Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ЗАДАЧА МАЙЕРА-БОЛЬЦА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. А. Троицкий
(Ленинград)

Дается описание проблемы Майера — Больца [1] вариационного исчисления в применении к решению задач теории оптимальных систем. Устанавливаются необходимые условия оптимальности процессов и проводится исследование оптимальных режимов в линейных системах.

1. Постановка задачи. Пусть дана система n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$g_s = \dot{x}_s - f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots u_m, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

и конечных соотношений

$$\psi_k = \psi_k(u_1, \ldots, u_m, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r < m) \tag{1.2}$$

описывающих поведение некоторой динамической системы. Здесь $x_1, \ldots, x_n$ — координаты системы, а величины $u_1, \ldots, u_m$, в соответствии с установившейся терминологией, будем называть параметрами управления. Будем считать, что положение системы в начальный момент времени $t = t_0$ задано и определяется равенствами

$$x_s(t_0) = x_s^\circ \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

и потребуем, чтобы значения координат $x_s(T)$ в некоторый, не обязательно фиксированный, момент $t = T$ были связаны зависимостями

$$\Phi_l = \Phi_l[x_1(T), \ldots, x_n(T), T] = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p \leqslant n) \tag{1.4}$$

Поставим задачу оптимизации следующим образом.

Определить функции $x_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие уравнениям (1.1) и начальным условиям (1.3), и параметры управления $u_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$, связанные равенствами (1.2), так чтобы при выполнении в момент времени $t = T$ условий (1.4) функционал

$$J = J[x_1(T), \ldots, x_n(T), T] \tag{1.5}$$

принимал стационарное значение.

В такой постановке задача отличается от ее общей постановки, изученной Л. С. Понтрягиным [3]. Принцип максимума доставляет необходимые условия минимума функционала. Решение проблемы Майера — Больца в аналогичной постановке излагалось в лекциях А. И. Лурье, материал которых существенно использован нами при проведении последующих построений.

Траекторию изображающей точки в $n + m$-мерном пространстве $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_m$, удовлетворяющую сформулированным выше требованиям, будем называть экстремалью.

Существенной особенностью задач оптимизации является наличие ограничений, накладываемых на управления $u_k(t)$ и, вообще говоря на координаты $x_s(t)$. Будем предполагать пока только наличие ограничений на параметры управления. В этом случае неизбежно приходится рассматривать разрывные управления $u_k(t)$. Поэтому в дальнейшем будем считать функции $x_s(t)$ непрерывными, а управления $u_k(t)$ и производные координат $\dot{x}_s(t)$ функциями, имеющими конечное число конечных разрывов непрерывности в изучаемом интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Описанная постановка охватывает весьма обширный класс задач оптимизации. Так, например, при оптимизации процессов по быстродействию функционал J следует предполагать в виде $J = T$ при условиях

$$\Phi_l = x_l(T) - x_l^T = 0 \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

что соответствует задаче оптимизации длительности перехода системы из заданного (1.3) начального состояния в положение, соответствующее значениям координат

$$x_s(T) = x_s^T \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

Эти величины x_s^T могут быть, конечно, равными нулю. В таких задачах время перехода T не фиксировано. При фиксированном T можно, например, оптимизировать значение $x_\alpha(T)$ какой-либо из координат в момент $t = T$, тогда $J = x_\alpha(T)$. Остальные координаты можно считать заданными

$$\Phi_l = x_l(T) - x_l^T = 0 \qquad (l = 1, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

Приходим к классической задаче Майера [2].

Если $J = J[x_1(T), \ldots, x_n(T)]$, то оптимизируется некоторая функция значений координат в фиксированный момент времени $t = T$.

При использовании функционалов вида

$$\int_0^T F[x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t]\,dt$$

можем свести задачу оптимизации к более простой проблеме Лагранжа вариационного исчисления [2]. Этот случай, конечно, также охватывается рассмотренной выше постановкой. Действительно, введя новую координату $x_{n+1}(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$g_{n+1} = \dot{x}_{n+1} - F[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t] = 0$$

придем к задаче оптимизации значения $x_{n+1}(T)$ этой координаты в конечный момент времени $t = T$. Аналогичный прием можно использовать для учета ограничений вида

$$\int_0^T \varphi[x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t]\,dt = c$$

Это ограничение представляется в форме $\Phi_{n+1} = x_{n+1}(T) - c = 0$. Здесь $x_{n+1}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$g_{n+1} = \dot{x}_{n+1} - \varphi[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t] = 0$$

Этот перечень можно было бы значительно расширить.

Приведенные примеры подтверждают высказанное выше положение о возможности постановки большего количества задач оптимизации в описанной форме. При этом, обычно, вид функционала J и ограничений (1.4) отражает физическую сущность задачи оптимизации.

2. Необходимые условия стационарности функционала J. Составим выражение

$$I = J + \int_{t_0}^{T} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(t)\, g_s - \sum_{k=1}^{r} \mu_k(t)\, \psi_k \right\} dt + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \Phi_l \tag{2.1}$$

в котором $\lambda_s(t)$, $\mu_k(t)$ и ρ_l — неопределенные множители Лагранжа. Правая часть его равными нулю слагаемыми отличается от J, так что условия стационарности J и I совпадают.

