

## ВЛИЯНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВОЛЧКА, СОДЕРЖАЩЕГО ЖИДКОСТЬ

Б. А. Костандян

(Ереван)

Задача о движении твердого тела, полости которого заполнены несжимаемой жидкостью, в самой общей постановке рассмотрена Жуковским [1]. Н. Г. Четаев [2], опираясь на исследования Жуковского, разрешил в точной постановке вопрос об устойчивости вращательных движений снаряда с цилиндрической полостью, полностью наполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Им также исследован случай, когда цилиндрическая полость имеет одну диаметральную диафрагму или крестовину (две ортогональные диаметральные плоскости). В. В. Румянцев [3,4] рассмотрел устойчивость вращательных движений твердого тела, имеющего полость, полностью или частично наполненную несжимаемой жидкостью. Им поставлена задача устойчивости вращательных движений твердого тела с жидкостью по отношению ко всем переменным, характеризующим движение твердого тела и к части переменных, характеризующих движение жидкости. Исходя из полных уравнений возмущенного движения всей системы, методом Ляпунова — Четаева им получены достаточные условия устойчивости вращательных движений твердого тела.

С. Л. Соболев [5] исследовал общую теорию движения симметрического волчка с полостью, полностью наполненной жидкостью.

Работы Н. Н. Моисеева [6,7,8] посвящены анализу случая движения твердого тела при частичном заполнении полости. Предполагая жидкость идеальной и несжимаемой, движение жидкости в покоящемся сосуде — потенциальным, для случая малых движений сосуда около положения равновесия выводится система дифференциальных уравнений движения системы сосуда с жидкостью.

Г. С. Нариманов [9] вывел уравнение малых движений твердого тела, имеющего полость, частично заполненную жидкостью, и проанализировал решения этих уравнений. В другой работе Нариманов [10] вывел уравнения малых возмущений стационарного вращения симметричного гироскопа, цилиндрическая полость которого частично заполнена жидкостью. Задача сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В работе Стьюартсона [11] исследовалась устойчивость вращательных движений волчка с цилиндрической полостью при неполном наполнении. Эта задача в несколько иной постановке рассмотрена автором настоящей статьи [12]. В обеих работах рассматриваются линеаризованные уравнения системы и при вычислении опрокидывающей пары, действующей на оболочку со стороны жидкости, предполагается, что свободная поверхность жидкости мало отличается от невозмущенной цилиндрической формы. Условия устойчивости, полученные Стьюартсоном [11], были проверены опытом. Описание опыта и результаты испытаний, которые проводил Уорд, приводятся в приложении статьи [11]. Оказалось, что существует некоторое несоответствие между теорией и экспериментом, хотя главный вид неустойчивости, по утверждению Уорда, совпадает с теоретическими данными.

Как возможные причины этого противоречия, Уордом рассматривались следующие эффекты: эффект силы тяжести на жидкое наполнение, смещение оси вращения от оси цилиндра, эффект нелинейных членов и эффект силы трения на карданевых подвесах. Опытным путем показано, что эффекты так незначительны, что они не могут являться причиной этого противоречия. Возможность резкого отличия свободной поверхности от цилиндрической формы в работе [11] не указывается.

Здесь исследуются собственные колебания свободной поверхности жидкости в цилиндрической полости гироскопа и их влияние на устойчивость всей системы.

Рассмотрим движение тяжелого симметричного гироскопа (волчок с неподвижной точкой опоры), когда центр тяжести гироскопа лежит на оси вращения эллипсоида инерции, построенного для точки опоры. Пусть полость будет цилиндром, ось которого совпадает с осью симметрии гироскопа (волчка). Для исследования устойчивости вращательных движений гироскопа с неполным наполнением задачу разделим на две части: а) движение жидкости в полости, когда гироскоп вращается вокруг неподвижной оси симметрии, б) влияние жидкости на устойчивость гироскопа.

При решении первой части задачи рассмотрим два случая: 1) когда скорость собственного вращения гироскопа  $\omega$  такова, что  $a^2\omega^2 \gg gc$ , где  $a$  — радиус полости, а  $2c$  — высота; 2) когда  $\omega$  мала и  $a\omega^2 \ll gc$ .

Введем подвижную систему координат  $Oxyz$ : ось  $z$  направим вертикально вверх, а оси  $x$  и  $y$  в горизонтальной плоскости вращаются вокруг  $z$  со скоростью  $\omega$  и составляют вместе с осью  $z$  правую тройку. Обозначим через  $\{u^*, v^*, w^*\}$  скорости по этим осям в момент  $t$  частицы жидкости  $(x, y, z)$ . В случае больших скоростей вращения колебания происходят под действием центробежной силы, а в случае малых  $\omega$  — под действием силы тяжести.

**§ 1. Волны на поверхности медленно вращающейся жидкости в цилиндрическом сосуде.** Пусть цилиндрический сосуд с плоским дном содержит жидкость и вращается вместе с жидкостью вокруг вертикальной оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$ . При относительном равновесии, под действием только силы тяжести, свободная поверхность будет параболом вращения. Примем, что наклон поверхности мал, т. е.  $a\omega^2 \ll g$ , где  $a$  — радиус сосуда. Жидкость будет вращаться вместе с сосудом как одно твердое тело по истечении времени порядка  $a^2/\nu$ , где  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Принимаем, что в относительном движении скорости малы, в силу чего, в уравнениях движений можно отбросить члены второй степени относительно скорости, а также силы вязкости (трение).

Уравнениями движения в подвижных координатах будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} - 2\omega v^* &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \omega^2 x + F_x \\ \frac{\partial v^*}{\partial t} + 2\omega u^* &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \omega^2 y + F_y, \quad \frac{\partial w^*}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $g$  — ускорение силы тяжести,  $F$  ( $F_x, F_y, F_z$ ) — вектор внешней массовой силы,  $p$  — давление жидкости в точке  $(x, y, z)$ .

Отметим, что в восьмой главе Гидродинамики Ламба [13] приведены результаты, относящиеся к колебаниям горизонтального слоя жидкости постоянной толщины и переменной толщины, имеющей определенную форму  $h = h_0(1 - r^2/a^2)$ , причем исследован случай, когда  $\omega = 0$  и когда  $\omega \neq 0$ , но  $a\omega^2 \ll g$ . Исследуем малые колебания, которые совершает жидкость со свободной поверхностью под действием силы тяжести.

Плоскость  $xu$  пусть совпадает с плоскостью дна. Тогда в невозмущенном состоянии высота слоя жидкости будет функцией от  $(x^2 + y^2)$ , т. е.

$$h = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} (x^2 + y^2) + h_0 \quad (1.2)$$

По количеству жидкости и  $\omega$  можно легко найти  $h_0$ . Принимается, что жидкости достаточно для того, чтобы при вращении  $h$  не равнялось нулю, или  $h_0 \neq 0$ , т. е. параболоид вращения не пересекается с плоскостью  $xy$ .

