Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЙ И СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЧАСТИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Если важно, чтобы некоторая механическая система находилась в равновесии, то почти всегда надо подобрать параметры системы так, чтобы это равновесие было не только устойчивым, но и асимптотически устойчивым. Для этого в некоторые звенья системы вводятся демпфирующие устройства, обеспечивающие затухание колебаний. Может, однако, оказаться, что для сообщения асимптотической устойчивости равновесию механической системы достаточно ввести демпфирование не по всем координатам, а только лишь по их части. Таким же свойством могут обладать и установившиеся движения. Такие системы, подверженные действию диссипативных сил с неполной диссипацией, однако асимптотически] устойчивые, изучаются в настоящей работе.

В работе, кроме широко известных в литературе теорем об асимптотической устойчивости [1,2], применяется теорема об асимптотической устойчивости, данная в монографии [3], частный, но основной случай этой теоремы был сформулирован в статье [4]; именно эта теорема позволила продвинуться вперед в изучении проблемы. Заметим, что эту идею высказал Н. Г. Четаев несколько ранее и продемонстрировал ее на частном примере [2].

Предварительно напомним теорему Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$dx_i / dt = X_i (x_1, \ldots, x_n, t) \tag{0.1}$$

правые части которых $X_i (x_i, t)$ будут периодическими функциями времени t периода θ (или не зависят явно от времени), определенными и непрерывными в области

$$\sup (|x_1| + \ldots + |x_n|) = \|x_s\| \leqslant H; \quad H = \text{const}, \text{ или } H = \infty \tag{0.2}$$
$$(-\infty < t < +\infty)$$

Кроме того, предполагаем, что в каждой области $\|x_s\| < H_\mu < H$ функции X_i удовлетворяют условиям Липшица по переменным x_j, т. е.

$$|X_i (x_i'', t) - X_i (x_i', t)| < L_\mu \| x_i'' - x_i' \|$$

Теорема. Если уравнения возмущенного движения таковы, что возможно построить функцию $v(x, t)$ (периодическую по времени t с периодом θ или не зависящую явно от времени), которая является определенно положительной, допускает бесконечно малый высший предел в области (0.2) и удовлетворяет неравенству

$$\sup (v \text{ в области } \|x_s\| \leqslant H_0, \quad 0 \leqslant t < \theta) < \inf (v \text{ при } \|x_s\| = H_1) \ (H_0 > H_1 > H)$$

и если при этом функция такова, что ее производная удовлетворяет следующим условиям:

1) Производная $dv/dt < 0$ в области (0.2).

2) Производная dv/dt может быть равна нулю лишь в точках множества M, не содержащего целиком полутраекторий системы (2.1) $x(x_0, t_0, t)$, $0 < t < \infty$ (за исключением решения $x_i = 0$), то решение $x_i = 0$ асимптотически устойчивое и область $\|x_s\| < H_0$ лежит в области притяжения точки $x = 0$".

1. Рассмотрим голономную механическую систему со стационарными связями, подверженную действию сил, допускающих не зависимую от времени силовую функцию. Допустим, что система находится в положении равновесия, причем совокупность членов второго порядка в разложении силовой функции U представляет собой квадратичную форму

$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} q_i q_j$$

определенно отрицательную по отношению к $q_1, \ldots, q_n$ — вариациям голономных и стационарных координат системы в окрестности положения равновесия. Такое равновесие согласно теореме Лагранжа будет устойчивым.

Пусть на систему действуют также диссипативные силы $R_{n-k+1}, \ldots, R_n$ с частичной диссипацией, по последним $n-k$ координатам $q_{n-k+1}, \ldots, q_n$ такие, что

$$R_{n-k+j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2} \sum_{ij=n-k+1}^{n} 0_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{1}{2} F$$

Здесь F — определенно отрицательная квадратичная форма $\dot{q}_{n-k+1}, \ldots, \dot{q}_n$ с постоянными коэффициентами.