При вычислении вариации функционала I будем предполагать, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется одна точка $t = t^*$ разрыва непрерывности управлений $u_k(t)$. Наличие нескольких таких точек приведет только к усложнению дальнейших выкладок. Сформулированное предположение разбивает весь интервал $t_0 \leqslant t \leqslant T$ изменения t на два подынтервала $t_0 \leqslant t < t^*$ и $t^* < t \leqslant T$, в которых $u_k(t)$ непрерывны. В соответствии с этим через $x_s^-(t)$, $u_k^-(t)$, $\lambda_s^-(t)$, $\mu_k^-(t)$ обозначим значения введенных выше функций в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$, а через $x_s^+(t)$, $u_k^+(t)$, $\lambda_s^+(t)$ и $\mu_k^+(t)$ — соответствующие значения в интервале $t^* \leqslant t \leqslant T$.

Из постановки задачи следует, что при вычислении вариации функционала I не должно варьировать время t, явно входящее, например, в уравнения (1.1) или (1.2). Однако, наличие ограничений типа (1.4) приводит к необходимости варьирования абсциссы конца T. Поэтому нам придется различать «вариацию на конце», например, $\delta x_s^+(T)$ и «вариацию конца» $\Delta x_s^+(T)$. Для них легко могут быть установлены зависимости

$$\Delta x_s^+(T) = \delta x_s^+(T) + \dot{x}_s^+(T)\,\delta T \tag{2.2}$$

Тогда для вариации ΔJ будем иметь выражение

$$\Delta J = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_s^+(T)}\,\delta x_s^+(T) + \left[\frac{\partial J}{\partial T} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_s^+(T)}\,\dot{x}_s^+(T)\right]\delta T \tag{2.3}$$

Аналогичное равенство получится и для $\Delta\Phi_l$.

Такое же замечание должно быть сделано и относительно вариаций функций в точке $t = t^*$ разрыва непрерывности $u_k(t)$. Здесь также нужно различать «вариацию в точке» $\delta x_s^{\pm}(t)$ и «вариацию точки» $\Delta x_s^{\pm}(t^*)$, которые связаны соотношениями

$$\Delta x_s^{\pm}(t^*) = \delta x_s^{\pm}(t^*) + \dot{x}_s^{\pm}(t^*)\,\delta t^* \tag{2.4}$$

Теперь можно приступить к построению вариации ΔI. Опустив промежуточные преобразования, выпишем ее в окончательном виде

$$\begin{aligned}
\Delta I = \Delta J + \delta \int_{t_0}^{t^*} \left\{\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^- g_s^- - \sum_{k=1}^{r} \mu_k^- \psi_k^-\right\} dt + \int_{t^*}^{T} \left\{\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^+ g_s^+ - \sum_{k=1}^{r} \mu_k^+ \psi_k^+\right\} dt + \\
+ \Delta \sum_{l=1}^{p} \rho_l \Phi_l = \int_{t_0}^{t^*} \left\{\sum_{s=1}^{n} \delta\lambda_s^- \left[\dot{x}_s^- - f_s(x_1^-, \ldots, x_n^-, u_1^-, \ldots, u_m^-, t)\right] - \right. \\
\left. - \sum_{k=1}^{r} \delta\mu_k^- \psi_k(u_1^-, \ldots, u_m^-, t)\right\} dt - \\
- \int_{t_0}^{t^*} \left\{\sum_{s=1}^{n} \delta x_s^- \left[\dot{\lambda}_s^- + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s^-}\lambda_\alpha^-\right] + \sum_{k=1}^{m} \delta u_k^- \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^- \frac{\partial f_s}{\partial u_k^-} + \sum_{\beta=1}^{r} \mu_\beta^- \frac{\partial \psi_\beta}{\partial u_k^-}\right]\right\} dt + \\
+ \int_{t^*}^{T} \left\{\sum_{s=1}^{n} \delta\lambda_s^+ \left[\dot{x}_s^+ - f_s(x_1^+, \ldots, x_n^+, u_1^+, \ldots, u_m^+, t)\right] - \right. \\
\left. - \sum_{k=1}^{r} \delta\mu_k^+ \psi_k(u_1^+, \ldots, u_m^+, t)\right\} dt - \int_{t^*}^{T} \left\{\sum_{s=1}^{n} \delta x_s^+ \left[\dot{\lambda}_s^+ + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s^+}\lambda_\alpha^+\right] + \right. \\
\left. + \sum_{k=1}^{m} \delta u_k^+ \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^+ \frac{\partial f_s}{\partial u_k^+} + \sum_{\beta=1}^{r} \mu_\beta^+ \frac{\partial \psi_\beta}{\partial u_k^+}\right]\right\} dt +
\end{aligned}$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left\{\lambda_s^+(T)+\frac{\partial}{\partial x_s^+(T)}\left[J+\sum_{l=1}^{p}\rho_l\Phi_l\right]\right\}\delta x_s^+(T)+\delta T\frac{d}{dT}\left[J+\sum_{l=1}^{p}\rho_l\Phi_l\right]+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s^-(t^*)-\lambda_s^+(t^*)]\,\Delta x_s(t^*)-\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s^-(t^*)\,\dot{x}_s^-(t^*)-\lambda_s^+(t^*)\,\dot{x}_s^+(t^*)]\,\delta t^* \quad (2.5)$$

Здесь указано, что пределы интегралов можно не варьировать, так как подынтегральные выражения и δt_0 равны нулю. По этой же причине ($\Phi_l = 0$) отсутствуют слагаемые, содержащие $\delta\rho_l$. При получении соотношения (2.5) использованы формулы интегрирования по частям

$$\int_{t_0}^{t^*}\lambda_s^-\,\delta\dot{x}_s^-\,dt=\lambda_s^-(t^*)\,\delta x_s^-(t^*)-\int_{t_0}^{t^*}\dot{\lambda}_s^-(t)\,\delta x_s^-(t)\,dt \quad (2.6)$$

$$\int_{t^*}^{T}\lambda_s^+\,\delta\dot{x}_s^+\,dt=\lambda_s^+(T)\,\delta x_s^+(T)-\lambda_s^+(t^*)\,\delta x_s^+(t^*)-\int_{t^*}^{T}\dot{\lambda}_s^+(t)\,\delta x_s^+(t)\,dt \quad (2.7)$$