Обозначим через  $\zeta^*(x, y)$  возвышение свободной поверхности над невозмущенным уровнем в точке  $(x, y)$ . Уравнение неразрывности получим, вычисляя поток жидкости в объеме элементарной призмы с основанием  $\delta x \delta y$ ; с точностью до членов второго порядка получим [13]

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} = - \frac{\partial (u^* h)}{\partial x} - \frac{\partial (v^* h)}{\partial y} \quad (1.3)$$

Предполагая, что вертикальное ускорение жидкости мало по сравнению с  $g$ , давление жидкости в точке  $(x, y, z)$  определяем из уравнения

$$p = p_0 + g\rho(h + \zeta^* - z) \quad (1.4)$$

Здесь  $h + \zeta^*$  — ордината возмущенной поверхности. Ясно, что, когда  $\zeta^* = 0$  в невозмущенном состоянии, все уравнения движения удовлетворяются при  $u^* = v^* = w^* = 0$  и  $p = p_0 + \rho g (h - z)$ .

Рассмотрим собственные колебания слоя жидкости под действием силы тяжести, т. е. в уравнениях движений (1.1) положим  $F = 0$ . Функции  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  и  $\zeta^*$  ищем в виде

$$u^* = u(x, y, z) e^{i\sigma t}, \dots, \zeta^* = \zeta(x, y) e^{i\sigma t}$$

Удобно пользоваться цилиндрическими координатами  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$ . Уравнения горизонтального движения (если использовать соотношение (1.4)) имеют вид [13]

$$i\sigma u - 2\omega v = -g \frac{\partial \zeta}{\partial r}, \quad i\sigma v + 2\omega u = -g \frac{\partial \zeta}{r \partial \theta} \quad (1.5)$$

Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах будет

$$i\sigma \zeta = - \frac{\partial (rhu)}{r \partial r} - \frac{\partial (hv)}{r \partial \theta} \quad (1.6)$$

которое в силу (1.2) приводится к виду

$$i\sigma \zeta = -h \left\{ \frac{\partial (ru)}{r \partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right\} - u \frac{\partial h}{\partial r} \quad (1.7)$$

Из уравнения (1.5) находим  $u$  и  $v$

$$u = \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left( i\sigma \frac{\partial \zeta}{\partial r} + 2\omega \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right), \quad v = \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left( i\sigma \frac{\partial \zeta}{r \partial \theta} - 2\omega \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) \quad (1.8)$$

и, подставляя в (1.7) для определения функции  $\zeta$ , получим

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \zeta = -hg \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \zeta - \omega^2 r \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\omega i}{r\sigma} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \zeta \quad (1.9)$$

Функцию  $\zeta(r, \theta)$ , периодическую по  $\theta$ , разложим в ряд Фурье по  $e^{is\theta}$  с неопределенными коэффициентами, зависящими от  $r$

$$\zeta(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \zeta_s(r) e^{is\theta} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в (1.9) для каждой функции  $\zeta_s(r)$ , получим

$$\left( 1 + \frac{r^2}{\lambda^2} \right) \left( \frac{d^2 \zeta_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta_s}{dr} - \frac{s^2}{r^2} \zeta_s \right) + \frac{2}{\lambda^2} \left( r \frac{d\zeta_s}{dr} + \frac{2\omega s}{\sigma} \zeta_s \right) + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh_0} \zeta_s = 0$$

$$\left( \lambda^2 = \frac{2gh_0}{\omega^2} \right) \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) представим в виде

$$\frac{d^2 \zeta_s}{dr^2} + p(r) \frac{d \zeta_s}{dr} + q(r) \zeta_s = 0 \quad (1.12)$$

Здесь

$$p(r) = \frac{1}{r} + \frac{2r}{\lambda^2} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right)^{-1}, \quad q(r) = \left(\frac{4\omega s}{\lambda^2 \sigma} + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh_0}\right) \left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right)^{-1} - \frac{s^2}{r^2}$$

Точка  $r = 0$  будет полюсом  $p(r)$  и  $q(r)$ , но  $rp(r)$  и  $r^2q(r)$  — аналитические в окрестности  $r = 0$ ; следовательно, точка  $r = 0$  будет правильной точкой для дифференциального уравнения (1.12). Решение уравнения (1.12) ищем в виде степенного ряда, умноженного на  $r^\alpha$ , т. е.

$$\zeta_s = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^\alpha \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{\lambda}\right)^n\right] \quad (1.13)$$

где  $a_1, a_2$  — постоянные коэффициенты. Если обозначим безразмерную величину  $r/\lambda = \eta$ , то уравнение (1.12) будет

$$\eta^2 \frac{d^2 \zeta_s}{d\eta^2} + \eta \left(1 + \frac{2\eta^2}{1 + \eta^2}\right) \frac{d \zeta_s}{d\eta} + \left[-s^2 + \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} \left(\frac{4\omega s}{\sigma} + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh_0} \lambda^2\right)\right] \zeta_s = 0 \quad (1.14)$$

Разложим коэффициенты при  $\zeta_s'$  и  $\zeta_s$  в ряды в интервале  $0 \leq \eta < 1$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2\eta^2}{1 + \eta^2} &= 1 + 2\eta^2 - 2\eta^4 + 2\eta^6 - \dots \\ -s^2 + \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} \delta &= -s^2 + \delta (\eta^2 - \eta^4 + \eta^6 - \dots) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\left(\delta = \frac{4\omega s}{\sigma} - \frac{2(\sigma^2 - 4\omega^2)}{\omega^2}\right)$$

Безразмерная величина  $\eta$  будет изменяться в интервале  $0 \leq \eta < 1$ , если  $a < \lambda$  или, что то же самое,  $a^2 \omega^2 < 2gh_0$ .

Подставляя  $\zeta_s = \eta^\alpha (1 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \dots)$  в дифференциальное уравнение (1.14) (предполагая, что полученное дифференцирование и умножение рядов допустимо) и имея в виду разложения (1.15), получим степенной ряд. Приравнявая к нулю коэффициенты последовательных степеней  $\eta$ , получим систему уравнений:

$$F(\alpha) \equiv \alpha^2 - s^2 = 0 \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \quad a_2 \{(\alpha + 2)^2 - s^2\} + 2\alpha + \delta = 0, \quad a_3 \{(\alpha + 3)^2 - s^2\} = 0, \dots \\ a_n \{(\alpha + n)^2 - s^2\} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{n-m} \{(\alpha + n - m) p_m + q_m\} + \alpha p_n + q_n &= 0, \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 2, \quad p_{2k+1} = 0, \quad p_{2k+2} = (-1)^{k+1} 2 \\ q_0 &= -s^2, \quad q_{2k+1} = 0, \quad q_{2k} = (-1)^{k+1} \delta \end{aligned} \quad (1.18)$$

Для каждого значения  $\alpha$  из (1.16) все коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$  определяются последовательно. Находим, что коэффициенты  $a_n$  при нечетных степенях  $\eta$  равны нулю, т. е.  $a_{2k+1} = 0$ . Отметим, что  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2s$  — целое число, поэтому берем только первый показатель  $\alpha_1 = s$ .