Если $\delta^2 T$ есть совокупность членов второго порядка в разложении кинетической энергии, то в силу (1.1)

$$\frac{d}{dt}(\delta^2 T - \delta^2 U) = F$$

и движение устойчиво, и асимптотически устойчиво по отношению к $\dot{q}_{n-k+1}, \ldots, \dot{q}_n$ [5]. Согласно теореме Е. А. Барбашина, Н. Н. Красовского движение будет устойчиво асимптотически, если уравнения (1.1) не имеют траекторий, целиком лежащих в области $q_{n-k+1} = q_{n-k+1}^\circ, \ldots, q_n = q_n^\circ$. Если такой траектории не имеют уравнения первого приближения, то движение будет асимптотически устойчиво в силу системы первого приближения, которую возьмем в форме разрешенной относительно $\ddot{q}_i$

$$\ddot{q}_i = a_{i1} q_1 + \ldots + a_{in} q_n + \sum_{j=n-k+1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \beta_{ij}' \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1.1)$$

Эти уравнения имеют указанное частное решение, если у первых $n-k$ уравнений, где положены $q_{n-k+1}, \ldots, q_n$ постоянными, есть частное решение, удовлетворяющее уравнениям

$$\ddot{q}_i = a_{i1} q_1 + \ldots + a_{in-k} q_{n-k} + a_{in-k+1} q_{n-k+1}^\circ + \ldots + a_{in} q_n^\circ$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-k)$$

$$0 = a_{i1} q_1 + \ldots + a_{in-k} q_{n-k} + a_{in-k+1} q_{n-k+1}^\circ + \ldots + a_{in} q_n^\circ \qquad (1.2)$$
$$(i = n-k+1, \ldots, n)$$

Любое частное решение первых $n-k$ уравнений при $q_n = q_n^{\circ}, \ldots, q_{n-k+1} = q_{n-k+1}^{\circ}, \ldots$ представимо в виде суммы. Это частное решение сложится из решения системы

$$\ddot{q}_i = a_{i1}q_1 + \ldots + a_{in-k}q_{n-k}$$

и некоторых постоянных слагаемых $q^{\circ}_1, \ldots, q^{\circ}_{n-k}$, которые найдутся из уравнений

$$a_{i1}q_1^{\circ} + \ldots + a_{in-k}q_{n-k}^{\circ} = -a_{in-k+1}q_{n-k+1}^{\circ} - \ldots - a_{in}q_n^{\circ} \qquad (1.3)$$
$$(i = 1, \ldots, n-k)$$

Они всегда найдутся и притом единственным образом, так как определитель последней системы заведомо не нуль и $\delta^2 U$, по предположению, определенно отрицательная. Эти постоянные $q_1^{\circ}, \ldots, q_{n-k}^{\circ}$ необходимо должны удовлетворять системе

$$a_{i1}q_1^{\circ} + \ldots + a_{in}q_n^{\circ} = 0 \quad (i = n-k+1, \ldots, n) \qquad (1.4)$$

и, следовательно, должны удовлетворять системе (1.3), (1.4). Поэтому $q_i^{\circ} = 0$ все нули, так как определитель системы не нуль.

Значит вопрос свелся к существованию у системы

$$\ddot{q}_i = a_{i1}q_1 + \ldots + a_{in-k}q_{n-k} \quad (i = 1, \ldots, n-k)$$

решения, лежащего в области

$$a_{i1}q_1 + \ldots + a_{in-k}q_{n-k} = 0 \quad (i = n-k+1, \ldots, n)$$

Если такое решение существует, то вдоль него необходимо

$$= a_{i1}(a_{11}q_1 + \ldots + a_{1n-k}q_1) + \ldots + a_{in-k}(a_{n-k,1}q_1 + \ldots + a_{n-k,n-k}q_{n-k})$$
$$(i = n-k+1, \ldots, n) \qquad (1.5)$$

и, кроме того, равны нулю все линейные формы, полученные двукратным, четырехкратным,..., $2n$-кратным дифференцированием их в силу первых $n-k$ уравнений, где $q_{n-k+1} = 0, \ldots, q_n = 0$. Эти формы суть

$$\sum_{i,j,s=1}^{n-k} a_{i1}a_{j1}a_{s1}q_1 + \ldots + a_{in-k}a_{jn-k}a_{sn-k}q_{n-k} = 0 \qquad (1.6)$$

$$\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{\mu+2n-k}}^{n-k} a_{\nu_1 1}a_{\nu_2 1}a_{\nu_3 1}, \ldots, a_{\nu_{\mu+2}1}q_1 + \ldots + a_{\nu_1 n-k}, \ldots, a_{\nu_{\mu+2n-k}}q_{n-k} = 0$$

