Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

А. И. Климушев, Н. Н. Красовский
(Свердловск)

В статье на основании равномерной асимптотической устойчивости вырожденной системы дифференциальных уравнений первого приближения и асимптотической устойчивости некоторых вспомогательных систем доказывается асимптотическая устойчивость системы дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при производных.

Задача исследуется методом функций Ляпунова [1]. Отметим, что на возможность исследования систем с малым параметром при производных классическими методами теории устойчивости обращал внимание Н. Г. Четаев [2]. Системы с малым параметром при производных были подробно исследованы, как известно, А. Н. Тихоновым, его сотрудниками и И. С. Градштейном.

Доказанная в этой статье теорема в линейном случае является обобщением теоремы, доказанной Б. С. Разумихиным [3], где малый параметр входит в одно уравнение линейной системы.

1. Линейные системы. Рассмотрим сначала линейную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{l=1}^{m} a_{il}(t)x_l + \sum_{s=1}^{n} b_{is}(t)\,y_s + f_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ \mu\frac{dy_j}{dt} &= \sum_{l=1}^{m} c_{jl}(t)\,x_l + \sum_{s=1}^{n} d_{js}(t)\,y_s \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь μ — положительный малый параметр.

Будем изучать устойчивость решения этой системы, определенного известными начальными данными

$$x_{i0} = g_{i0} \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad y_{j0} = p_{j0} \quad (j = 1, \ldots, n) \qquad \text{при } t = t_0 \tag{1.2}$$

Это решение будем обозначать символами

$$x_i = x_i(t, \mu), \qquad y_j = y_j(t, \mu) \tag{1.3}$$

Предположим, что коэффициенты $a_{il}(t)$, $b_{is}(t)$, $c_{jl}(t)$, $d_{js}(t)$ и $f_i(t)$ системы (1.1) непрерывные ограниченные функции аргумента t, имеющие непрерывные ограниченные производные для $t_0 \leqslant t < \infty$. Кроме этого, выполняется условие

$$\begin{vmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \ldots & d_{1n}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \ldots & d_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1}(t) & d_{n2}(t) & \ldots & d_{nn}(t) \end{vmatrix} > \beta > 0 \quad (\beta \text{ — некоторое число}) \tag{1.4}$$

Вырожденная система для системы (1.1) при $\mu = 0$ имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{l=1}^{m} a_{il}(t) x_l + \sum_{s=1}^{n} b_{is}(t) y_s + f_i(t), \quad \sum_{l=1}^{m} c_{jl}(t) x_l + \sum_{s=1}^{n} d_{js}(t) y_s = 0 \quad (1.5)$$

Решение вырожденной системы (1.5), определенное начальными условиями $x_{i0} = g_{i0}$ обозначим

$$x_i = x_i(t), \qquad y_j = y_j(t) \qquad (1.6)$$

Решим систему n алгебраических линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^{m} c_{jl}(t) x_l + \sum_{s=1}^{n} d_{js}(t) y_s = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

относительно $y_1, \ldots, y_n$; пусть это решение будет

$$y_s = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{si}(t) x_i \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (1.7)$$

Здесь $\lambda_{si}(t)$ — ограниченные непрерывные функции t.

Подстановка выражений (1.7) в первые m уравнений вырожденной системы (1.5) приводит к системе m линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}(t) x_k + f_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (1.8)$$

Здесь $r_{ik}(t)$ — непрерывные ограниченные функции t.

Систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{s=1}^{n} d_{js}(t) y_s \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad (1.9)$$

назовем вспомогательной системой.

В дальнейшем покажем, что для достаточно малых значений параметра $\mu > 0$ при выполнении некоторых условий траектория исходной системы уравнений (1.1) стремится к траектории вырожденной системы (1.5) и из устойчивости вспомогательных систем следует устойчивость решения исходной системы (1.1).

Теорема 1.1. Если для системы уравнений (1.1) и соответствующей ей вырожденной системы (1.5) справедливы следующие условия.

1) Система уравнений (1.8) равномерно асимптотически устойчива.

2) Системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{s=1}^{n} d_{js}(\theta) y_s \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

при всех фиксированных значениях θ асимптотически устойчивы равностепенно по $\theta \in [t_0, \infty]$ или, что то же самое, корни характеристического уравнения

$$|d_{js} - \rho\delta_{js}| = 0$$

удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \rho < -\Delta, \qquad \Delta = \operatorname{const} > 0 \qquad (\delta_{js} = 0, \text{ если } j \neq s, \ \delta_{js} = 1, \text{ если } j = s)$$

то при достаточно малых $\mu > 0$ система (1.1) асимптотически равномерно устойчива и для любых наперед заданных $Q > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать число $\mu_0 > 0$ такое, что будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &|x_i(t,\mu) - x_i(t)| < \varepsilon, \quad |y_j(t,\mu) - y_j(t)| < \varepsilon \\ &\qquad |y(t_0,\mu) - y_j(t_0)| < Q \quad \text{при } t > t_1(Q,\varepsilon) \end{aligned} \tag{1.10}$$

если только $\mu < \mu_0$. Величину μ_0 можно выбрать столь малой, чтобы число t_1 из условий (1.10) отличалось от числа t_0 меньше, чем на любое наперед заданное число $\gamma > 0$.