Второе линейно независимое решение дифференциального уравнения содержит  $\ln \eta$ , поэтому его рассматривать не будем.

Подставляя  $\alpha$  в систему (1.17), находим

$$a_2 = -\frac{2s + \delta}{2(2s + 2)}, \quad a_4 = \frac{(2s + \delta)(6s + \delta + 8)}{2 \cdot 4(2s + 2)(2s + 4)} \quad (1.19)$$

Затем  $a_6$  выражается через  $a_2$  и  $a_4$  и т. д. Из (1.17) и (1.18) получаем соотношение между последовательными коэффициентами:

$$4(k + 1)(s + k + 1)a_{2k+2} + [(s + 2k)2 + \delta + 4k(s + k)]a_{2k} = 0 \quad (1.20)$$

Таким образом, получаем рекуррентные формулы для определения коэффициентов при каждой степени  $\eta$ .

Докажем сходимость разложения (1.13) при найденных значениях  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ).

Учитывая, что коэффициенты при нечетных степенях  $\eta$  равны нулю, и используя соотношение (1.20), получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{2k+2}|}{|a_{2k}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|4k(s + k) + \delta + 2(s + 2k)|}{4(k + 1)(s + k + 1)} = 1$$

Следовательно, ряд (1.13) сходится, если  $|\eta| < 1$ . Таким образом, в интервале  $|\eta| < 1$  допустимо дифференцирование и умножение рядов (1.13) и (1.15). Построенное решение в виде степенного ряда

$$\zeta_s = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^s \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{2k}\right] \quad (1.21)$$

сходится для всех  $r$  ( $0 \leq r \leq a$ ). В (1.21) коэффициенты  $a_{2k}$  зависят от  $s$  и  $\delta$ . Найденные решения должны удовлетворять граничному условию:

$$u = 0 \quad \text{при } r = a \quad (1.22)$$

т. е. на боковой поверхности цилиндра радиальная составляющая скорости жидкости должна равняться нулю. Имея в виду (1.8), (1.10) и (1.21), условие (1.22) приводится к уравнению

$$f\left(\frac{\sigma}{\omega}\right) \equiv \frac{a}{\lambda} \zeta_s' \left(\frac{a}{\lambda}\right) + \frac{2\omega s}{\sigma} \zeta_s \left(\frac{a}{\lambda}\right) = 0 \quad (1.23)$$

Отсюда и определяются частоты колебания свободной поверхности жидкости.

*Числовой пример.* В частном случае, когда  $a/\lambda = 1/2$ , для нахождения корней уравнения (1.23) была составлена таблица значений  $f(\sigma/\omega)$  в интервале  $-10 \leq \sigma/\omega \leq 10$ .

В 160-ти точках интервала  $(-10, 10)$  были получены значения функции  $f$ . Расстояние между двумя соседними точками равнялось  $1/8$ . Получены следующие результаты:

при  $s = 0$  функция  $f(\sigma/\omega)$  не меняет знака в указанном интервале, т. е. не имеет корней;

при  $s = 1$  функция имеет корни в интервалах

$$\left(-\frac{3}{8}, -\frac{2}{8}\right), \quad \left(\frac{1}{8}, \frac{2}{8}\right), \quad \left(5\frac{8}{7}, 6\right)$$

при  $s = 2$  функция имеет корни в интервалах

$$\left(-7\frac{5}{8}, -7\frac{4}{8}\right), \quad \left(-\frac{4}{8}, -\frac{3}{8}\right), \quad \left(\frac{2}{8}, \frac{3}{8}\right), \quad \left(\frac{4}{8}, \frac{5}{8}\right), \quad \left(2\frac{2}{8}, 2\frac{1}{8}\right)$$

§ 2. Колебания свободной поверхности жидкости при больших угловых скоростях вращения оболочки. 1°. Рассмотрим колебания свободной поверхности жидкости в цилиндрическом сосуде, который быстро вращается вокруг вертикальной оси.

За невозмущенное состояние примем вращение вокруг вертикальной оси симметрии всей системы, как одного твердого тела, т. е.

$$\begin{aligned} u_r &= 0, & u_\theta &= r\omega, & u_z &= 0 \\ p &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r^2 - b^2) + g\rho (z - c) + p_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\{u_r, u_\theta, u_z\}$  — скорость частицы жидкости,  $p$  — давление, а  $p_0$  — давление воздушного пузырька,  $b$  — радиус свободной поверхности. В возмущенном состоянии радиус свободной поверхности обозначим через  $b + \zeta^*(\theta, z)$ . Предположим, что во время возмущенного движения скорости относительного движения не влияют на давление  $p$ ; определим  $p$  из статистических условий, причем учитываем изменение свободной поверхности

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r^2 - b^2) - \rho \omega^2 b \zeta^*(\theta, z) + \rho g (z - c) \quad (2.2)$$

Если напомним уравнение относительного движения в цилиндрических координатах и подставим значение  $p$  из (2.2), получим

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} - 2\omega v^* = F_r, \quad \frac{\partial v^*}{\partial t} + 2\omega u^* = \omega^2 \frac{\partial \zeta^*}{\partial \theta} + F_\theta, \quad \frac{\partial w^*}{\partial t} = \omega^2 b \frac{\partial \zeta^*}{\partial z} + F_z \quad (2.3)$$

Здесь  $(u^*, v^*, w^*)$  — компоненты скорости в цилиндрических координатах.

Уравнение неразрывности получим, вычисляя поток жидкости в элементарном пирамидальном объеме, образованном координатными плоскостями  $z, z + \delta z, \theta, \theta + \delta \theta$ , поверхностью полости и свободной поверхностью; пренебрегая членами второго порядка, получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (h v^* \delta z) \delta \theta + \frac{\partial}{\partial z} (r_0 h w^* \delta \theta) \delta z = \frac{\partial}{\partial t} [(b + \zeta^*) b \delta \theta \delta z] \quad (2.4)$$

Отсюда

$$b \frac{\partial \zeta^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (r_0 h w^*) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h v^*) \quad (2.5)$$

Здесь  $r_0$  — средний радиус горизонтального сечения, причем принимается полость в виде тела вращения;  $h$  — толщина слоя жидкости. Значения  $r_0$  и  $h$  берутся из невозмущенного состояния.