Если среди них найдется $n-k$ независимых, то это значит, что такого нетривиального решения нет и движение асимптотически устойчиво, так как асимптотическая устойчивость в силу первого приближения может быть только тогда, когда все характеристические показатели этой системы имеют отрицательные вещественные части.

Пусть $q_{n-k+1}, \ldots, q_n$ выражаются через нормальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ по формулам

$$q_i = b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n \qquad (i = n-k+1, \ldots, n) \qquad (1.7)$$

Уравнения первого приближения имеют в нормальных координатах вид

$$\ddot{x}_i = \lambda_i x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$$

причем $dF/\partial \dot{x}_i$ уничтожаются, когда $\dot{q}_{n-k+1} = \ldots = \dot{q}_n = 0$. Дифференцируя каждую из линейных форм (1.7) $2p_i$ раз, получим уравнения

$$b_{i1}\lambda_1{}^l x_1 + \ldots + b_{in}\lambda_n{}^l x_n = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p_i;\ i = n-k+1, \ldots, n) \quad (1.8)$$

Нетрудно заметить, что уравнения (1.2), (1.5) в совокупности с $q_{n-k+1} = \ldots = q_n = 0$, (1.6) эквивалентны (1.7) в совокупности с (1.8), так как будут следствиями одних и тех же уравнений, продифференцированных несколько раз в силу одной и той же системы дифференциальных уравнений.

Любой из миноров порядка p_i, i-ой группы уравнений (1.7), (1.8) имеют вид детерминанта Вандермонда [6]

$$\det \| b_{ij}{}^{p_i}\lambda_j{}^{p_i p_i} \| = \prod_{k<j=j_1,\ldots,jp_1} b_{ij}(\lambda_i - \lambda_k) \qquad (p_i = 0,1,\ldots, n-1)$$

Разберем вначале случай $k = 1$. Дифференцируя $2n - 2$ раз уравнение

$$b_{n1}x_1 + \ldots + b_{nn}x_n = 0$$

получим n линейных форм с определителем $D = \| b_{nj}\lambda_j^{i-1} \|$ $(ij = 1, \ldots, n)$. По теореме Вандермонда

$$D = b_{n1}, \ldots, b_{nn} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

Этот определитель не будет равен нулю, если среди b_{nj} нет нулей, а среди $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — равных между собой величин.

Пусть $k = 2$. Дифференцируя $2(p_1 - 1)$ и $2(p_2 - 1)$ раз уравнения

$$b_{n-1,1}x_1 + \ldots + b_{n-1,n}x_n = 0$$
$$b_{n,1}x_1 + \ldots + b_{nn}x_n = 0$$

получим систему $p_1 + p_2 = n$ линейных форм с определителем

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_{n-1,1} & \ldots & b_{n-1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1}\lambda_1^{p_1-1} & \ldots & b_{n-1,n}\lambda_n^{p_1-1} \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}\lambda_1^{p_2-1} & \ldots & b_{nn}\lambda_n^{p_2-1} \end{vmatrix}$$

Беря миноры порядка p_1 из первых p_1 строк, умножая их на миноры порядка p_2 из последних p_2 строк и складывая, получим по теореме Лапласа искомый определитель.