Доказательство. Введем функции ξ_i и η_j при помощи равенств

$$\xi_i(t,\mu) = x_i(t,\mu) - x_i(t), \qquad \eta_j(t,\mu) = y_j(t,\mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t)\, x_k(t,\mu)$$

Составим дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{d\xi_i(t,\mu)}{dt} = \frac{dx_i(t,\mu)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt}$$

$$\frac{d\eta_j(t,\mu)}{dt} = \frac{dy_j(t,\mu)}{dt} - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt} x_k(t,\mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \frac{dx_k(t,\mu)}{dt}$$

Учитывая (1.1) и (1.8), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i(t,\mu)}{dt} &= \sum_{l=1}^{m} r_{il}(t)\,\xi_l(t,\mu) - \sum_{s=1}^{n} b_{is}(t)\,\eta_s(t,\mu) \\ \frac{d\eta_j(t,\mu)}{dt} &= \frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n} d_{js}(t)\,\eta_s(t,\mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \sum_{l=1}^{m} r_{kl}(t)\,\xi_l(t,\mu) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt} \xi_k(t,\mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \sum_{l=1}^{m} r_{kl}(t)\, x_l(t) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt} x_k(t) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \sum_{s=1}^{m} b_{ks}(t)\,\eta_s(t,\mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t)\, f_i(t) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Для доказательства теоремы следует показать, что решение $\xi_l(t,\mu)$, $\eta_j(t,\mu)$ системы уравнений (1.11) удовлетворяет условиям: для любых наперед заданных чисел Q, ε и δ можно указать число $\mu_0 > 0$ такое, что при любых начальных данных $\xi_{i0} = 0$, $|\eta_{j0}| < Q$ выполняются неравенства $|\xi_i(t,\mu)| < \varepsilon$, $|\eta_j(t,\mu)| < \varepsilon$ при $t > t_0 + \delta$, если только $\mu < \mu_0$.

По условию теоремы система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (1.8) равномерно асимптотически устойчива, следовательно, для нее существует определенно положительная квадратичная форма $v(t, \xi_1, \ldots, \xi_m) = v(t, \xi_i)$, полная производная которой в силу системы уравнений (1.8) определенно отрицательная форма [5]. Система уравнений (1.9) при фиксированных значениях θ асимптотически устойчива, равностепенно по θ, следовательно, для системы уравнений (1.9) также существует определенно положительная квадратичная форма $w(\theta, \eta_1, \ldots, \eta_n) = w(\theta, \eta_j)$, полная производная которой в силу системы (1.9) (при $\theta = \mathrm{const}$) определенно отрицательная форма, при этом частная производная $\partial w(\theta, \eta_j)/d\theta$ ограничена и оценки определенной положительности и отрицательности форм $w(\theta, \eta_j)$ и $(dw(\theta, \eta_j)/dt)$ (1.9) соответственно равномерны по θ.

Составим определенно положительную форму вида

$$u(t, \xi_i, \eta_j) = v(t, \xi_i) + w(t, \eta_j) \tag{1.12}$$

Докажем, что полная производная этой формы du/dt, вычисленная в силу системы уравнений возмущенного движения (1.11), при достаточно малых значениях параметра μ будет определенно отрицательной формой всюду вне достаточно малой окрестности начала координат $\xi_i = 0$, $\eta_j = 0$.

В самом деле

$$\begin{aligned}\frac{du(t, \xi_i, \eta_j)}{dt} = {} & \frac{\partial v(t, \xi_i)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v(t, \xi_i)}{\partial \xi_i}\left[\sum_{l=1}^{m} r_{il}(t)\xi_l(t, \mu) - \sum_{s=1}^{n} b_{is}(t)\eta_s(t, \mu)\right] + \\ & + \frac{\partial w(t, \eta_j)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w(t, \eta_j)}{\partial \eta_j}\left[\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n} d_{js}(t)\eta_s(t, \mu) - \right. \\ & - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t)\sum_{l=1}^{m} r_{kl}(t)\xi_l(t, \mu) - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt}\xi_k(t, \mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t)\sum_{l=1}^{m} r_{kl}(t)x_l(t) - \\ & \left. - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt}x_k(t) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t)\sum_{s=1}^{n} b_{ks}(t)\eta_s(t, \mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t)f_i(t)\right]\end{aligned} \tag{1.13}$$

Заметим, что в области $M < |\xi_i|$, $M < |\eta_j|$, где M надлежащим образом выбранное положительное число, знак $du(t, \xi_i, \eta_j)/dt$ определяется знаком квадратичной формы от ξ_i, η_j в правой части (1.13).