Функции  $u^*, v^*, w^*$  и  $\zeta^*$  ищем в виде

$$u^* = u e^{i\sigma t}, \dots \quad \zeta^* = \zeta(\theta, z) e^{i\sigma t} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в уравнение движения (2.3) и отбрасывая силы  $F_r, F_\theta, F_z$ , получим

$$i\sigma u - 2\omega v = 0, \quad i\sigma v + 2\omega u = \omega^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}, \quad i\sigma w = \omega^2 b \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (2.7)$$

Отсюда

$$v = \frac{i\sigma\omega^2}{4\omega^2 - \sigma^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}, \quad w = \frac{\omega^2 b}{i\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (2.8)$$

В общем случае, когда полость будет телом вращения, ось симметрии которой совпадает с осью вращения оболочки, толщина слоя жидкости

в невозмущенном состоянии зависит только от координаты  $z$ . Уравнение, определяющее вид свободной поверхности при возмущенном состоянии, получим, подставляя (2.8) в (2.5) и учитывая, что  $h = h(z)$  и  $r_0 = r_0(z)$ . Оно будет иметь вид

$$h(z) r_0(z) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{d}{dz} [(h(z) r_0(z))] \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{h(z)}{b} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \frac{\sigma^2}{\omega^2} \zeta = 0$$

Рассмотрим случай цилиндрической полости радиуса  $a$  и высоты  $2c$ . В этом случае  $h$  и  $r_0$  от  $z$  не зависят, а уравнение, характеризующее изменение свободной поверхности жидкости, будет

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\sigma^2}{b r_0 (\sigma^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \frac{\sigma^2}{h r_0 \omega^2} \zeta = 0 \quad (2.9)$$

Функция  $\zeta$  должна удовлетворять следующим граничным условиям

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = \pm c \quad (2.10)$$

т. е.  $w$ -компонента скорости частицы жидкости на торцах цилиндра равна нулю. Чтобы выяснить зависимость  $\zeta$  от  $\theta$ , разложим  $\zeta$  в ряды Фурье по косинусам и синусам, кратным  $\theta$ , или, что то же самое, по  $e^{is\theta}$ , где  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Получим ряд, члены которого имеют вид  $f_s(z) e^{is\theta}$ .

Подставляя разложение  $\zeta$  в уравнение (2.9) и приравнивая к нулю коэффициенты при каждом  $e^{is\theta}$ , получим

$$\frac{d^2 f_s}{dz^2} + \frac{1}{h r_0} \left( \frac{\sigma^2}{\omega^2} - \frac{h}{b} \frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \right) f_s = 0 \quad (2.11)$$

Общее решение уравнения (2.11) запишем в виде

$$f_s(z) = A_s \cos(\mu z + \varepsilon), \quad \mu^2 = \frac{1}{r_0 h} \left( \frac{\sigma^2}{\omega^2} - \frac{h}{b} \frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \right) \quad (2.12)$$

Здесь  $A_s$  — произвольная постоянная.

Возможные значения  $\sigma$  определяются условием (2.10), т. е.

$$\sin(\pm \mu c + \varepsilon) = 0 \quad (2.13)$$

Отсюда для определения частот колебания свободной поверхности получаем формулу

$$\frac{1}{r_0 h} \left( \frac{\sigma^2}{\omega^2} - \frac{h}{b} \frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \right) = \frac{k^2 \pi^2}{4c^2} \quad (2.14)$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{a^2}{c^2} = \kappa, \quad 1 - \frac{b^2}{a^2} = \eta, \quad \left( \frac{\sigma}{\omega} \right)^2 = \lambda \quad (2.15)$$

Тогда уравнение (2.14) примет вид

$$\varphi(\lambda) \equiv \lambda^2 - \lambda \left[ 4 + s^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\eta}} - 1 \right) + \frac{k^2 \pi^2}{8} \kappa \eta \right] + \frac{k^2 \pi^2}{2} \eta \kappa = 0 \quad (2.16)$$

В уравнении (2.16) свободный член положительный, а в точке минимума

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ 4 + \left( \frac{1}{\sqrt{1-\eta}} - 1 \right) s^2 + \frac{k^2 \pi^2}{8} \kappa \eta \right] \quad (2.17)$$

значение функции  $\varphi(\lambda_1)$  меньше или равно нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1) &= -\frac{1}{4} \left[ 4 + \left( \frac{1}{\sqrt{1-\eta}} - 1 \right) s^2 + \frac{k^2 \pi^2}{8} \kappa \eta \right]^2 + \frac{k^2 \pi^2}{2} \eta \kappa \leq \\ &\leq -\left( 2 - \frac{1}{16} k^2 \pi^2 \kappa \eta \right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что все корни уравнения (2.16) действительные и положительные для любых  $k$ ,  $s$ ,  $\eta$  и  $\kappa$ . Следовательно, все четыре корня уравнения (2.14) действительные.

В случае  $s = 0$  свободная поверхность имеет форму тела вращения, а для  $\sigma$  получим

$$\sigma = \pm \omega \frac{k\pi}{2} \sqrt{\frac{\kappa\eta}{2}}$$

При  $k = 0$  свободная поверхность не изменяется по направлению оси полости, а для  $\sigma$  получим

$$\sigma = \pm \omega \{4 + [(1 - \eta)^{-\frac{1}{2}} - 1]s^2\}^{\frac{1}{2}}$$

В общем случае  $\sigma$  определяется по формуле

$$\sigma = \pm \omega \left\{ \frac{A+B}{2} \pm \left[ \left( \frac{A+B}{2} \right)^2 - 4B \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \left( A = 4 + [(1 - \eta)^{-\frac{1}{2}} - 1]s^2, B = \frac{k^2\pi^2}{8} \eta\kappa \right) \quad (2.18)$$

Таким образом, определены частоты собственных колебаний жидкости в цилиндрической полости в зависимости от наполнения  $\eta$ .