Если минор порядка p_1 состоит из колонок с номерами $j_1{}^s, \ldots, j_{p_1}{}^s$, то минор порядка p_2, на который он умножается, состоит из колонок с номерами $i_1{}^s, \ldots, i_{p_2}{}^s$, причем номера $j_1{}^s, \ldots, j_{p_1}{}^s i_1{}^s, \ldots, i_{p_2}{}^s$ пробегают в совокупности значения от 1 до n. Их произведение можно представить в виде

$$b_{n-1,j_1{}^s}, \ldots, b_{n-1,j_{p_1}{}^s} b_{ni_1{}^s}, \ldots, b_{ni_{p_2}{}^s} \prod_{\substack{i<j \\ j_1{}^s,\ldots,j_{p_1}{}^s}} (\lambda_i - \lambda_j) \prod_{\substack{i<j \\ i_1{}^s,\ldots,i_{p_2}{}^s}} (\lambda_i - \lambda_j)$$

Суммируя эти выражения по всевозможным s, получим определитель D_2. Если среди главных частот системы найдутся три равные между собой, то последний определитель равен нулю. Действительно, при любом разбиении $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на две группы, хотя бы в одной группе окажутся два равных между собой числа, и поэтому все произведения, написанные выше, уничтожатся. Нетрудно показать, что, если невозможно указать более двух равных главных частот λ_i, то подходящим выбором двух линейных комбинаций $q_{n-1} = q_n = 0$ возможно добиться, чтобы их определитель D_2 не обратился в нуль.

Действительно, рассмотрим пары равных между собой главных частот и разобьем частоты на две группы так, чтобы в каждую группу не попала целиком ни одна из пар. Если таких пар будет q, то, обозначая через $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ главные частоты пар, рассмотрим две линейные формы

$$b_{n-1,1}x_1 + \ldots, + b_{n-1,q}x_q = 0$$

$$b_{n,q+1}x_{q+1} + \ldots b_{nn}x_n = 0$$

Дифференцируя первую форму $2(q-1)$ раз, а вторую $2(n-q-1)$ раз, получим систему форм с определителем

$$D_2 = b_{n-1,1}, \ldots, b_{n-1,q} b_{nq+1}, \ldots, b_{nn} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant q} (\lambda_i - \lambda_j) \prod_{q+1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

Он будет не равен нулю, если не равно нулю ни одно $b_{n-1,i}$, b_{ni}.

Если у нас имеется k линейных форм

$$b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n = 0 \qquad (i = n-k+1, \ldots n)$$

а среди $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ найдется $k+1$ равных между собой, то при любых $p_1 + \ldots + p_k = n$ все линейные формы, полученные путем $2(p_j - 1)$-кратного дифференцирования из j-ой формы в совокупности с данными k_i формами, окажутся линейно зависимыми. Действительно, определитель этих форм можно представить согласно теореме Лапласа в виде суммы произведений вида

$$\beta_\nu \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p_1} (\lambda_i - \lambda_j), \ldots, \prod_{p_{k-1} < i < j \leqslant p_k} (\lambda_i - \lambda_j)$$

Если среди λ_i найдется $k+1$ равных между собой, то при любом их разбиении на k групп в одну из них наверняка попадает пара равных λ_i. Поэтому произведения обратятся в нуль, а с ними и определитель D_k. Если равных между собой найдется не более чем k, то, разбивая все λ на k групп

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_{p_1}, \quad \lambda_{p_{k+1}}, \ldots, \lambda_{p_2}, \ldots, \lambda_{p_{k-1}+1}, \ldots, \lambda_n$$

так, чтобы ни в одной из них не было двух равных чисел, получим, что линейная система

$$b_{n-k+1,1}x_1 + \ldots + b_{n-k+1,p_1}x_{p_1} = 0$$

$$b_{n-k+2,p_1+1}x_{p_1+1} + \ldots + b_{n-k+2,p_2}x_{p_2} = 0$$

$$b_{n,(p_{k-1}+1)}, x_{p_{k-1}+1} + \ldots + b_{n,n}x_n = 0$$

полученная после $2(p_j - 1)$-кратного дифференцирования $n-k+j$-ой формы, приведет к системе форм с определителем

$$D_k = b_{n-k+1,1}, \ldots, b_{n-k+1,p_1}, \ldots, b_{nn} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant p_1} (\lambda_i - \lambda_j), \ldots, \prod_{p_{k-1}<i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

который не будет равен нулю, если ни одно из b_{ij} не равно нулю.