зависимости (2.4) и условия непрерывности функций $x_s(t)$

$$x_s^-(t^*)=x_s^+(t^*),\qquad \Delta x_s^-(t^*)=\Delta x_s^-(t^*)=\Delta x_s(t^*) \quad (2.8)$$

Заметим теперь, что вариации $\delta x_s^{\pm}(t)$, $\delta\lambda_s^{\pm}(t)$, $(s=1,\ldots,n)$, $\delta\mu_k^{\pm}(t)$, $(k=1,\ldots,r)$, δt^*, δT, $\Delta x_s(t^*)$, $(s=1,\ldots,n)$, $2(m-r)$ вариаций $\delta u_k^{\pm}(t)$ и $n-p$ вариаций $\delta x_s^+(T)$ будут независимыми. Поэтому можно, определив $2r$ множителей Лагранжа $\mu_k^{\pm}(t)$ и p постоянных ρ_l так, чтобы обратились в нуль коэффициенты при зависимых вариациях $\delta u_k^{\pm}(t)$ и p зависимых вариациях $\delta x_s^+(T)$ соответственно, приравнять нулю коэффициенты при оставшихся независимых вариациях. После этой операции получим систему уравнений

$$\dot{x}_s^{\pm}-f_s(x_1^{\pm},\ldots,x_n^{\pm},u_1^{\pm},\ldots,u_m^{\pm},t)=0 \qquad (s=1,\ldots,n) \quad (2.9)$$

$$\psi_k(u_1^{\pm},\ldots,u_m^{\pm},t)=0 \qquad (k=1,\ldots,r) \quad (2.10)$$

совпадающую с (1.1) и (1.2), уравнения

$$\dot{\lambda}_s^{\pm}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s^{\pm}}\lambda_\alpha^{\pm}=0 \qquad (s=1,\ldots,n) \quad (2.11)$$

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{\pm}\frac{\partial f_s}{\partial u_k^{\pm}}+\sum_{\beta=1}^{r}\mu_\beta^{\pm}\frac{\partial\psi_\beta}{\partial u_k^{\pm}}=0 \qquad (k=1,\ldots,m) \quad (2.12)$$

краевые условия для функций $\lambda_s(t)$

$$\lambda_s^+(T)+\frac{\partial}{\partial x_s^+(T)}\left[J+\sum_{l=1}^{p}\rho_l\Phi_l\right]=0 \qquad (s=1,\ldots,n) \quad (2.13)$$

равенство

$$\frac{d}{dT}\left[J+\sum_{l=1}^{n}\rho_l\Phi_l\right]=0 \quad (2.14)$$

и условия Эрдманна — Вейерштрасса

$$\lambda_s^-(t^*)=\lambda_s^+(t^*) \qquad (s=1,\ldots,n), \qquad \sum_{s=1}^{n}[\lambda_s^-\dot{x}_s^- - \lambda_s^+\dot{x}_s^+]_{t=t^*}=0 \quad (2.15)$$

Эти соотношения должны быть дополнены начальными условиями (1.3), условиями сопряжения (2.8) и равенствами (1.4).

Таким образом, для вычисления $4n + 2m + 2r$ функций $x_s^{\pm}(t)$, $\lambda_s^{\pm}(t)$, $u_k^{\pm}(t)$, $\mu_k^{\pm}(t)$ построены $4n$ дифференциальных уравнений первого порядка (2.9) и (2.11), вводящих $4n$ постоянных интегрирования, $2m$ соотношений (2.12) и $2r$ зависимостей (2.10). Неизвестными остаются $4n$ произвольных постоянных, p множителей ρ_l и величины t^* и T общим числом $4n + p + 2$. Для определения их имеем n начальных условий (1.3), n условий сопряжения (2.8), n краевых условий (2.13), $n + 1$ условий Эрдманна — Вейерштрасса (2.15), p соотношений (1.4) и равенство (2.14). Число их также равно $4n + p + 2$, так что задача разыскания экстремали может быть решена до конца.

3. Другие формы полученных соотношений. Если ввести в рассмотрение лагранжеву функцию

$$L = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s g_s - \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k \tag{3.1}$$

то уравнения (2.11) и (2.12) можно будет записать в форме обычных уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} - \frac{\partial L}{\partial x_s} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\partial L}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots m) \tag{3.2}$$

составленных по этому лагранжиану. Аналогично устанавливаются равенства

$$\partial L/\partial \lambda_s = 0, \quad (s = 1, \ldots, n), \quad \partial L/\partial \mu_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{3.3}$$

дающие уравнения (2.8) и (2.10).