Для собственных колебаний свободной поверхности жидкости имеем

$$\zeta^*(\theta, z, t) = A_s \cos(\mu z + \varepsilon) \exp[i(s\theta + \sigma t)] \quad (2.19)$$

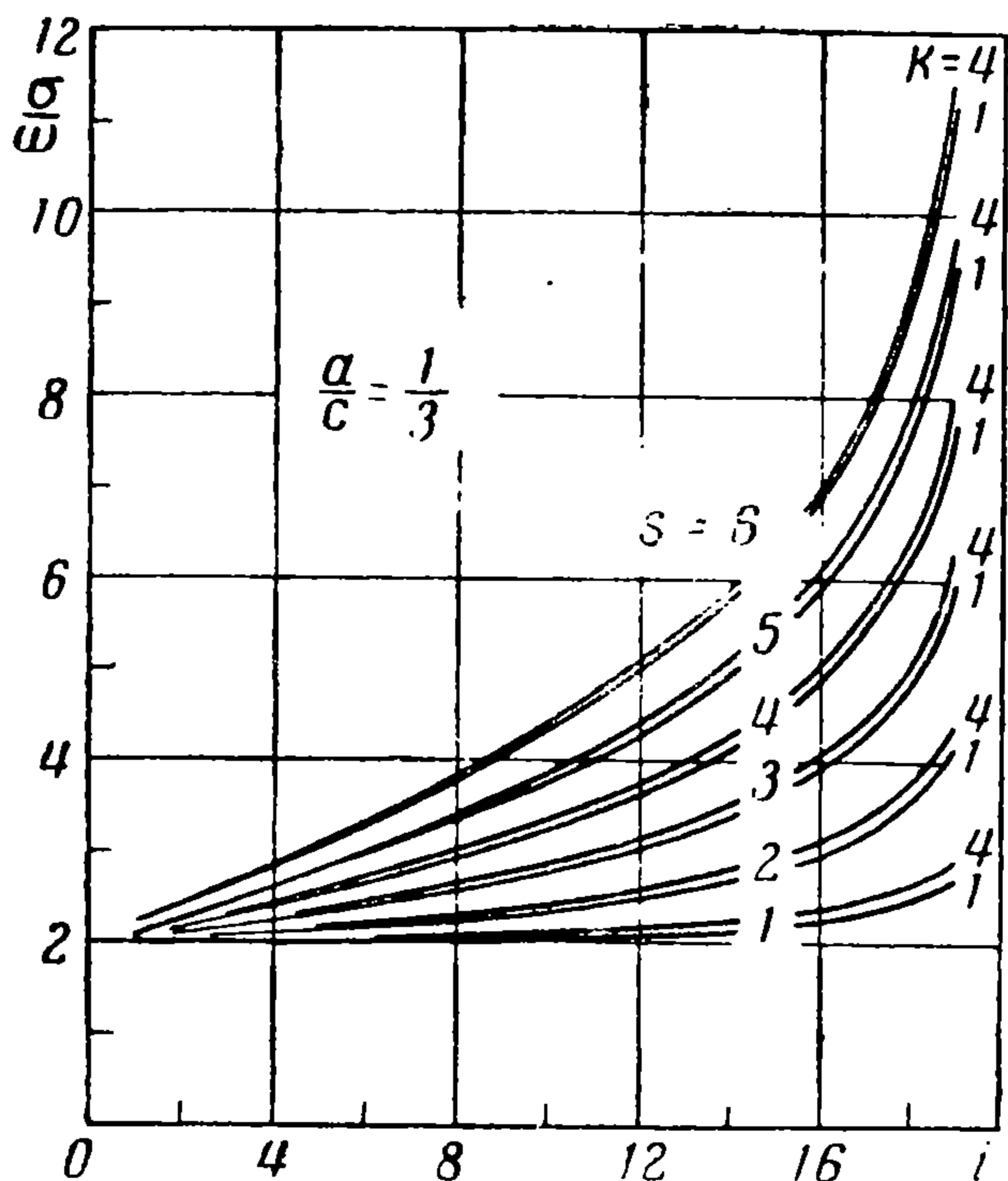
Для каждого фиксированного значения  $t$  уравнение свободной поверхности  $r = b + \zeta^*(\theta, z, t)$  представляет собой цилиндр с пространственно-изогнутой осью, кроме случая  $s = 0$  или  $k = 0$ . В работе С. В. Малашенко [14] приводятся экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел. В частности, фотографировалось вращаемое прозрачное тело, содержащее в полости жидкость, т. е. фиксировалась мгновенная картина движения свободной поверхности жидкости.

Форма свободной поверхности для фиксированного значения  $t$ , определяемая по формуле (2.19), подтверждается картиной свободной поверхности в модели с прозрачной цилиндрической полостью, приведенной в работе С. В. Малашенко.



Фиг. 1

2°. Для некоторой иллюстрации приводим результаты вычислений (на электронно-вычислительной машине «Ереван») корней уравнения (2.14) для трех цилиндрических полостей, определяемых значениями,  $a/c = 1/3, 2/3, 1$ . В каждом случае корни вычислялись для значений  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ;  $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , а  $\eta$  изменялось с шагом  $\Delta\eta = 0.05$ , т. е.  $\eta = 0.05i$ , где  $i$  принимает целочисленные значения от 1 до 19.