Как известно, любое нормальное колебание системы первого приближения представимо в виде

$$x_i = A_i \cos \sqrt{|\lambda_i|}\, t + B_i \sin \sqrt{|\lambda_i|}\, t$$

Для того, чтобы это решение все время удовлетворяло равенствам

$$b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n = 0 \qquad (i = n-k+1, \ldots, n)$$

необходимо, чтобы этим же равенствам во все моменты времени удовлетворяли и все производные от них по времени.

Дифференцируя каждое из равенств $2(p_i - 1)$ раз и полагая $t = 0$, получим, что A_i, B_i подчинены равенствам

$$b_{i1}\lambda_2^{s-1}A + \ldots + b_{in}\lambda_n^{s-1}A_n = 0 \qquad (i = n-k+1, \ldots, n)$$
$$b_{i1}\lambda_1^{s-1}B_1 + \ldots + b_{in}\lambda_n^{s-1/2}B_n = 0 \qquad (s = 1, \ldots, p_i)$$

Умножая каждый j-ый столбец определителя второй системы на $\lambda_j^{1/2}$, нетрудно заметить, что получим в точности определитель первой системы. Нетрудно заметить также, что он совпадает с определителем, который выше подвергся изучению. Если этот определитель не нуль, то ясно, что нетривиального решения, удовлетворяющего этим равенствам, не существует.

Все дальнейшие дифференцирования приводят к выводу о том, что A_i, $B_i\lambda_i^{1/2}$ удовлетворяют одной и той же бесконечной системе уравнений с матрицей

$$(b_{ij}\lambda_j^{s-1}) \qquad (i = n-k+1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots)$$

которая в точности повторяет матрицу системы (1.7), (1.8); система (1.7), (1.8) может быть получена линейной заменой из уравнений (1.2),(1.5), (1.6) и уравнений $q_{n-k+1} = \ldots q_n = 0$. То, что эти уравнения, наверняка, допустят нетривиальное решение, если среди главных частот системы найдется $k+1$, равных $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{k+1}$, становится очевидным, если положить $A_{k+2} = \ldots = A_n = 0$, а для определения $A_1, \ldots, A_{k+1}$ написать уравнения

$$b_{i1}A_1 + \ldots + b_{ik+1}A_{k+1} = 0$$

Эти уравнения необходимо допустят нетривиальное решение, и при выполнении этих уравнений и условии $B_i = A_i / \lambda_i^{1/2}$ линейные формы $q_{n-k+1}, \ldots, q_n$ обратятся в тождественные по t нули. Такими же будут и их производные по времени. Следовательно, при наличии $k+1$, равных λ_i, в системе (1.1) всегда найдется хотя бы одно неисчезающее решение.

Сформулируем результат.

Теорема. 1) Для того, чтобы частичная диссипация по $k < n$ координатам системы делала асимптотически устойчивым в первом приближении изолированное и устойчивое при одних потенциальных силах положение равновесия механической системы, разложение силовой функции которой в окрестности положения равновесия начинается определенно отрицательной квадратичной формой, необходимо и достаточно, чтобы уравнения

$q_{n-k+1} = \ldots = q_n = 0$ и уравнения (1.8), полученные из них дифференцированием в силу системы первого приближения, имели матрицу с рангом n. Это же условие будет достаточным для асимптотической устойчивости в силу точных уравнений.

2) Если среди главных частот первого приближения найдется $k+1$, равных между собой, то никакая диссипация введения по любым k координатам не сделает равновесие асимптотически устойчивым в первом приближении.

3) Если равных главных частот найдется не более k, то всегда можно указать k таких обобщенных координат, что при введении по ним частичной диссипации получим равновесие $q_i = 0$ асимптотически устойчивым.

Теорема Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского в приложении к механической системе рассмотренного типа можно трактовать так.

Если на механическую систему наложить некоторые связи

$$b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n = 0$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — нормальные координаты системы, то уравнения Лагранжа первого рода будут иметь вид

$$\ddot{x}_i = \lambda_i x_i + \sum_{j=n-k+1}^{n} \theta_j b_{ji} + X_i \tag{1.9}$$

где X_i — члены порядка выше первого.