Первые n условий (2.15) Эрдманна — Вейерштрасса можно будет сформулировать тогда в виде требования непрерывности производных лагранжиана

$$(\partial L/\partial \dot{x}_s)^{-}_{t=t^*} = (\partial L/\partial \dot{x}_s)^{+}_{t=t^*} \tag{3.4}$$

в точке разрыва непрерывности $u_k(t)$, а последнее из них (2.15) заменить требованием непрерывности

$$(H_\lambda^{-})_{t=t^*} = (H_\lambda^{+})_{t=t^*} \tag{3.5}$$

функции

$$H_\lambda = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \dot{x}_s = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t) \tag{3.6}$$

на основе которой строится принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем [3,4]. Отметим здесь же, что при наличии ограничений типа (1.2) оптимальные режимы сообщают условный экстремум этому функционалу H_λ, на что указывают равенства (2.12), строящиеся при помощи функции

$$H = H_\lambda + H_\mu = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s f_s + \sum_{\beta=1}^{r} \mu_\beta \psi_\beta = H_\lambda \tag{3.7}$$

Заметим еще, что уравнения (2.9) и (2.11) можно представить в форме

$$\dot{x}_s = \frac{\partial H}{\partial \lambda_s} = \frac{\partial H_\lambda}{\partial \lambda_s} \qquad \dot{\lambda}_s = -\frac{\partial H}{\partial x_s} = -\frac{\partial H_\lambda}{\partial x_s} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

используемой, обычно, при обосновании принципа максимума. Аналогичный вид приобретают и уравнения (2.10) и (2.12):

$$\partial H / \partial u_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, m), \qquad \partial H / \partial \mu_k = 0 \quad (k = 1, \ldots r) \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь условие (2.14). После элементарных преобразований его можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[J + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \Phi_l\right] = H_\lambda |_{t=T} = H|_{t=T} \tag{3.10}$$

В случае, когда функции f_s и ψ_k не зависят явно от времени t, уравнения (2.9) и (2.11) допускают первый интеграл

$$H = h = \text{const}$$

Это легко устанавливается из рассмотрения выражения

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_s}\frac{\partial H}{\partial \lambda_s} - \frac{\partial H}{\partial \lambda_s}\frac{\partial H}{\partial x_s}\right) \equiv 0 \tag{3.11}$$

Тогда вместо (3.10) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[J + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \Phi_l\right] = h = \text{const} \tag{3.12}$$

Наконец, приведем еще несколько необычную матричную форму записи соотношений (2.9) — (2.15). Введем [6] матрицы-столбцы x и λ порядка n, а также столбцы u и μ порядка m и r соответственно

$$x = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad \lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$
$$u = \{u_1, \ldots, u_m\}, \qquad \mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_r\} \tag{3.13}$$

Кроме того, построим матрицы-столбцы f и ψ порядка n и r соответственно по правилу

$$f = \{f_1, \ldots, f_n\}, \qquad \psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_r\} \tag{3.14}$$

и матрицы-столбцы дифференциальных операторов

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}, \qquad \frac{\partial}{\partial u} = \left\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_m}\right\} \tag{3.15}$$

порядка n и m. Уравнения (2.9) — (2.12) запишутся теперь в форме

$$\dot{x} - f = 0, \quad \psi = 0, \quad \dot{\lambda} + \frac{\partial}{\partial x} f'\lambda = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}[f'\lambda + \psi'\mu] = 0 \tag{3.16}$$

Здесь штрихом обозначена операция транспонирования. Начальные условия представятся равенством

$$x(t_0) = x^\circ \tag{3.17}$$

Здесь x° — матрица-столбец начальных значений x_s°. Аналогичную запись получим для условий сопряжения (2.8) и (2.15)

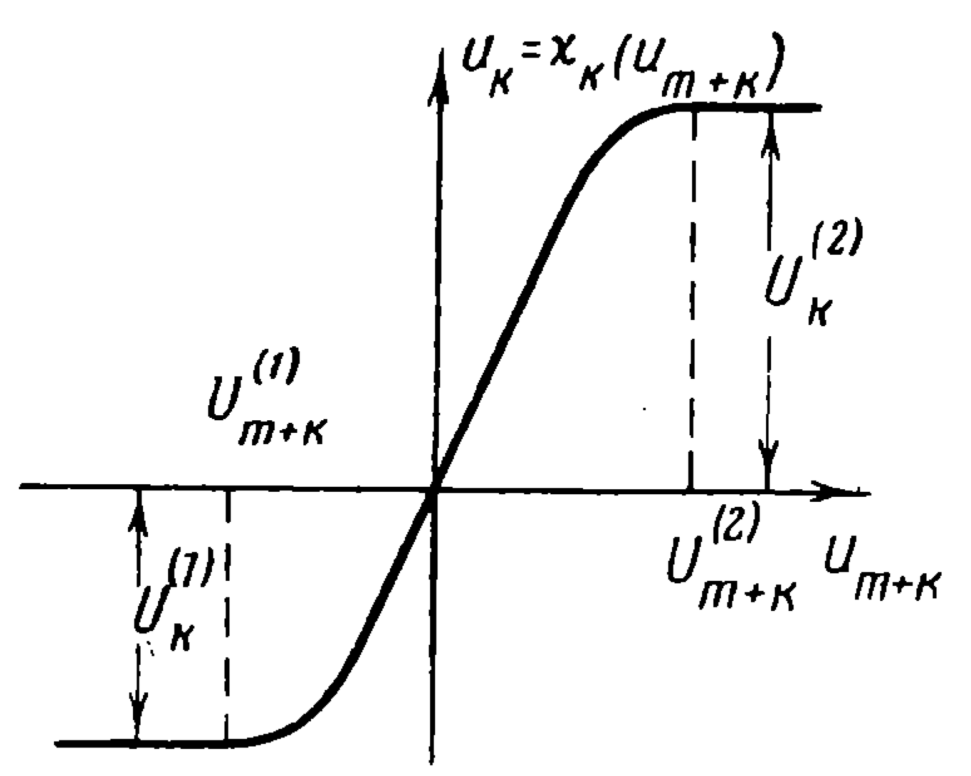
$$x^-(t^*) = x^+(t^*), \qquad \lambda^-(t^*) = \lambda^+(t^*) \tag{3.18}$$