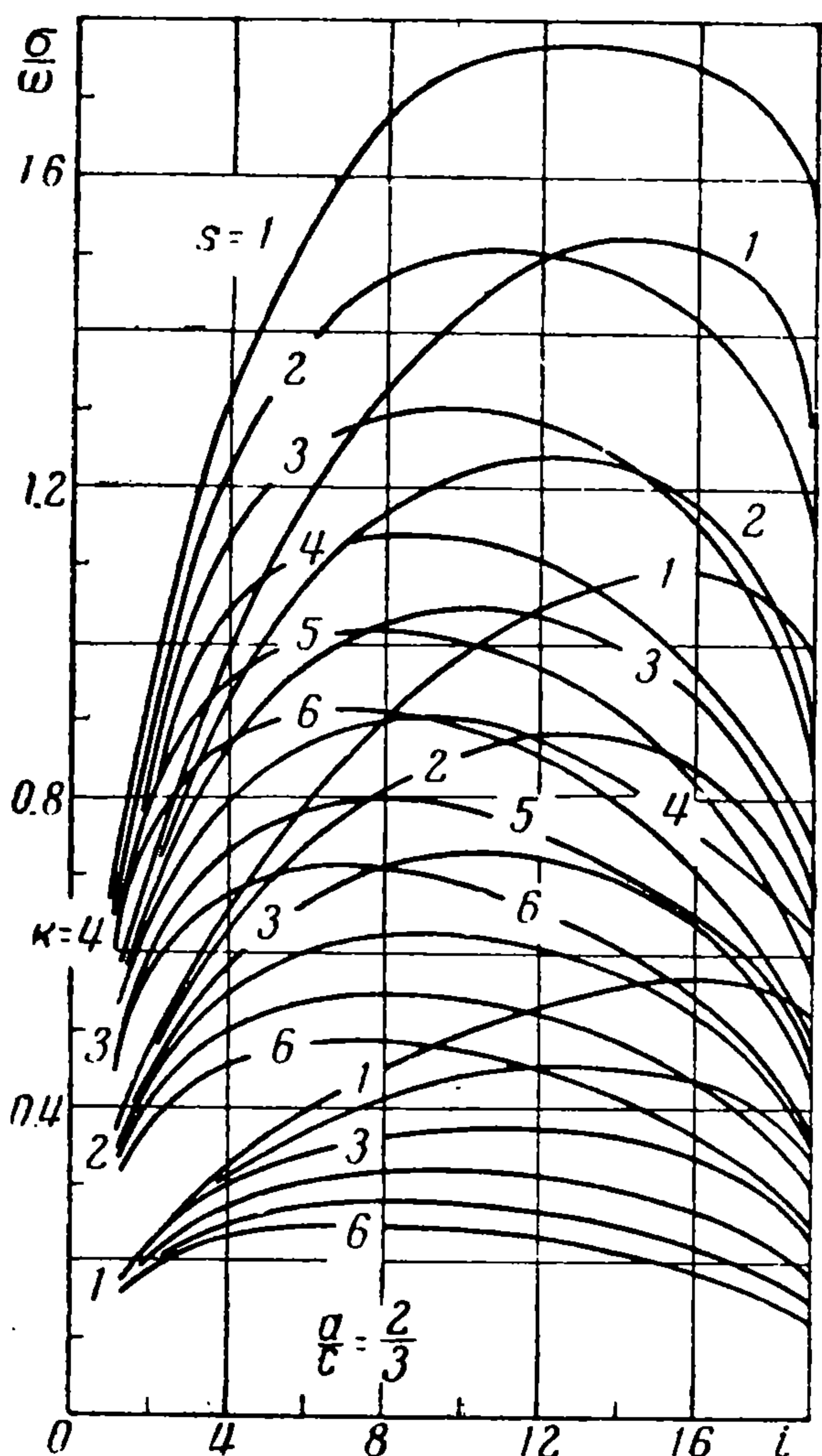
Фиг. 2

По вычисленным значениям построены графики, показывающие зависимость абсолютных величин частот колебаний  $\sigma$  от коэффициента наполнения  $\eta$ , при различных  $k$  и  $s$ .

На фиг. 1 и 2 изображены указанные зависимости для обеих значений  $\sigma$  из (2.20) в случае  $a/c = 1/3$ , причем фиг. 1 относится к меньшим значениям (знак минус перед квадратной скобкой), а фиг. 2 — к большим (знак плюс). Те же самые зависимости для случаев  $a/c = 2/3$  и  $a/c = 1$  изображены соответственно на фигурах 3, 4 и 5, 6.

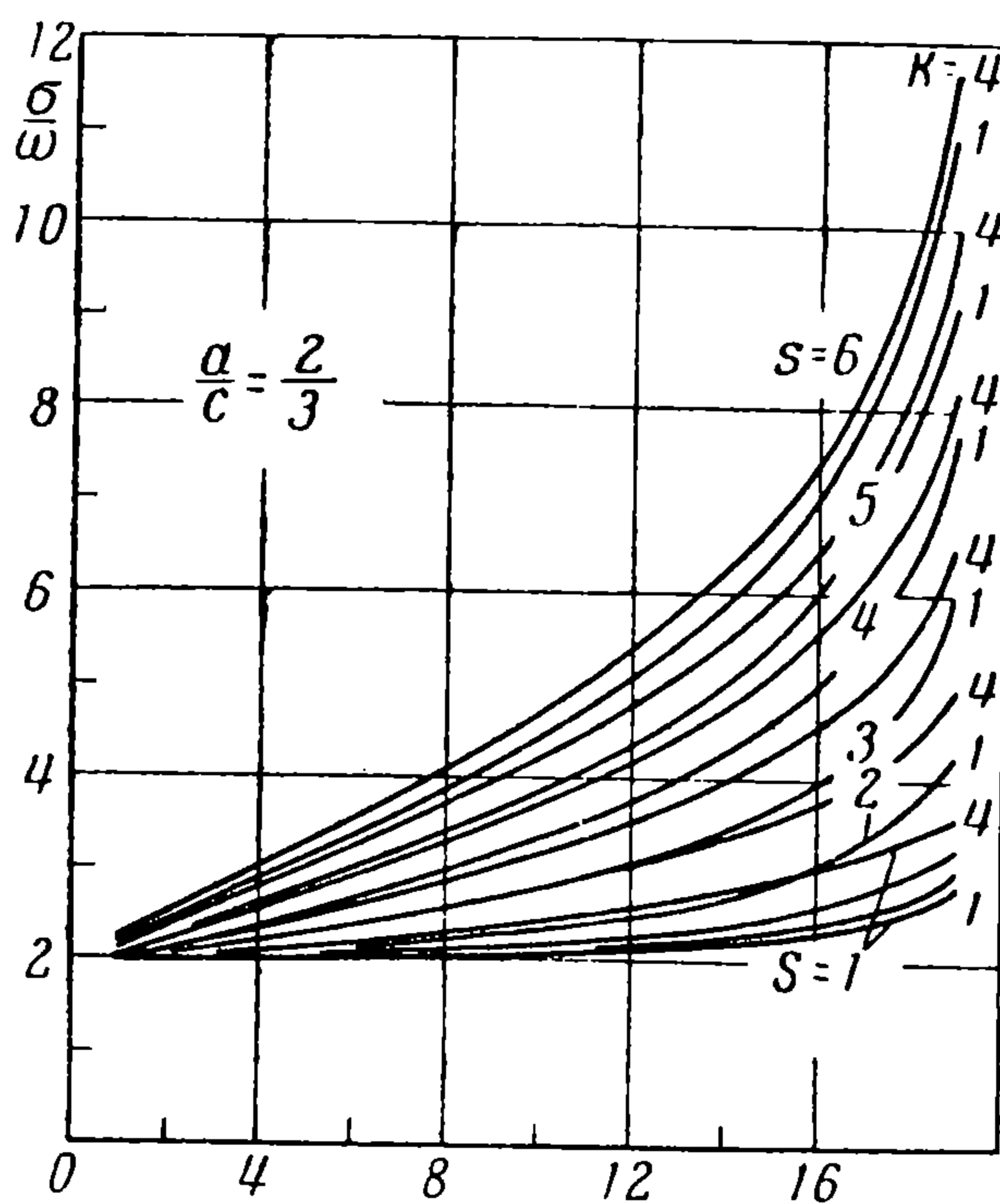
§ 3. Влияние колебания жидкости на устойчивость гироскопа. В теории гироскопа [15] известно, что наиболее общей формой движения тяжелого симметричного гироскопа, обладающего большим собственным моментом количества движения, является псевдорегулярная прецессия вокруг вертикальной прямой, проходящей через точку опоры. Для быстрого гироскопа при псевдорегулярной прецессии скорость нутации (скорость, с которой ось фигуры вращается вокруг оси момента количест-

ва движения) не зависит от опрокидывающего момента и прямо пропорциональна моменту количества движения. При быстром собственном вра-



Фиг. 3

ва движения) не зависит от опрокидывающего момента и прямо пропорциональна моменту количества движения. При быстром собственном вра-