Согласно доказанному Е. А. Барбашиным и Н. Н. Красовским для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы не существовало решения системы

$$\ddot{x}_i = \lambda_i x_i + X_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

целиком лежащего в области

$$b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n = 0 \qquad (i = n-k+1, \ldots, n)$$

если диссипация введена по координатам

$$q_i = b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n$$

Пусть выполняются эти условия. Это значит, что у системы (1.9) не существует решения, вдоль которого

$$\sum_{j=n-k+1}^{n} \theta_j b_{ji} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

во все время движения. Из этих уравнений необходимо следует, что не существует ни одного решения, вдоль которого все θ_j обращались бы в нуль. Величины θ_j можно трактовать как реакции связей, поэтому из теоремы следует.

Если возможно на систему рассмотренного типа наложить дополнительные связи так, чтобы у связанной системы не существовало ни одного движения, вдоль которого все реакции новых связей обращались бы в нуль, то введение в исходную систему диссипативных сил, действующих по тем координатам, которые отняты у связанной системы наложением новых связей, сделает равновесие механической системы асимптотически устойчивым.

2. Чтобы ограничиться наиболее хорошо проверяемыми следствиями теоремы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского, возьмем систему (0.1) в форме

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n + X_i \qquad (2.1)$$

Здесь p_{sj} — ограниченные периодические функции времени, а X_i — голоморфные по отношению x_i функции с периодическими коэффициентами, непрерывные и ограниченные.

Пусть dv/dt обращается в нуль только лишь при условиях

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, t) = \ldots = F_k(x_1, \ldots, x_n t) = 0$$

Естественно, что, если существует полутраектория $x_i(t)$, удовлетворяющая этим равенствам, то вдоль нее необходимо выполняются условия

$$\frac{d^i F_s}{dt^i} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k;\ i = 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, существует нетривиальное решение уравнения

$$\Psi = \sum_{i,s}\left(\frac{d^i F_s}{dt_i}\right)^2 = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots;\ s = 1, \ldots k)$$

Если теперь каждую из производных мыслить взятой в силу уравнений (2.1), то искомое решение должно удовлетворять бесконечной системе уравнений с переменными $x_1, \ldots, x_n, t$. Такого случая, наверняка, не встретится, если функция Ψ при любом фиксированном $t > 0$ окажется знакоопределенной по отношению к $x_1, \ldots, x_n$.

На основании известной теоремы Ляпунова система (2.1) может быть не особенной линейной подстановкой приведена к виду

$$\frac{dyi}{dt} = \lambda_i y_i + Y_i$$

Здесь λ_i — комплексные числа с неположительными вещественными частями, которые разбиваются на пары комплексно-сопряженных.

Пусть $F_1, \ldots, F_k$ после замены переходят в $\Phi_1, \ldots \Phi_k$, причем их разложения по переменным $y_1, \ldots, y_n$ имеют вид

$$\Phi_i = b_{i1}y_1 + \ldots + b_{in}y_n + U_i$$

где $b_{ip} + b_{i,\,p+1}$ — вещественные числа, $b_{ip} - b_{i,\,p+1}$ — чисто мнимые.

Если система уравнений

$$b_{i1}\lambda_1^s y_1 + \ldots + b_{in}\lambda_n^s y_n = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots;\ i = 1, \ldots, k)$$

имеет матрицу ранга n, то асимптотически устойчивой будет как исходная система (2.1), так и система первого приближения. Если она имеет ранг меньше, чем n, то система первого приближения не будет асимптотически устойчивой. Это будет всегда, если среди $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ найдется $k + 1$, равных между собой. Если такой случай не встретится, то всегда можно указать такие линейные части функций Φ_i, чтобы асимптотическая устойчивость имела место по всем переменным.

Если окажется, что ранг указанной матрицы равен $n - m$, то, выбирая $n - m$ независимых уравнений из системы $d^b\Phi_i/dt^b = 0$ и разрешая их относительно первых $n - s$ переменных, подставим результат разрешения в остальные уравнения. Разложения результатов подстановки будут начинаться с квадратичных форм от m переменных. Если из этих квадратичных форм можно выбрать линейную комбинацию с коэффициентами, зависящими от времени так, чтобы она представляла определенно положительную форму своих переменных, то, наверняка, будет иметь место асимптотическая устойчивость.

