n = 1, 2, \ldots; \qquad 0 < \varepsilon < \tau) \end{aligned} \tag{5.2}$$

где
$$\tau_2 = \tau - \tau_1 \tag{5.3}$$

Как следует из (5.2), для любого значения аргумента $t = \vartheta\tau + \varepsilon$, где согласно (1.29) $\vartheta$ — целая часть $t/\tau$, а $\varepsilon$ лежит на интервале $0 < \varepsilon < \tau$, функции $a_{\nu k}$ удовлетворяют условию $a_{\nu k}(t + \tau) = a_{\nu k}(t)$.

Таким образом, для альтернирующих систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, коэффициенты $a_{\nu k}(t)$ разностных уравнений (1.30) будут периодическими функциями времени с периодом, равным периоду альтернирования $\tau$.

Функции $X_\nu(t)$ в правых частях разностных уравнений (1.30) принимают теперь вид

$$X_\nu(t) = X_\nu^*(\vartheta\tau + \varepsilon)\,1(\tau_1 + - \varepsilon) + X_\nu^{**}(\vartheta\tau + \varepsilon)\,1(\varepsilon - \tau_1 +) \tag{5.4}$$

где в соответствии с (1.16) и (1.25)

$$\begin{aligned} X_\nu^*(\vartheta\tau + \varepsilon) = {} & \sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} L_{\nu j}(\varepsilon)\, M_{j\mu}(\tau_2)\int_{\varepsilon}^{\tau_1}\sum_{k=1}^{r} L_{\mu k}(\tau_1 - \zeta)\, x_k(\vartheta\tau + \zeta)\, d\zeta + \\ & + \sum_{j=1}^{r} L_{\nu j}(\varepsilon)\int_{\tau_1}^{\tau}\sum_{\mu=1}^{r} M_{j\mu}(\tau - \zeta)\, s_\mu(\vartheta\tau + \zeta)\, d\zeta + \\ & + \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\sum_{j=1}^{r} L_{\nu j}(\tau + \varepsilon - \zeta)\, x_j(\vartheta\tau + \zeta)\, d\zeta \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} X_\nu^{**}(\vartheta\tau + \varepsilon) = {} & \sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu j}(\varepsilon - \tau_1)\, L_{j\mu}(\tau_1)\int_{\varepsilon}^{\tau}\sum_{k=1}^{r} M_{\mu k}(\tau - \zeta)\, s_\mu(\vartheta\tau + \zeta)\, d\zeta + \\ & + \sum_{j=1}^{r} M_{\nu j}(\varepsilon - \tau_1)\int_{0}^{\tau_1}\sum_{\mu=1}^{r} L_{j\mu}(\tau_1 - \zeta)\, x_\mu(\vartheta\tau + \tau + \zeta)\, d\zeta + \\ & + \int_{\tau_1}^{\varepsilon}\sum_{j=1}^{r} M_{\nu j}(\varepsilon - \zeta)\, s_j(\vartheta\tau + \tau + \zeta)\, d\zeta \end{aligned} \tag{5.6}$$

Разностные уравнения с дискретным аргументом (4.1), в рассматриваемом сейчас случае, будут представлять собой уравнения с постоянными коэффициентами. Действительно, полагая в выражениях (5.2) $\varepsilon = 0$, получим

$$a_{\nu k}(n\tau) = a_{\nu k}, \qquad a_{\nu k} = -\sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu\mu}(\tau_2)\, L_{\mu k}(\tau_1) \tag{5.7}$$

Полагая в (5.4) $\varepsilon = 0$, получим следующие выражения для функций $X_\nu(n\tau)$, входящих в правые части разностных уравнений (4.1)

$$\begin{aligned} X_\nu(n\tau) = {} & \sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu\mu}(\tau_2)\int_{0}^{\tau_1}\sum_{k=1}^{r} L_{\mu k}(\tau_1 - \zeta)\, x_k(n\tau + \zeta)\, d\zeta + \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau}\sum_{\mu=1}^{r} M_{\nu\mu}(\tau - \zeta)\, s_\mu(n\tau + \zeta)\, d\zeta \end{aligned} \tag{5.8}$$

Заметим, что в частном случае, когда $x_k(t)$ $(k = 1, \ldots, r)$ и $s_\mu(t)$ $(\mu = 1, \ldots, r)$ будут ступенчатыми функциями, сохраняющими неизменными свои значения соответствено на интервалах $(n\tau, n\tau+\tau_1)$ и $(n\tau+\tau_1, (n+1)\tau)$, функции $X_\nu(n\tau)$ согласно (5.8) принимают вид

$$X_\nu(n\tau)=\sum_{k=1}^{r}[e_{\nu k}x_k(n\tau)+l_{\nu k}s_k(n\tau+\tau_1)] \qquad (\nu=1,\ldots,r) \tag{5.9}$$

где $e_{\nu k}$ и $l_{\nu k}$ — некоторые постоянные коэффициенты, определяемые следующими выражениями:

$$e_{\nu k}=\sum_{\mu=1}^{r}M_{\nu\mu}(\tau_2)\int_0^{\tau_1}L_{\mu k}(\tau_1-\zeta)\,d\zeta,\quad l_{\nu k}=\int_{\tau_1}^{\tau}M_{\nu k}(\tau-\zeta)\,d\zeta \tag{5.10}$$