Краевые условия (2.13) запишутся в форме

$$\lambda(T) + \frac{\partial}{\partial x(T)}\{J + \rho'\Phi\} = 0, \quad (\rho = \{\rho_1, \ldots, \rho_p\},\ \Phi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_p\}) \qquad (3.19)$$

Здесь ρ и Φ — матрицы-столбцы порядка p. Соотношение (2.14) будет иметь вид

$$\frac{d}{dT}[J + \rho'\Phi] = 0 \qquad (3.20)$$



Фиг. 1

а вместо равенства (2.15) будем иметь

$$(\lambda'\dot{x})^-_{t=t^*} - (\lambda'\dot{x})^+_{t=t^*} = 0 \qquad (3.21)$$

Заметим попутно, что для H нетрудно получить следующее представление:

$$H = H_\lambda + H_\mu = \lambda' f + \mu' \psi \qquad (3.22)$$

и при этом сохранить прежнюю формулировку (3.5) условия (3.21).

4. Линейные дифференциальные уравнения. Рассмотрим задачу оптимизации для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [6]

$$\dot{x}_s = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{s\alpha} x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m'} h_{s\beta} u_\beta \qquad (4.1)$$

при помощи функционала J общего вида (1.5) при наличии ограничений

$$U_\beta^{(1)} \leqslant u_\beta \leqslant U_\beta^{(2)} \qquad (\beta = 1, \ldots, m') \qquad (4.2)$$

наложенных на управления u_β. Чтобы учесть их, введем [7,8] функции

$$u_\beta = \chi_\beta(u_{m'+\beta}) \qquad (\beta = 1, \ldots, m')$$

удовлетворяющие требованиям

$$\frac{d\chi_\beta}{du_{m'+\beta}} \neq 0, \quad U_\beta^{(1)} < \chi_\beta(u_{m'+\beta}) < U_\beta^{(2)} \quad \text{при } U_{m'+\beta}^{(1)} < u_{m'+\beta} < U_{m'+\beta}^{(2)} \qquad (4.3)$$

$$\frac{d\chi_\beta}{du_{m'+\beta}} = 0 \quad \begin{pmatrix} \chi(u_{m'+\beta}) = U_\beta^{(1)} \text{ при } u_{m'+\beta} \leqslant U_{m'+\beta}^{(1)} \\ \chi(u_{m'+\beta}) = U_\beta^{(2)} \text{ при } u_{m'+\beta} \geqslant U_{m'+\beta}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

$$(\beta = 1, \ldots, m')$$

Примерный график такой функции показан на фигуре (где $m = m'$). Включим $u_{m'+\beta}$ ($\beta = 1, \ldots, m'$) в число управлений, т. е. будем считать $m = 2m'$, и составим соотношения

$$\psi_k = u_k - \chi_k(u_{m'+k}) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m') \qquad (4.5)$$

Теперь задача оптимизации имеет постановку, в точности совпадающую с описанной в п. 1. Более того, при помощи функций χ_k и условий (4.5) по существу избавляемся от ограничений (4.2), перейдя от замкнутой области изменения управлений $u_1, \ldots, u_{m'}$ к открытой области изменения управлений $u_1, \ldots, u_{m'}, u_{m'+1}, \ldots, u_m$.

Перепишем уравнения (4.1) и (4.5) в матричной форме

$$\dot{x} = bx + hu_{\rm I}, \qquad \psi = u_{\rm I} - \chi(u_{\rm II}) = 0 \qquad (4.6)$$

Здесь x, ψ, $u = \{u_{\rm I} \mid u_{\rm II}\}$ имеют прежний смысл (см. (3.13) и (3.14)),

$$u_{\rm I} = \{u_1, \ldots, u_{m'}\}, \qquad u_{\rm II} = \{u_{m'+1}, \ldots, u_m\} \qquad (4.7)$$

подматрицы [5] столбца u. Через

$$b = \begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad h = \begin{Vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1m'} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & \dots & h_{nm'} \end{Vmatrix} \tag{4.8}$$

обозначены квадратная матрица порядка u и прямоугольная матрица размеров $n \times m'$. При помощи соотношения (3.14) составим уравнение

$$\dot{\lambda} + b'\lambda = 0 \tag{4.9}$$

определяющее столбец λ, а затем, представив матрицу дифференциальных операторов $\partial/\partial u$ в клеточном виде

$$\frac{\partial}{\partial u} = \left\{\frac{\partial}{\partial u_{\mathrm{I}}} \,\vdots\, \frac{\partial}{\partial u_{\mathrm{II}}}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_{m'}} \,\vdots\, \frac{\partial}{\partial u_{m'+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_m}\right\} \tag{4.10}$$

на основании равенства (3.16) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial u_{\mathrm{I}}}[x'b + u_{\mathrm{I}}'h']\lambda + \frac{\partial}{\partial u_{\mathrm{I}}}[u_{\mathrm{I}}' - \chi'(u_{\mathrm{II}})]\mu = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u_{\mathrm{II}}}\chi'(u_{\mathrm{II}})\mu = 0 \tag{4.11}$$

или

$$h'\lambda + \mu = 0 \qquad \frac{\partial \chi'(u_{\mathrm{II}})}{\partial u_{\mathrm{II}}}\mu = 0 \tag{4.12}$$

при этом

$$\frac{\partial \chi'(u_{\mathrm{II}})}{\partial u_{\mathrm{II}}} = \begin{Vmatrix} \dfrac{d\chi_1}{du_{m'+1}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dfrac{d\chi_{m'}}{du_{2m'}} \end{Vmatrix} \tag{4.13}$$

будет диагональной.