Составим матрицу коэффициентов квадратичной формы от ξ_i, η_j, содержащейся в выражении $-du(t, \xi_i, \eta_j)/dt$, т. е. матрицу формы, обратной по знаку форме, содержащейся в правой части (1.13)

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} & \beta_{m1} & \beta_{m2} & \ldots & \beta_{mn} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1m} & \frac{1}{\mu}\delta_{11} + \sigma_{11} & \frac{1}{\mu}\delta_{12} + \sigma_{12} & \ldots & \frac{1}{\mu}\delta_{1n} + \sigma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2m} & \frac{1}{\mu}\delta_{21} + \sigma_{21} & \frac{1}{\mu}\delta_{22} + \sigma_{22} & \ldots & \frac{1}{\mu}\delta_{2n} + \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nm} & \frac{1}{\mu}\delta_{n1} + \sigma_{n1} & \frac{1}{\mu}\delta_{n2} + \sigma_{n2} & \ldots & \frac{1}{\mu}\delta_{nn} + \sigma_{nn} \end{matrix}\right\| \tag{1.14}$$

Здесь α_{il} — коэффициенты квадратичной формы производной dv/dt в силу уравнений (1.8), β_{js} — коэффициенты квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v(t, \xi_i)}{\partial \xi_i} \sum_{s=1}^{n} b_{is}(t)\eta_s(t, \mu)$$

Выражения $(1/\mu)\delta_{js} + \sigma_{js}$ представляют собой коэффициенты квадратичной формы

$$-\left\{\frac{\partial w(t, \eta_j)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w(t, \eta_j)}{\partial \eta_j}\left[\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n} d_{js}(t)\eta_s(t, \mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t)\sum_{s=1}^{n} b_{ks}(t)\eta_s(t, \mu)\right\}\right]$$

Наконец, символы γ_{jl} означают коэффициенты квадратичной формы

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w(t, \eta_j)}{\partial \eta_j} \left[\sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \sum_{l=1}^{m} r_{kl}(t) \xi_l(t, \mu) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt} \xi_k(t, \mu) \right]$$

В силу условий Сильвестра знакоположительности квадратичной формы, при наших предположениях о функциях $v(t, \xi_i)$ и $w(t, \eta_j)$, все главные диагональные миноры матриц

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\mu}\delta_{11} & \frac{1}{\mu}\delta_{12} & \ldots & \frac{1}{\mu}\delta_{1n} \\ \frac{1}{\mu}\delta_{21} & \frac{1}{\mu}\delta_{22} & \ldots & \frac{1}{\mu}\delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{\mu}\delta_{n1} & \frac{1}{\mu}\delta_{n2} & \ldots & \frac{1}{\mu}\delta_{nn} \end{matrix} \right\|$$

положительны. Отсюда следует, что главные диагональные миноры матрицы (1.14) положительны при достаточно малом μ, т. е. квадратичная форма, входящая в состав $du(t, \xi_i, \eta_j)/dt$, определенно отрицательна.

Докажем, что со стремлением μ к нулю область M, вне которой полная производная от формы $u(t, \xi_i, \eta_j)$ определенно отрицательна, тоже стремится к нулю, т. е. при $\mu \to 0$ имеем $M \to 0$. Выражение для $du(t, \xi_i, \eta_j)/dt$ представим в виде

$$du(t, \xi_i, \eta_j)/dt = K(t, \xi_i, \eta_j) + L(t, \eta_j)$$

Здесь $K(t, \xi_i, \eta_j)$ квадратичная форма переменных $\xi_i \eta$, а $L(t, \eta_j)$ линейная форма переменных η_j. В правой части последнего равенства произведем] преобразование; прибавим и вычтем квадратичную форму вида $(\omega/\mu)(\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2)$, где ω как угодно малое число.