3. Рассмотрим механическую систему, кинетическая энергия которой T не зависит явно от t, $q_{n-k+1}, \ldots, q_n$, последних обобщенных координат а силовая функция U имеет вид

$$U = U_1(q_1, \ldots, q_{n-k}) + F_{n-k+1}\, q_{n-k+1} + \ldots + F_n\, q_n$$

Здесь $F_{n-k+1}, \ldots, F_n$ — постоянные величины. Пусть также на систему действуют диссипативные силы с диссипативной функцией

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ij=n-l+1}^{n} \beta_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \qquad (l \geqslant k)$$

захватывающей последние k координат и еще некоторые. В работе [7] показано, что данная система допускает стационарное решение

$$q_1 = \ldots q_{n-k} = 0, \qquad q_{n-k+1} = \dot{q}^{\circ}_{n-k+1}(t - t_0), \ldots, q_n = \dot{q}^{\circ}_n (t - t_0)$$

где $\dot{q}^{\circ}_{n-k+1}, \ldots, \dot{q}_n^{\circ}$ — некоторые постоянные, если они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial U_1}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-k), \qquad F_i + \sum_{j=n-k} \beta_{ij}\, \dot{q}_i^{\circ} = 0 \quad (i = n-k+1, \ldots, n)$$

Показано также, что, если квадратичная часть разложения функции $T - U$ в окрестности стационарного движения есть функция определенно положительная по отношению к вариациям координат и скоростей, то при полной диссипации стационарное движение будет асимптотически устойчивым.

Приемом, аналогичным приему, примененному в п. 1, можно показать что асимптотической устойчивости при наличии частичной диссипации по последним координатам не будет только в том случае, если у уравнений возмущенного движения будут траектории, лежащие в области $q_{n-l+1} = \ldots = q_n = 0$.

Проверку знакоопределенности квадратичной части разложения функции $T - U$ также можно упростить. Как это показал Раус [8], функция T, выписанная через переменные $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-k}, p_{n-k+1}, \ldots, p_n$

$$2T = \sum_{ij=1}^{n-k} \alpha_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j + \sum_{ij=n-k+1}^{n} \gamma_{ij}\, p_i\, p_j$$

не будет содержать членов с произведениями скорости на импульс.

Так как $\dot{q}_1^{\circ} = \ldots \dot{q}^{\circ}_{n-k} = 0$, то нетрудно заметить, что

$$\delta^2 T - \delta^2 U = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{n-k} \alpha_{ij}^{\circ}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{ij=n-k+1}^{n} \gamma_{ij}^{\circ}\, \delta p_i\, \delta p_j +$$

$$+ \sum_{\substack{ij=n-k+1 \\ s=1,\ldots,n-k}} p_i^0 \left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial q_s}\right)^{\circ} \delta p_j\, q_s + \delta^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{ij=n-k+1}^{n} \gamma_{ij}\, p_i^{\circ}\, p_j^{\circ} - U_1\right]$$

Первая сумма — определенно положительная квадратичная форма скоростей, вторая — вариаций импульсов, а третья и четвертая не содержат циклических скоростей. Поэтому условия знакоопределенности сведутся к положительности $\Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_n$ диагональных миноров дискриминанта квадратичной формы, состоящей из последних трех сумм. Эти миноры окаймляют заведомо положительный дискриминант второй суммы.

Как уже отмечено выше, движение будет асимптотически устойчивым по отношению к последним l координатам, причем $l \geqslant k$, так как существование невозмущенного движения указанного типа предполагает наличие диссипации по последним k координатам.

Уравнения движения в том случае, если невозмущенное движение не будет асимптотически устойчивым, необходимо должны допускать частное решение

$$q_i = q_i(t) \qquad (i \leqslant n-k), \qquad q_i = \dot{q}_i^\circ (t - t_0) \qquad (i > n-k)$$

причем первые $n-k$ функций не все нули.