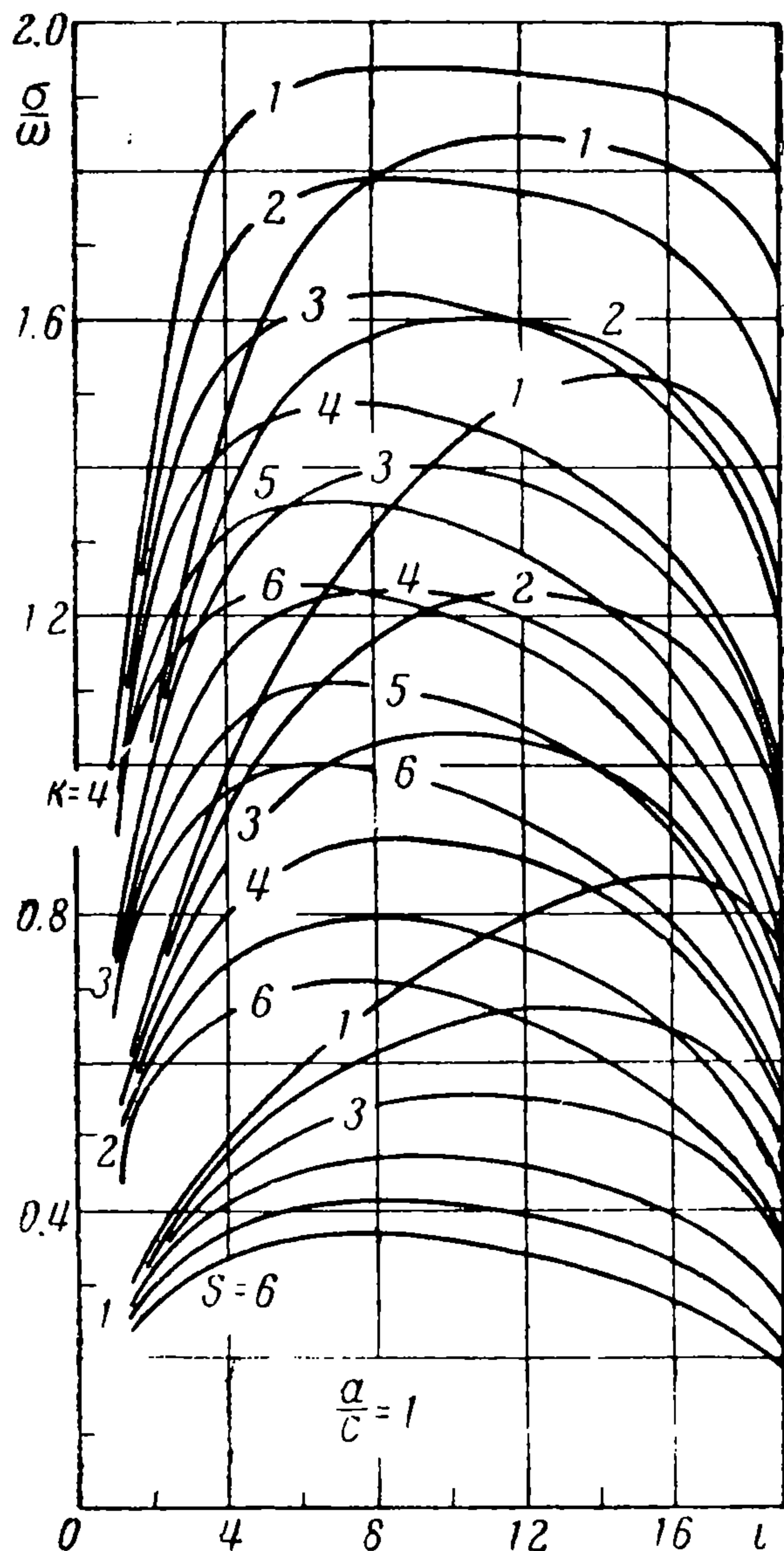


Фиг. 4

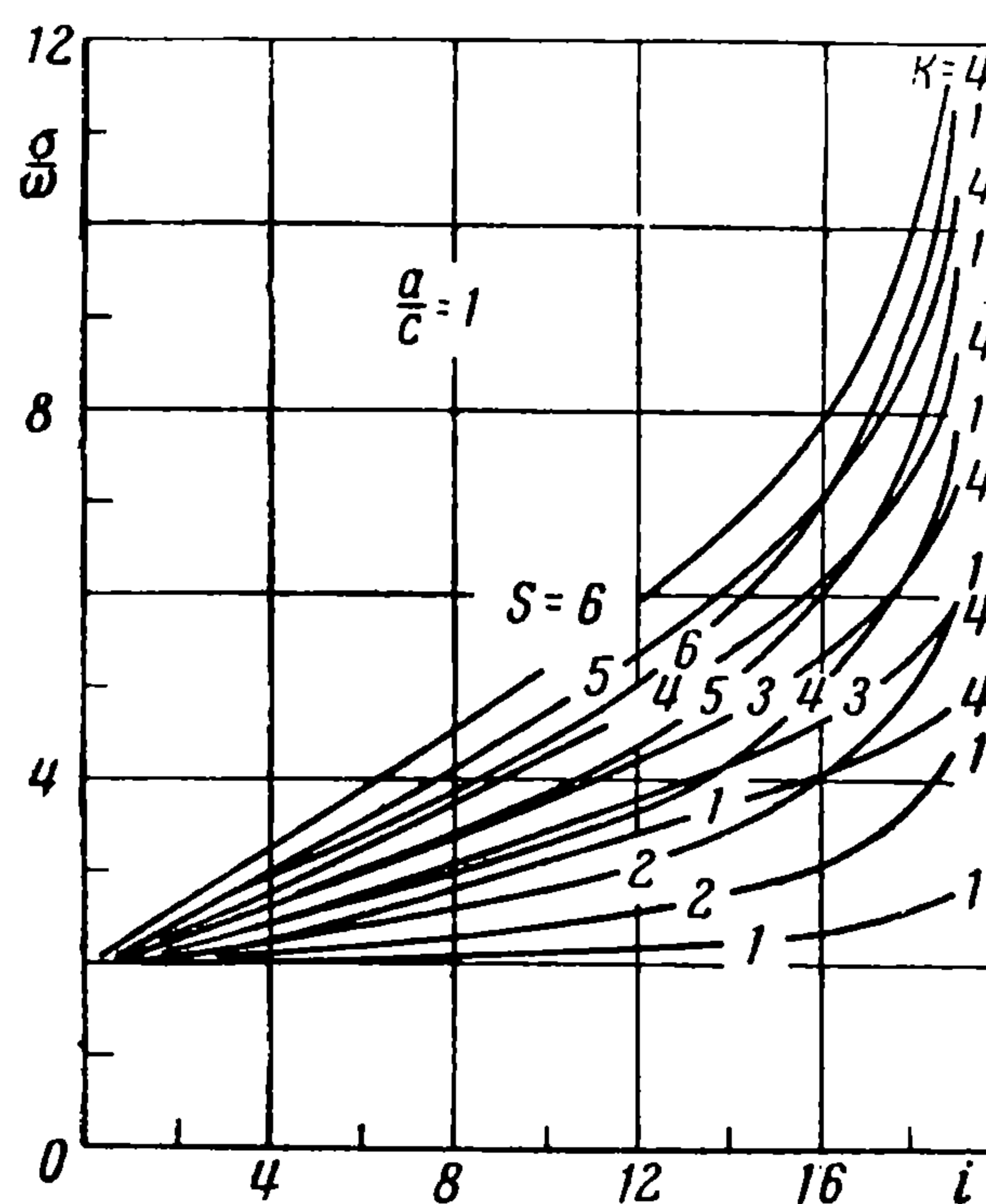
ва движения) не зависит от опрокидывающего момента и прямо пропорциональна моменту количества движения. При быстром собственном вра-