Решение уравнения (4.6) имеет следующий вид [9]

$$x = M(t - t_0)x^\circ + \int_{t_0}^{t} M(t - \tau)hu_{\mathrm{I}}(\tau)\,d\tau \qquad (M(t) = e^{bt}) \tag{4.14}$$

Аналогичной формулой

$$\lambda(t) = M'(T - t)\lambda(T) \tag{4.15}$$

дается решение уравнения (4.9). Оно удовлетворяет краевому условию при $t = T$. Подставив его в соотношение (4.12), будем иметь

$$h'M'(T - t)\lambda(T) + \mu = 0$$

Отсюда находим [1]

$$\mu = -h'M'(T - t)\lambda(T) \not\equiv 0 \text{ при } \lambda(T) \neq 0 \tag{4.16}$$

причем отличны от нуля все элементы столбца μ.

Теперь на основании равенств (4.12) и (4.13) получим

$$\mu_k(t)\frac{d\chi_k}{du_{m'+k}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\chi_k}{du_{m'+k}} = 0 \quad (k = 1, \dots, m') \tag{4.17}$$

так как все $\mu_k(t)$ не равны тождественно нулю: $\mu_k(t) \not\equiv 0$ $(k = 1, \dots, m')$.

Следовательно, оптимальные режимы в линейных системах обладают важным свойством: параметры управления $u_k(t)$ в таких режимах при-

[1] Предполагается, что уравнение (4.6) невырожденное [6].

нимают только крайние значения

$$u_k = U_k^{(1)}, \quad \text{или} \quad u_k = U_k^{(2)} \qquad (k = 1, \ldots, m') \tag{4.18}$$

Заметим, что решение (4.14) уравнения (4.6) при $u_1 = U = \text{const}$ принимает вид

$$x(t) = M(t - t_0)\, x^\circ + N(t - t_0)\, hU \qquad \left(N(t) = \int_0^t M(\tau)\, d\tau\right) \tag{4.19}$$

Обратимся к требованию непрерывности (3.5) функции H_λ, имеющей в рассматриваемой задаче вид

$$H_\lambda = \lambda' bx + \lambda' hu_1$$

Разрывным в ней может быть только второе слагаемое

$$\lambda' hu_1 = \sum_{k=1}^{m'} (\lambda' h_k)\, u_k$$

Здесь через h_k обозначен k-й столбец матрицы h. Поэтому разрывы непрерывности управления $u_k(t)$ могут иметь место только в моменты $t = t^*$ обращения в нуль функции

$$\lambda'(t^*)\, h_k = 0 \tag{4.20}$$

и при этом рвется только управление $u_k(t)$, если, конечно, среди столбцов h_α нет другого, для которого в этот же момент $t = t^*$ выполняется равенство вида (4.20).

Установленные результаты дают возможность доказать известную [10] теорему об n интервалах. Для этого нужно рассмотреть уравнения (4.1) с одним управлением $u_1 = u$ в предположении, что среди собственных значений матрицы b нет комплексных. В этом случае график функции $\lambda'(t)\, h_1 = \lambda'(t)\, h$ имеет не более $n - 1$ пересечений с осью времени t в любом конечном интервале изменения времени. Следовательно, в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ управление $u(t)$ не может иметь более $n - 1$ разрывов непрерывности и весь этот интервал разбивается на n подынтервалов, в каждом из которых управление $u(t)$ принимает одно из своих крайних значений $U^{(1)}$ или $U^{(2)}$.

Повторив аналогичные рассуждения для систем, имеющих m' управлений $u(t)$ $(k = 1, \ldots, m')$, придем к обобщению этой теоремы. Для таких систем, все корни характеристического уравнения которых вещественны, интервал $t_0 \leqslant t \leqslant T$ в оптимальных режимах разбивается на $m'n$ подынтервалов, в каждом из которых каждое из управлений принимает одно из своих крайних значений $U_k^{(1)}$ или $U_k^{(2)}$.

Отметим, что полученные результаты справедливы при любом виде функционала J. Некоторые из них, по-видимому, могут быть распространены и на нелинейные системы [8].

Здесь так же, как и в следующем п. 5, приведены только результаты, справедливые для линейных систем. Полное решение задачи оптимизации линейных систем по быстродействию дано в статье Р. В. Гамкрелидзе[6].

5. **Примеры**. Рассмотрим задачу оптимизации длительности для линейной системы

$$\dot{x} = bx + hu \tag{5.1}$$

с одним управляющим параметром u. В этом уравнении x и h матрицы-столбцы порядка n и b — квадратная матрица того же порядка n. Функционал I следует взять в виде $J = T$, а условия (1.4) можно представить равенством

$$\Phi = x(T) - x^T = 0 \tag{5.2}$$

Начальные условия для x даются соотношением (3.17), а краевые условия для функций $\lambda_s(t)$ можно записать в виде одной матричной формулы $\lambda(T) = -\rho$, на основании которой и равенства (4.17) будем иметь

$$\lambda(t) = -M'(T-t)\rho \tag{5.3}$$

так что для определения моментов $t_1, \ldots, t_{q-1}$ переключения управления $u(t)$ получим соотношение

$$\lambda'(t_i)h = -\rho' M(T-t_i)h = 0 \tag{5.4}$$

Весь интервал $t_0 \leqslant t \leqslant T$ разбивается на q подынтервалов $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \ldots$, $t_{q-1} \leqslant t \leqslant t_q = T$ и для каждого из них можно построить решение

$$t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}, \qquad x(t) = M(t-t_i)x_i + N(t-t_i)hU$$