Учитывая зависимость коэффициентов квадратичной формы $K(t, \xi_i, \eta_j)$ от μ и малость коэффициентов формы $(\omega/\mu)(\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2)$ по сравнению с коэффициентами при переменных η_j формы $K(t, \xi_i, \eta_j)$ при достаточно малом ω, по известному свойству знакоопределенных форм заключаем, что квадратичная форма

$$K_1(t, \xi_i, \eta_j) = K(t, \xi_i, \eta_j) + (\omega/\mu)(\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2)$$

будет определенно отрицательна. Теперь рассмотрим разность вида

$$L(t, \eta_j) - (\omega/\mu)(\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2)$$

При $\mu \to 0$ область $|\eta_j| > M$, вне которой эта разность будет определенно отрицательна, стягивается к поверхности $\eta_j = 0$. Но, отсюда следует, что величина

$$\frac{du(t, \xi_i, \eta_j)}{dt} = K_1(t, \xi_i, \eta_j) + L(t, \eta_j) - \frac{\omega}{\mu} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^2$$

определенно отрицательна вне любой как угодно малой окрестности начала координат $\xi_i = 0$, $\eta_j = 0$, если число μ достаточно мало.

Итак, функции $u(t, \xi_i, \eta_j)$ и $du(t, \xi_i, \eta_j)/dt$ удовлетворяют условиям:

$$u(t, \xi_i, \eta_j) \geqslant \Omega_1(\xi_i, \eta_j), \qquad \frac{du(t, \xi_i, \eta_j)}{dt} \leqslant -\Omega_2(\xi_i, \eta_j) \text{ при } |\xi_i| > M, \ |\xi_j| > M$$

Здесь $\Omega_1(\xi_i, \eta_j)$ и $\Omega_2(\xi_i, \eta_j)$ — не зависящие от t определенно положительные формы.

Учитывая определенную положительность формы $\Omega_1(\xi_i, \eta_j)$ в пространстве ξ_i, η_j, проведем поверхность уровня $\Omega_1(\xi_i, \eta_j) = C_1$ с таким расчетом, чтобы подвижная поверхность $u(t, \xi_i, \eta_j) = C_1$, находящаяся внутри указанной поверхности $\Omega_1(\xi_i, \eta_j) = C_1$, охватывала начальную точку траектории возмущенного движения $P(\xi_{i0}, \eta_{j0})$.

Принимая во внимание отрицательный знак $du(t, \xi_i, \eta_j)/dt$ на этой подвижной поверхности, приходим к заключению, что траектория системы уравнений (1.11) остается внутри указанной подвижной поверхности $u(t, \xi_i, \eta_j) = C_1$ при всех $t \geqslant t_0$.

Далее, проведем вторую поверхность уровня $\Omega_1(\xi_i, \eta_j) = C_2$, где $C_2 < C_1$ с таким расчетом, чтобы подвижная поверхность $u(t, \xi_i, \eta_j) = C_2$ охватывала область M. Если бы траектория системы уравнений (1.11) все время оставалась вне области, ограниченной второй подвижной поверхностью $u(t, \xi_i, \eta_j) = C_2$, то имело бы место неравенство $du(t, \xi_i, \eta_j)/dt < -\alpha$, где α — положительная величина. Отсюда, вследствие равенства

$$u(t, \xi_i, \eta_i) = u(t_0, \xi_{i0}, \eta_{j0}) + \int_{t_0}^{t} \frac{du(t, \xi_i, \eta_j)}{dt} dt$$

имеем

$$u(t, \xi_i, \eta_j) \leqslant u(t_0, \xi_{i0}, \eta_{j0}) - \alpha(t - t_0)$$

Последнее неравенство приводит к противоречию.

Следовательно, траектория системы уравнений возмущенного движения (1.11) войдет внутрь области, ограниченной второй подвижной поверхностью $u(t, \xi_i, \eta_j) = C_2$, и в дальнейшем будет оставаться внутри этой поверхности.

Остается доказать, что величина η_j быстро убывает до значения меньшего ε. Будем поэтому рассматривать лишь траектории системы уравнений (1.11), порожденные начальными условиями $\xi_{i0} = 0$, т. е. при условии $x_i(t_0, \mu) = x_i(t_0)$. Проверим, что такие траектории (1.11) приближаются к началу координат за достаточно малый промежуток времени, если параметр μ достаточно мал.

В самом деле, производная формы $u(t, \xi_i, \eta_j)$ по времени, как доказано ранее, отрицательна и зависит от μ таким образом, что коэффициенты при $\eta_j\eta_s$ квадратичной формы $k(t, \xi_i, \eta_j)$ содержат множитель $1/\mu$. Следовательно, эти коэффициенты при стремлении параметра μ к нулю неограниченно возрастают по величине, соответственно возрастает по абсолютной величине и отрицательная производная $du(t, \xi_i, \eta_j)/dt$ при условии $|\eta_j| > M$.