щении приближенно справедливо следующее соотношение:  $\omega_n = \omega C / A$ , где  $\omega$  — собственная угловая скорость,  $\omega_n$  — угловая скорость нутации,  $A$  и  $C$  соответственно экваториальный и осевой моменты инерции гироскопа. У вытянутого гироскопа нутации происходят медленнее, а у сплюснутого — быстрее собственного вращения гироскопа, причем направление

вращения совпадает с направлением собственного вращения. Из соотношения  $\omega_n = \omega A / C$  следует, что отношение скорости нутации к скорости собственного вращения остается постоянным для каждого гироскопа. Гироскоп с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью, становится неустойчивым при некоторых



Фиг. 5



Фиг. 6

соотношениях наполнения и ведет себя спокойно при остальных наполнениях<sup>[11,15]</sup>. Исследуем зависимость устойчивости гироскопа от степени наполнения жидкостью.

За невозмущенное состояние системы — твердая оболочка и жидкость — примем стационарное вращение вокруг вертикальной оси как одного твердого тела. При малых относительных движениях жидкости оно увеличивает опрокидывающую пару, но не влияет на частоту нутации (дрожание оси фигуры) гироскопа, так как частота нутации не зависит от опорного момента. Следовательно, если жидкость в полости не сильно возмущена, отношение  $\omega_n/\omega$  остается постоянным. Предполагая, что на жидкость действуют только нутационные колебания системы, появление неустойчивости можно объяснить следующим. Если для данного соотношения наполнения  $\eta$  частота собственных колебаний свободной поверхности жидкости совпадает с частотой нутации, то происходит сильное возмущение свободной поверхности, которая приобретает форму цилиндра с пространственно-изогнутой осью, т. е. на свободной поверхности жидкости

появляется несимметричное волновое движение, после чего нарушается устойчивое состояние гироскопа.

Для того чтобы проверить устойчивость гироскопа при заданном наполнении жидкости, сравниваем значения  $\sigma/\omega$ , вычисленные по формуле (2.14), с отношением  $\omega_n/\omega$ . Если хотя бы одно значение  $\sigma/\omega$  совпадает, с  $\omega_n/\omega = C/A$  или становится достаточно близким к этому числу, то при таком наполнении гироскоп теряет устойчивость.

Такой подход подтверждается опытом, проведенным Уордом [11]. В этих опытах размеры полости (в дюймах) были  $2a = 1\frac{1}{8}$  и  $2c = 3\frac{3}{8}$ , т. е.  $a/c = \frac{1}{3}$ , отношение нутационной частоты гироскопа к его вращательной частоте  $\omega_n/\omega = A/C = 0.112$ , а скорость вращения  $\omega = 6\ 000$  об/мин. Гироскоп был определенно неустойчив для соотношений наполнения между 0.63 и 0.70.

Как видно из фиг. 1, график функции  $\sigma(\eta)/\omega$  при  $s = 6$  и  $k = 1$  в интервале  $0.57 < \eta < 0.68$  и вблизи  $\eta = 0.20$  почти совпадает с прямой  $\sigma/\omega = 0.112$  (жирная горизонтальная линия на фиг. 1). С указанной прямой при  $k = 1$  пересекаются также кривые  $s = 1, 2, 3, 4, 5$ , но при  $\eta < 0.15$ . Коэффициенту наполнения  $\eta = 0.15$  в опыте [11] соответствует 6 г жидкости, а твердая часть (оболочка) гироскопа имела большую массу; следовательно, при  $\eta < 0.15$  жидкость не могла влиять на устойчивость оболочки. Еще в двух точках, а именно,  $\eta \approx 0.80$  кривая  $s = 5$  при  $k = 1$  и  $\eta \approx 0.89$  кривая  $s = 4$  при  $k = 1$  пересекаются с указанной прямой, но под углом значительной величины. Для того чтобы наблюдалась неустойчивость гироскопа, коэффициент наполнения должен был точно совпасть со значением  $\eta \approx 0.80$  или  $\eta \approx 0.89$ , так как даже для очень близких к ним наполнений соответствующие значения  $\sigma/\omega$  резко отличаются от 0.112.

В случаях  $a/c = 2/3$  и  $a/c = 1$  (фиг. 3 и 5) кривые частот не пересекаются с указанной прямой  $\sigma/\omega = 0.112$  и значения  $\sigma/\omega$  увеличиваются с увеличением  $a/c$ .

Поступила 21 IV 1961

Институт математики и механики  
АН АрмССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. II, Гостехиздат, 1948.
2. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
4. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
5. Соболев С. Л. О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3, 20—55.
6. Моисеев Н. Н. Движение твердого тела, имеющего полости, частично наполненные идеальной жидкостью. ДАН СССР, 1952, т. LXXXV, № 4, 719—722.
7. Моисеев Н. Н. О колебаниях тяжелой идеальной и несжимаемой жидкости в сосуде. ДАН СССР, 1952, т. LXXXV, № 5, 963—966.
8. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность. Матем. сб., 1953, № 1, 32 (74), 61—96.
9. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1956, т. XX, вып. 1.
10. Нариманов Г. С. О движении симметричного гироскопа, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 5.
11. Stewartson K. On the stability of a spinning top containing liquid. J. fluid Mech., 1959, vol. 5, part. 4.
12. Костандян Б. А. Об устойчивости вращательных движений волчка с полостью, не полностью наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
13. Ламб. Гидродинамика, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947.
14. Малашенко С. В. Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел. ПМТФ, 1960, № 3, 205—211.
15. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение. Том 1. ИИЛ, 1952.