в котором обозначено $x_i = x(t_i)$ и считается, что $U = \text{const}$. В конце i-го интервала будем иметь

$$x_{i+1} = x(t_{i+1}) = M(t_{i+1}-t_i)x_i + N(t_{i+1}-t_i)hU \tag{5.5}$$

Предположим теперь для определенности, что в первом подынтервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ параметр управления $u(t) = U_1$. Во втором подынтервале он будет равен U_2, в третьем — опять U_1 и т. д. Выписав для каждого подынтервала равенства вида (5.5) и исключив из них x_i, $i = 1, \ldots, q-1$, придем к следующей формуле

$$x_q = x_{2q'} = x(T) = M(T-t_0)x^\circ +$$

$$+\sum_{i=1}^{q'} M(T-t_{2i-1})N(t_{2i-1}-t_{2i-2})hU_1 + \sum_{i=1}^{q'} M(T-t_{2i})N(t_{2i}-t_{2i-1})hU_2 = x^T \tag{5.6}$$

справедливой при четном $q = 2q'$, а для нечетного $q = 2q'+1$ будем иметь

$$x_q = x_{2q'+1} = x(T) = M(T-t_0)x^\circ + \tag{5.7}$$

$$+\sum_{i=1}^{q'+1} M(T-t_{2i-1})N(t_{2i-1}-t_{2i-2})hU_1 + \sum_{i=1}^{q'} M(T-t_{2i})N(t_{2i}-t_{2i-1})hU_2 = x^T$$

Аналогичные равенства нужно было бы выписать для случая, когда в первом подынтервале $u = U_2$. Они найдутся из соотношений (5.6) и (5.7) после замены в них U_1 на U_2 и наоборот. В случае, когда среди собственных значений матрицы b нет нулевого, матрица $N(t)$ может быть представлена в виде

$$N(t) = b^{-1}[M(t) - I]$$

где I — единичная матрица. Тогда, например, вместо равенства (5.6) будем иметь

$$x(T) = x_{2q'} = M(T-t_0)x^\circ + b^{-1}M(T-t_0)hU_1 - b^{-1}hU_2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{q'} M(T-t_{2i-1})b^{-1}h(U_2-U_1) + \sum_{i=1}^{q'-1} M(T-t_{2i})b^{-1}h(U_1-U_2) = x^T \tag{5.8}$$

Если среди собственных значений матрицы b нет кратных, то [5]

$$b = c\Lambda c^{-1}, \qquad M(t) = e^{bt} = ce^{\Lambda t}c^{-1}$$

где Λ — диагональная матрица собственных значений λ_i матрицы b. Формула (5.8) перепишется в виде

$$c^{-1}x(T) = e^{\Lambda(T-t_0)}z^{\circ} + e^{\Lambda(T-t_0)}\Lambda^{-1}h^{\circ}W_1 - \Lambda^{-1}h^{\circ}U_2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{q'} e^{\Lambda(T-t_{2i-1})}\Lambda^{-1}h^{\circ}(U_2-U_1) + \sum_{i=1}^{q'-1} e^{\Lambda(T-t_{2i})}\Lambda^{-1}h^{c}(U_1-U_2) = z^T$$

Здесь

$$z^{\circ} = c^{-1}x^{c}, \qquad z^T = c^{-1}x^T, \qquad h^{\circ} = c^{-1}h$$

В скалярной форме получим

$$e^{\lambda_j(T-t_0)}z_j^{c} + e^{\lambda_j(T-t_0)}\frac{h_j^{\circ}}{\lambda_j}U_1 - \frac{h_j^{\circ}}{\lambda_j}U_2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{q'}\frac{h_j^{\circ}}{\lambda_j}e^{\lambda_j(T-t_{2i-1})}(U_2-U_1) + \sum_{i=1}^{q'-1}\frac{h_j^{\circ}}{\lambda_j}e^{\lambda_j(T-t_{2i})}(U_1-U_2) = z_j^T$$

Здесь через z_j°, z_j^T и h_j° обозначены j-е элементы соответствующих столбцов. Аналогичным способом преобразуются к скалярному виду и остальные соотношения.

Для того чтобы решить задачу оптимизации длительности, нужно подобрать элементы ρ_i столбца ρ, определяющие момент переключения управления $u(t)$, так, чтобы при $t = T$ выполнялись соотношения вида (5.6) или (5.7). Однако в некоторых случаях этого длинного процесса решения можно избежать и ограничиться только решением уравнений (5.6) или (5.7).

Для пояснения сказанного рассмотрим простую задачу оптимизации длительности при ограничении

$$U_1 \leqslant \ddot{x} \leqslant U_2 \tag{5.9}$$

Ее можно свести к изученной выше, если обозначить

$$x_1 = x, \qquad x_2 = \dot{x} \tag{5.10}$$

и перейти к уравнениям

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u \qquad (U_1 \leqslant u(t) \leqslant U_2) \tag{5.11}$$

Матрицы b, $M(t)$, $N(t)$ для такой системы имеют вид

$$b = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad M(t) = \begin{Vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad N(t) = \begin{Vmatrix} t & {}^1/_2 t^2 \\ 0 & t \end{Vmatrix} \tag{5.12}$$