Отсюда следует, что функция $u(t, \xi_i, \eta_j)$, оставаясь определенно положительной, быстро убывает по величине и траектория (1.11) за малый промежуток времени приближается к началу координат $\xi_i = 0$, $\eta = 0$. (Величины η_j должны быстро убывать, а в это время величины $\xi_i(t, \mu)$ не могут сильно возрасти, что можно проверить, опираясь на известные оценки интегральной непрерывности.) В дальнейшем траектория системы уравнений (1.11) будет оставаться в малой окрестности начала координат, т. е. траектория исходной системы уравнений (1.1) как угодно быстро войдет в достаточно малую окрестность траектории вырожденной системы уравнений (1.5) и в дальнейшем будет оставаться в указанной окрестности.

Теперь проверим асимптотическую устойчивость системы уравнений (1.1). Для этого рассмотрим два решения этой системы с отличающимися начальными условиями или, что то же самое, два решения системы (1.11) с разными начальными условиями. Обозначим эти решения символами

$$\alpha_i(t, \mu) = \xi_{i1}(t, \mu) - \xi_{i2}(t, \mu), \qquad \beta_j(t, \mu) = \eta_{j1}(t, \mu) - \eta_{j2}(t, \mu) \quad (1.15)$$

На основании соотношений (1.15) и (1.11) имеем

$$\frac{d\alpha_i(t, \mu)}{dt} = \sum_{l=1}^{m} r_{il}(t)\,\alpha_l(t, \mu) - \sum_{s=1}^{n} b_{is}(t)\,\beta_s(t, \mu)$$

$$\frac{d\beta_j(t, \mu)}{dt} = \frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n} d_{js}(t)\,\beta_s(t, \mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \sum_{l=1}^{m} r_{kl}(t)\,\alpha_l(t, \mu) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt}\,\alpha_k(t, \mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} \sum_{s=1}^{m} b_{ks}(t)\,\beta_s(t, \mu) \quad (1.16)$$

Рассмотрим определенно положительную форму

$$u(t, \alpha_i, \beta_j) = v(t, \alpha_i) + w(t, \beta_j) \quad (1.17)$$

построенную как и (1.12). Эта форма при достаточно малых значениях параметра μ имеет определенно отрицательную производную $du(t, \alpha_i, \beta_j)/dt$, вычисленную в силу системы уравнений (1.16). Это проверяется аналогично тому, как это сделано выше (стр. 683 и 684). Следовательно, форма (1.17) будет функцией Ляпунова, обеспечивающей асимптотическую устойчивость системы уравнений (1.16). Из асимптотической устойчивости системы уравнений (1.16) следует асимптотическая устойчивость исходной системы уравнений (1.1).

2. Нелинейные системы. Пусть дана система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= X_i(x_s, y_k, t), & x_{i0} &= a_{i0} & (i, s = 1, \ldots, m) \\ \mu\frac{dy_j}{dt} &= Y_j(x_s, y_k, t), & y_{j0} &= b_{j0} & (j, k = 1, \ldots, n) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь μ — положительный малый параметр, и для сокращения принята следующая запись

$$X_i(x_s, y_k, t) = X_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, t)$$

$$Y_j(x_s, y_k, t) = Y_j(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, t)$$

Условимся также в дальнейшем предполагать, что индексы изменяются, как указано, т. е. $i, s = 1, \ldots, m$ и $j, k = 1, \ldots, n$.

Предположим, что функции $X_i(x_s, y_k, t)$ и $Y_j(x_s, y_k, t)$ имеют непрерывные ограниченные производные по всем аргументам в области $|x_s| \leqslant \infty$, $|y_k| \leqslant \infty$, $t_0 \leqslant t < \infty$, причем $D(Y_1, \ldots, Y_n)/D(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$.

Вырожденная система уравнений системы дифференциальных уравнений (2.1) при $\mu = 0$ имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_s, y_k, t), \qquad Y_j(x_s, y_k, t) = 0, \qquad x_{i0} = a_{i0} \quad (2.2)$$

Допустим, что система n уравнений $Y_j(x_s, y_k, t) = 0$ имеет решение — систему функций

$$y_j = f_j(x_s, t) \qquad (j = 2, \ldots, n) \tag{2.3}$$

у которых частные производные по x_s и t ограничены.

Подставим значения $y_1, \ldots, y_n$ (2.3) в первые m уравнений вырожденной системы (2.2). Получим систему m уравнений относительно x_i

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i[x_s, f_k, (x_s, t), t] = F_i(x_s, t), \qquad x_{i0} = a_{i0} \tag{2.4}$$