Функции $z_\nu^{**}(t)$, определяющие закон изменения фазовых координат в промежутки времени $\vartheta\tau<t<(\vartheta+1)\tau$ в соответствии с (4.7) и (5.1) принимают теперь вид

$$\begin{aligned}z_\nu^{**}(\vartheta\tau+\varepsilon)=\sum_{k=1}^{r}&[L_{\nu k}(\varepsilon)1(\tau_{1+}-\varepsilon)+\\ &+\sum_{\mu=1}^{r}M_{\nu\mu}(\varepsilon-\tau_1)L_{\mu k}(\tau_1)1(\varepsilon-\tau_{1+})]z_k(\vartheta\tau)+\\ &+\int_0^{\varepsilon}\sum_{k=1}^{r}L_{\nu k}(\varepsilon-\zeta)x_k(\vartheta\tau+\zeta)\,d\zeta\,1(\tau_{1+}-\varepsilon)+\\ &+\Big[\sum_{\mu=1}^{r}M_{\nu\mu}(\varepsilon-\tau_1)\int_0^{\tau_1}\sum_{k=1}^{r}L_{\mu k}(\tau_1-\zeta)x_k(\vartheta\tau+\zeta)\,d\zeta+\\ &+\int_{\tau_1}^{\varepsilon}\sum_{\mu=1}^{r}M_{\nu\mu}(\varepsilon-\zeta)s_\mu(\vartheta\tau+\zeta)\,d\zeta\Big]1(\varepsilon-\tau_{1+}) \qquad (\nu=1,\ldots,r)\end{aligned} \tag{5.11}$$

**6. К задаче об определении положения системы с альтернированием в фазовом пространстве по измерениям отклонений одной из фазовых координат.** Во многих системах автоматического управления оптимальный алгоритм управления реализуется на основе информации о мгновенном положении управляемой системы в фазовом пространстве [7-8].

Получение такой информации, зачастую, затруднительно вследствие недоступности измерения некоторых из фазовых координат, а иногда и вследствие отсутствия сведений о положении системы ориентировки, относительно которой должно определяться положение управляемой системы.

В связи с этим возникает необходимость в разработке косвенных методов получения информации о положении управляемой системы в фазовом пространстве [9]. Перейдем к изложению одного из таких методов для систем с альтернированием.

Как следует из (2.13) в моменты времени $t=\vartheta\tau$, где $\vartheta$ — некоторое целое число, фазовая координата $z_s$ принимает следующее значение:

$$z_s(\vartheta\tau)=\sum_{k=1}^{r}N_{sk}(\vartheta\tau,0)z_k(0)+\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\vartheta}N_{sk}(\vartheta\tau,j\tau)X_k(j\tau-\tau) \tag{6.1}$$

Пусть фазовая координата $z_s$ доступна измерению. Полагая, что исходное начало отсчета неизвестно, измерим отклонение фазовой координаты $z_s$ от некоторого выбираемого произвольно, начала отсчета

$$S(\vartheta_i \tau) = S^* + z_s(\vartheta_i \tau) \qquad (i = 1, \ldots, r+1) \tag{6.2}$$

Здесь $S^*$ — отклонение нового начала отсчета относительно исходного начала отсчета. Обозначая через $L_\mu$ разность между двумя последовательными измерениями

$$S(\vartheta_{\mu+1}\tau) - S(\vartheta_\mu \tau) = L_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, r) \tag{6.3}$$

придем к следующим соотношениям

$$z_s(\vartheta_{\mu+1}\tau) - z_s(\vartheta_\mu \tau) = L_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, r) \tag{6.4}$$

не содержащим неизвестной величины $S^*$.

Подставляя значения $z_s(\vartheta_{\mu+1}\tau)$ и $z_s(\vartheta_\mu \tau)$ согласно (6.1), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно начальных отклонений $z_k(0)$.

$$\sum_{k=1}^{r} [N_{sk}(\vartheta_{\mu+1}\tau, 0) - N_{sk}(\vartheta_\mu \tau, 0)]\, z_k(0) = \qquad (\mu = 1, \ldots, r) \tag{6.5}$$

$$= L_\mu + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\vartheta_\mu} N_{sk}(\vartheta_\mu \tau, j\tau)\, X_k(j\tau - \tau) - \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\vartheta_\mu + 1} N_{sk}(\vartheta_{\mu+1}\tau, j\tau)\, X_k(j\tau - \tau)$$

Из уравнений (6.5) можно определить начальные значения фазовых координат $z_k(0)$ $(k = 1, \ldots, r)$, после чего по формулам (2.13) могут быть определены значения фазовых координат $z_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ для любого момента времени $t$.

Поступила 3 IV 1961

## ЛИТЕРАТУРА


1. Цыпкин Я. З. Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях. ГЭИ, М., 1951.
2. Ragazzini J. R. and Zadeh L. A. The Analysis of sampled— data Systems, Transactions of AIEE, 1952, vol. 71, pt. II, p. 225.
3. Ragazzini J. R. and Franklin G. F. Sampled Data Control Systems. Mc. Graw Hill, 1958.
4. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. Физматгиз, 1958.
5. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, 1959.
6. Ройтенберг Я. Н. О накоплении возмущений в нестационарных линейных импульсных системах. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
7. Bellman R. Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957.
8. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования, Успехи матем. наук, 1959, т. XIV, вып. 1, стр. 3.
9. Ройтенберг Я. Н. О некоторых косвенных методах получения информации о положении управляемой системы в фазовом пространстве. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.