После подстановки их в равенство (считаем $t_0 = 0$)

$$x_2 = M(T)x^{\circ} + M(T-t_1)N(t_1)hU_1 + N(T-t_1)hU_2 = x^T$$

получающееся из (5.6) при $q' = 1$, будем иметь два скалярных уравнения

$$\begin{gathered} x_1^{\circ} + Tx_2^{\circ} + \tfrac{1}{2}T^2U_1 + \tfrac{1}{2}(T-t_1)^2(U_2-U_1) = x_1^T \\ x_2^{\circ} + TU_1 + (T-t_1)(U_2-U_1) = x_2^T \end{gathered} \tag{5.13}$$

решение которых имеет вид

$$T = -\left(\frac{x_2^{\circ}}{U_1} - \frac{x_2^T}{U_2}\right) \mp \left(\frac{1}{U_1^2}\left(1-\frac{U_1}{U_2}\right)\left[(x_2^{\circ})^2 - \frac{U_1}{U_2}(x_2^T)^2 - 2U_1(x_1^{c} - x_1^T)\right]\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.14}$$

$$T - t_1 = \frac{x_2^T}{U_2} \mp \frac{1}{U_2-U_1}\left(\frac{1}{U_1^2}\left(1-\frac{U_1}{U_2}\right)\left[(x_2^{\circ})^2 - \frac{U_1}{U_2}(x_2^T)^2 - 2U_1(x_1^{\circ} - x_1^T)\right]\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.15}$$

Из значений T, определяемых равенством (5.14), нужно выбрать меньшее. При помощи полученных выражений (5.14) и (5.15) может быть решена и задача синтеза оптимальной системы. При этом придем к хорошо известным результатам [10], которые здесь не приводятся. Таким образом, в изученном простом случае задача оптимизации может быть решена без использования соотношения (5.4).

Рассмотрим еще задачу оптимизации для линейной системы (4.1) при помощи функционала

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_i(T)\,x_k(T) \tag{5.16}$$

являющегося определенной квадратичной формой значений координат $x_s(T)$ в фиксированный момент времени $t = T$. Никаких ограничений на эти значения не накладывается. В этом случае

$$\lambda(T) = -\frac{\partial}{\partial x(T)} J = -ax(T) \tag{5.17}$$

и после повторения описанных выше выкладок придем к следующему уравнению

$$x'(T)\,aM(T - t_j)\,h = 0 \tag{5.18}$$

определяющему моменты t_j переключения управления $u(t)$. Подставив в него $x(T)$, например, из соотношения (5.6), будем иметь

$$\Big\{x^{\circ\prime}M'(T - t_0) + U_1 \sum_{i=1}^{q'} h'N'(t_{2i-1} - t_{2i-2})\,M'(T - t_{2i-1}) +$$

$$+ U_2 \sum_{i=1}^{q'} h'N'(t_{2i} - t_{2i-1})\,M'(T - t_{2i})\Big\}\,aM(T - t_j)\,h = 0 \tag{5.19}$$

$$(j = 1, \ldots, 2q' - 1)$$

Аналогичным способом находятся уравнения, соответствующие нечетному $q = 2q' + 1$ (5.7) или другому порядку включения управления.

В разобранном выше примере системы второго порядка (5.11) $q' = 1$. Из (5.19) получим одно уравнение

$$\frac{1}{2}a_{11}(U_2 - U_1)(T - t_1)^3 + \frac{3}{2}a_{12}(U_2 - U_1)(T - t_1)^2 +$$

$$+ \Big[\Big(x_1^\circ + Tx_2^\circ + \frac{1}{2}T^2U_1\Big)a_{11} + (x_2^\circ + TU_1)\,a_{12}\Big](T - t_1) + \tag{5.20}$$

$$+ a_{12}\Big(x_1^\circ + Tx_2^\circ + \frac{1}{2}T^2U_1\Big) + a_{22}(x_2^\circ + TU_1) = 0$$

которое определяет момент переключения управления $u(t)$.

При минимизации квадрата значения координаты $x^2(T) = x_1^2(T)$, величины $a_{12} = a_{22} = 0$ и придем к формуле

$$(T - t_1)^2 = \frac{1}{U_1 - U_2}(2x_1^\circ + 2Tx_2^\circ + T^2U_1) \tag{5.21}$$

при помощи которой легко вычисляется t_1.

В заключение автор считает своим долгом принести благодарность А. И. Лурье за помощь при выполнении работы

Поступила 16 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. ИИЛ, М., 1950.
2. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. Л.—М., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941.
3. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. Усп. матем. наук, 1959, т. XIV, вып. I (85), стр. 3—20.
4. Розоноэр А. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. ч. I, А. и Т., 1959, т. XX, № 10, 1320—1334; ч. II, 1959, т. XX, № 11, 1441—1458; ч. III, 1959, т. XX, № 12, 1561—1578.
5. Фрезер Р., Дункан В. и Коллар А. Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике. ИИЛ, М., 1950.
6. Гамкрелидзе Р. В. Теория патимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Изв. АН СССР, сер. математическая, 1958, т. 22, № 4, стр. 449—474.
7. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. ч. I, А. и Т., 1960, т. XXI, № 4, 436—441; ч. II, А. и Т., 1960, т. XXI, № 5, 561—568; ч. III, А. и Т., 1960, т. XXI, № 6, 661—665.
8. Miele A. General Variational Theory of the flight Paths of Rocket Powered Aircraft, Missiles and Satillite Carriers. Astronaut. acta, 1958, 4, № 4, 264—288.
9. Троицкий В. А. К задаче об автоколебаниях в системах автоматического регулирования с двумя сервомоторами постоянной скорости. ПММ, 1956, т. XX, вып. 5, стр. 627—638.
10. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, М., 1959.