Пусть решение исходной системы дифференциальных уравнений (2.1) при данных начальных условиях

$$x_i = x_i(t, \mu), \qquad y_j = y_j(t, \mu) \tag{2.5}$$

решение вырожденной системы уравнений (2.2) при соответствующих начальных данных

$$x_i = x_i(t), \qquad y_j = y_j(t) = f_j[x_s(t), t] \tag{2.6}$$

Составим вспомогательные уравнения возмущенного движения для данного решения $x_i = x_i(t)$ системы (2.4), исходя из равенств $z_i = x_i^*(t) - x_i(t)$, где $x_i^*(t)$ — решение системы (2.4), соответствующее некоторому изменению начальных условий $\Delta a_{i0} = a_{i0}^* - a_{i0}$; имеем

$$\frac{dz_i}{dt} = F_i[z_s + x_s(t), t] - F_i[x_s(t), t] =$$
$$= X_i[z_s + x_s(t), f_k(z_s + x_s(t), t), t] - X_i[x_s(t), f_k(x_s(t), t), t] \tag{2.7}$$

Предположим, что линейное приближение системы уравнений возмущенного движения (2.7) асимптотически равномерно устойчиво, т. е. асимптотически равномерно устойчива система уравнений (2.8)

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{s=1}^{m} g_{is}(t) z_s \qquad \left(g_{is}(t) = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial y_k}\, \frac{\partial f_k}{\partial x_s}\right]_{(x_s = x_s(t))}\right) \tag{2.8}$$

Наряду с вышеприведенными системами дифференциальных уравнений рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_j}{dt} = Y_j(\alpha_s, y_k, \beta) \tag{2.9}$$

Здесь α_s заменяет x_s, β заменяет t.

Допустим, что при каждых фиксированных значениях $\alpha_s = x_s(\beta)$, $|x_s| < \infty$, $\beta = t$, $t_0 \leqslant \beta < \infty$ для системы уравнений (2.9) можно указать постоянную симметрическую матрицу $A(\alpha_s, \beta)$, имеющую положительные собственные числа ρ_i и такую, что симметризованная матрица [1]

$$\{B\}_{jk} = \left(\left\{A\frac{\partial Y}{\partial y}\right\}_{jk} + \left\{A\frac{\partial Y}{\partial y}\right\}_{kj}\right) \qquad \left(\left\{\frac{\partial Y}{\partial y}\right\}_{jk} = \frac{\partial Y_j}{\partial y_k}\right) \tag{2.10}$$

имеет отрицательные собственные числа r_j, удовлетворяющие неравенству $r_i < -\gamma$ ($\gamma = \text{const} > 0$), во всех точках области $|y_j| \leqslant \infty$; тогда любое решение системы (2.9) асимптотически устойчиво [6] при любых начальных условиях (y_{j0}). Составим систему уравнений возмущенного

---

[1] Предполагается, что матрицы $A(\alpha_s, \beta)$ ограничены равномерно по α_s и β и предполагается также, что $\rho_i(\alpha_s, \beta) > \Delta > 0$.

движения для системы уравнений (2.1), исходя из равенств

$$\xi_i(t,\mu) = x_i(t,\mu) - x_i(t), \qquad \eta_j(t,\mu) = y_j(t,\mu) - f_j[x_s(t,\mu), t]$$

Имеем

$$\frac{d\xi_i(t,\mu)}{dt} = \frac{dx_i(t,\mu)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt}$$

$$\frac{d\eta_j(t,\mu)}{dt} = \frac{dy_j(t,\mu)}{dt} - \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\frac{dx_s(t,\mu)}{dt} - \frac{\partial f_j}{\partial t}$$

Первые m уравнений системы уравнений возмущенного движения примут вид

$$\frac{d\xi_i(t,\mu)}{dt} = X_i[x_s(t,\mu), y_k(t,\mu), t] - X_i[x_s(t), y_k(t), t]$$

или

$$\frac{d\xi_i(t,\mu)}{dt} = X_i[x_s(t) + \xi_s(t,\mu), f_k[x_s(t) + \xi_s(t,\mu), t] + \eta_k(t,\mu), t] -$$

$$- X_i[x_s(t), f_k[x_s(t), t], t] =$$

$$= \sum_{s=1}^{m}\left[\frac{\partial X_i}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_s}\right]\xi_s(t,\mu) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_i^*}{\partial y_k}\eta_k(t,\mu) + R_i(\xi_s)$$

Здесь предпоследний член в правой части представляет собой приращение функции $X_i[x_s, y_k, t]$ по $y_k(t)$, выраженное по теореме о конечном приращении, а $R_i(\xi_s)$ означает члены второго и высших порядков относительно $\xi_s(t,\mu)$. При введенных обозначениях эти уравнения примут вид

$$\frac{d\xi_i(t,\mu)}{dt} = \sum_{s=1}^{m} g_{is}(t)\,\xi_s(t,\mu) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_i^*}{\partial y_k}\eta_k(t,\mu) + R_i(\xi_s)$$

Последующие n уравнений системы уравнений возмущенного движения определятся из равенств

$$\frac{d\eta_j(t,\mu)}{dt} = \frac{dy_j(t,\mu)}{dt} - \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\frac{dx_s(t,\mu)}{dt} - \frac{\partial f_j}{\partial t}$$