Уравнения, которым будут удовлетворять эти $n-k$ функций, могут быть получены из функции Лагранжа вида

$$L = T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-k}, \dot{q}^\circ_{n-k+1}, \ldots, \dot{q}_n^\circ, q_1, \ldots, q_{n-k}) + U_1$$

причем последние k уравнений будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{q}_i^\circ} = 0 \qquad (i = n-k+1, \ldots, n)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_{ij} q_i + \sum_{i=n-k+1}^{n} \alpha_{ij} \dot{q}_i^\circ = c_j \qquad (j = n-k+1, \ldots, n)$$

а первые

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{ij}\dot{q}_j + \sum_{j=n-k+1}^{n} \alpha_{ij}\dot{q}_i^\circ\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U_1}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n-k)$$

В итоге приходим к проблеме, существует ли у системы с кинетической энергией вида

$$T' = T_2 + T_1 = \sum_{ij=1}^{n-k} \alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{\substack{i \leqslant n-k \\ j \geqslant n-k}} \alpha_{ij} q_i q_j^\circ$$

и силовой функцией вида

$$U' = U_1 - \sum_{ij=n-k+1}^{n} \alpha_{ij}\dot{q}_i^\circ \dot{q}_j^\circ$$

движение, вдоль которого оставались бы постоянными выражения

$$\sum_{ij_2=1}^{n-k} \alpha_{ij} q_j + \sum_{j=n-k+1}^{n} \alpha_{ij} q_i^\circ = c_i \qquad (i = n-k+1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

и может быть было еще $q_{n-l+1} = \ldots q_{n-k} = 0$, причем это движение все время остается сколь угодно близким к началу координат. Если квадратичные формы

$$\delta^2 T_2 = \sum_{i=1}^{n-k} \dot{x}_i^2, \qquad \delta^2 U' = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i x_i^2$$

общим для обеих форм линейным преобразованием привести к каноническому виду, и если после этого преобразования выражение для T_1 примет вид

$$T_1' = \sum_{\substack{i \leqslant n-k \\ j > n-k}} \beta_{ij} q_j^\circ \dot{x}_i$$

то уравнения первого приближения приобретут форму

$$\ddot{x}_i + \sum_{\substack{i,\, s \leqslant n-k \\ j > n-k}} \left(\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_s}\right)^\circ q_i^\circ \dot{x}_s = \lambda_i x_i \tag{3.2}$$

а вариации их частных интегралов (3.1) — форму

$$\sum_{i=1}^{n-k} \beta_{i\beta} \dot{x}_i + \sum_{i,\, s \leqslant n-k} \left(\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_s}\right)^\circ \dot{q}_i^\circ x_s = c_j \qquad (j = n-k+1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Если из последних уравнений можно определить $l \leqslant k$ переменных x_i, $\dot{x}_i$ как функции остальных и $c_{n-k+1}, \ldots, c_n$, то после подстановки этих решений в уравнения (3.2) получим неоднородную систему. Так как однородная система не допускает первых не зависимых от времени линейных интегралов, то искомое частное решение будет иметь вид суммы частного решения однородной системы плюс некоторый постоянный вектор. Значит, если такое решение существует, то необходимо существует частное решение однородной системы и наоборот.

Итак, вопрос сведется к следующему, будет ли у системы (3.2) существовать решение, стесненное условиями (3.3) при $c_{n-k+1} = \ldots = c_n = 0$ и еще $q_{n-l+1} = \ldots q_{n-k} = 0$.

Его заведомо не будет, если ранг матрицы, полученной бесконечным дифференцированием в силу уравнений (3.2) из этих форм окажется равным $n - l$.

Итак, если ранг матрицы системы, полученной из уравнений (3.3) $q_{n-l+1} = q_{n-k} = 0$ бесконечным дифференцированием в силу уравнений (3.2) окажется равным $n - l$, то тогда движение будет асимптотически устойчивым, и только тогда движение будет асимптотически устойчивым в первом приближении.

Приношу благодарность В. В. Румянцеву и В. А. Сарычеву за обсуждение работы.

Поступила 25 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движений. Гостехиздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1960.
4. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, 1952.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, 1957, № 4.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. ГТТИ, 1950.
7. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости диссипативных систем. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 4.
8. Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London, 1930.