На основании этих равенств будем иметь

$$\frac{d\eta_j(t,\mu)}{dt} = \frac{Y_j[x_s(t,\mu), y_k(t,\mu), t]}{\mu} - \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_s}X_s[x_s(t,\mu), y_k(t,\mu), t] -$$

$$- \frac{\partial f_j}{\partial t} = \frac{Y_j[x_s(t) + \xi_s(t,\mu), f_k[x_s(t) + \xi_s(t,\mu), t] + \eta_k(t,\mu), t]}{\mu} -$$

$$- \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_s}X_s[x_s(t) + \xi_s(t,\mu), f_k[x_s(t) + \xi_s(t,\mu), t] + \eta_k(t,\mu), t] -$$

$$- \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_s}X_s[x_s(t), f_k[x_s(t), t], t] - \frac{\partial f_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_s}X_s[x_s(t), f_k[x_s(t), t], t]$$

Для сокращения введем обозначение $x_s(t) + \xi_s(t,\mu) = \alpha^*(t)$; тогда рассматриваемая система n уравнений может быть записана так:

$$\frac{d\eta_j(t,\mu)}{dt} = \frac{Y_j[\alpha_s^*(t), f_k[\alpha_s^*(t), t] + \eta_k(t,\mu), t]}{\mu} + \sum_{l=1}^{m}\gamma_{jl}(t)\,\xi_l(t,\mu) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}^*\eta_k(t,\mu) + R_j^*(\xi_s) + Q_j(t) \qquad \left(\gamma_{jl}(t) = \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_s}g_{sl}(t)\right)$$

Здесь выражение $\gamma_{j1}{}^*\eta_1(t, \mu) + \ldots + \gamma_{ln}{}^*\eta_n(t, \mu)$ заменяет сумму произведений df_j/dx_l на приращение функций $X_s\,[x_s(t),\, y_k(t),\, t]$ по $y_k(t)$, записанное при помощи теоремы о конечном приращении. Символ $R_j{}^*(\xi_s)$ представляет группу членов, содержащих функции $\xi_s(t, \mu)$ второго и высших степеней; $Q(t)$ — функции от t.

Итак, система уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\frac{d\xi_i(t, \mu)}{dt} = \sum_{s=1}^{m} g_{is}(t)\,\xi_s(t, \mu) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i{}^*}{\partial y_k}\eta_k(t, \mu) + R_i(\xi_s) \tag{2.11}$$

$$\frac{d\eta_j(t, \mu)}{dt} = \frac{1}{\mu} Y_j\{\alpha_s{}^*(t),\, f_k\,[\alpha_s{}^*(t), t] + \eta_k(t, \mu),\, t\} + \sum_{l=1}^{m}\gamma_{jl}(t)\,\xi_l(t, \mu) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}{}^*\eta_k(t, \mu) + R_j{}^*(\xi_s) + Q_j(t) \qquad (Y_j\{\alpha_s{}^*,\, f_k\,[\alpha_s{}^*, t],\, t\} = 0)$$

По предположению система (2.8) равномерно асимптотически устойчива, следовательно, для нее существует определенно положительная квадратичная форма $v(t, \xi_s) = v(t, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, полная производная которой, вычисленная в силу системы уравнений (2.8), представляет определенно отрицательную квадратичную форму. Выше сделано предположение, что для системы уравнений (2.9) при каждых фиксированных значениях $\alpha_s = x_s(t) = x_s(\beta)$ и $\beta = t$, $t_0 \leqslant \beta < \infty$ можно указать симметрическую матрицу $A(\alpha_s, \beta)$, имеющую положительные собственные значения и удовлетворяющую равенствам (2.10). Следовательно, для системы уравнений (2.9) существует функция Ляпунова $w(\alpha_s, \beta, \eta_k) = w(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\eta_k = y_k - f_k(\alpha_s, \beta)$, полная производная которой, вычисленная в силу системы уравнений (2.9), удовлетворяет оценкам (16.22), (16.23) и (16.24), указанным в книге [6].

Составим определенно положительную функцию

$$u(t, \xi_i, \eta_j) = v(t, \xi_i) + w\,[x_s(t), t, \eta_j] \tag{2.12}$$

Докажем, что полная производная этой фрнкции $du(t, \xi_s, \eta_k)/dt$, вычисленная в силу системы уравнений возмущенного движения (2.11), при достаточно малых значениях параметра μ будет определенно отрицательной функцией. В самом деле, полная производная функция $u(t, \xi_i, \eta_j)$ в силу системы уравнений (2.11) имеет вид

$$\frac{du(t, \xi_i, \eta_j)}{dt} = \frac{\partial v(t, \xi_i)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial v(t, \xi_i)}{\partial \xi_i}\Big[\sum_{s=1}^{m} g_{is}(t)\,\xi_s(t, \mu) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_i^*}{\partial y_k}\eta_k(t, \mu) + R_i(\xi_s)\Big] + \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial w\,[x_s(t), t, \eta_j]}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt} + \frac{\partial w\,[x_s(t), t, \eta_j]}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w\,[x_s(t), t, \eta_j]}{\partial \eta_j}\Big[\frac{1}{\mu}Y_j(\alpha_s{}^*(t),\, f_k[\alpha_s{}^*(t), t] + \eta_k(t, \mu), t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m}\gamma_{jl}(t)\,\xi_l(t, \mu) + \sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}{}^*\eta_k(t, \mu) + R_j{}^*(\xi_s) + Q_j(t)\Big] \tag{2.13}$$

Учитывая, что для функции $w\,[x_s(t), t, \eta_j]$ выполняются оценки, аналогичные квадратичным формам [6], при условии, что функции $X_i\,[x_s(t),\, y_k(t),\, t]$ и $Y_j\,[x_s, (t),\, y_k(t),\, t]$ имеют ограниченные частные производные, приходим к выводу о справедливости следующей оценки

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial w\,[x_s(t), t, \eta_j]}{\partial x_s} \frac{dx_s}{dt} + \frac{\partial w\,[x_s(t), t, \eta_j]}{\partial t} \leqslant \sum_{k,\,j=1}^{n} d_{kj}\eta_k\eta_j$$

пока $x_i\,(t, \mu)$ и $y_j\,(t, \mu)$ лежат в ограниченной части пространства $x_i\,y_j$.

Рассматривая структуру производной $du\,(t, \xi_i, \eta_j)/dt$ в силу системы уравнений возмущенного движения (2.11), отметим, что хотя она имеет более сложный вид, чем в линейном случае, однако можно провести рассуждения об оценке $du\,(t, \xi_i, \eta_j)/dt$ по тому же плану, что и выше (п. 1, стр. 683), так как хотя здесь придется рассматривать функции, не являющиеся квадратичными формами, однако остаются в силе оценки, характерные для квадратичных форм. Таким образом, придем к выводу об определенной отрицательности $du\,(t, \xi_i, \eta_j)/dt$ вне области $|\xi_i| > M$, $|\eta_j| > M$ при достаточно малом значении параметра $\mu > 0$.

Далее, как и для системы линейных уравнений, можно доказать, что область $|\xi_i| > M$, $|\eta_j| < M$, $M > 0$ стремится к нулю при $\mu \to 0$, а этим самым убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2.1. Если для системы дифференциальных уравнений с малым параметром (2.1) выполняются следующие условия.

1) Система уравнений (2.8), представляющая линейное приближение системы уравнений возмущенного движения вырожденной системы (2.4), равномерно асимптотически устойчива.

2) Для системы уравнений (2.9) при каждых фиксированных значениях α_s и β можно указать постоянные симметричные матрицы $A\,(\alpha_s, \beta)$, равномерно ограниченные по α_s и β и такие, что симметризованная матрица $\{B\}_{jk}$ (2.10) имеет отрицательные собственные значения, удовлетворяющие неравенству $r_i < -\gamma (\gamma = \text{const} > 0)$.

Тогда при достаточно малых значениях параметра μ решение $x_i\,(t, \mu)$, $y_j\,(t, \mu)$, $(x_i\,(t_0, \mu) = a_{i0}, y_j\,(t_0, \mu) = b_{j0})$ системы (2.1) равномерно асимптотически устойчиво относительно малых отклонений x_{i0} и любых отклонений y_{j0}. Для любых наперед заданных чисел $Q > 0$, $\varepsilon > 0$ можно указать число $\mu_0 > 0$ такое, что будут справедливы неравенства

$$|x_i\,(t, \mu) - x_i\,(t)| < \varepsilon, \qquad |y_j\,(t, \mu) - y_j\,(t)| < \varepsilon, \qquad \text{при } t > t, (Q, \varepsilon),$$
$$|y_j\,(t_0, \mu) - y_j\,(t_0)| < Q \tag{2.14}$$

если только $\mu < \mu_0$. При этом число μ_0 можно выбрать столь малым, чтобы t_1 из условий (2.14) отличалось от числа t_0 меньше, чем на любое наперед заданное число.

Поступила 7 III 1961.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
2. Четаев Н. Г. К вопросу об оценках приближенных интегрирований. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
3. Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с малым параметром. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 4.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
5. Малкин И. Г. О построении функций Ляпунова для систем линейных уравнений. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 2.
6. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.