

ОБТЕКАНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ТОНКИХ ВИБРИРУЮЩИХ ПРОФИЛЕЙ

Г. С. Самойлович

(Москва)

Различные случаи колебания решеток с постоянной циркуляцией разобраны Л. И. Седовым [1], синхронные синфазные колебания профилей в решетке исследованы в работах М. Д. Хаскинда [2], Т. К. Сиразетдинова [3], Зонгена [4], [5], Чана и Чу [6], Никеля [7], Вудса [8], Попеску [9], [10]. В некоторых из этих работ задача рассмотрена и более широко. Лежендр [11] и Тимман [12] специально исследовали случай колебания соседних лопаток в противофазе. Систо [13] изучал синхронные колебания с постоянным сдвигом фаз. Майстер [14], [15] решает задачу о независимом колебании профилей в решетке.

В статье с помощью потенциала ускорений исследуются неустановившиеся течения несжимаемой жидкости через решетку, соседние профили которой вибрируют с разными частотами, фазами и амплитудами. Рассмотрены поступательные и вращательные колебания.

Находятся присоединенные массы и силы, имеющие циркуляционную природу.

В качестве частных случаев получены некоторые известные точные решения.

В ряде случаев выведены приближенные зависимости, которые сравниваются с точными.

При бесконечном возрастании шага решетки полученные формулы переходят в известные решения для изолированного колеблющегося крыла [1], [16].

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание аэродинамической решетки с колеблющимися лопатками плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости. Введем следующие дополнительные ограничения. Лопатки тонки, малоизогнуты и находятся под малым углом атаки, так что при формулировке граничных условий могут быть заменены пластинами. Амплитуды колебаний лопаток малы.

Уравнения движения могут быть линеаризованы. Решение задачи о колебании малоизогнутых профилей в решетке может быть получено сложением решения для установившегося обтекания данной решетки и решения неустановившегося обтекания решетки пластин. Первая задача имеет исчерпывающее решение [1]. Далее обсуждается только неустановившееся обтекание.

Далеко перед решеткой поток считается невозмущенным и имеющим постоянную заданную скорость.

Граничные условия на профилях состоят в том, что в каждый момент времени для частиц жидкости на них известны нормальные составляющие скорости и ускорения (последние только в линеаризованной постановке).

Кроме этого, предполагаем, что должно удовлетворяться условие Чаплыгина—Жуковского на задних кромках колеблющихся профилей. В случае неустановившегося движения с задних кромок профилей сбегает, согласно теореме о постоянстве циркуляции, вихревые следы. При переходе через следы скорости меняются скачком, однако поле давлений

будет непрерывным. В этом случае формулировка условия Чаплыгина—Жуковского эквивалентна требованию непрерывности функции давления p на задних кромках профилей.

Задача состоит в определении поля скоростей и давлений, а также неустановившихся сил и моментов, действующих на колеблющиеся профили.

Введем комплексный потенциал ускорений

$$w = \varphi + i\psi = f(z) \quad (1.1)$$

Здесь φ — потенциал ускорений, $z = x + iy$ — комплексная переменная, в плоскости которой расположена решетка.

Известно, что потенциал ускорений связан с переменной составляющей давления p соотношением

$$\rho\varphi = -p \quad (1.2)$$

Здесь ρ — плотность жидкости. Для комплексного ускорения имеем

$$a = \frac{dw}{dz} = a_x - ia_y$$

Очевидно, что при удалении вверх по потоку от решетки $p \rightarrow 0$ и, следовательно, $\varphi \rightarrow 0$. На профилях решетки нормальная составляющая ускорения a_y (пусть профили параллельны оси x) будет известной величиной.

Другие свойства комплексного потенциала ускорений зависят от условий задачи. Если, например, рассматривается аэродинамическая решетка, профили которой совершают синхронные синфазные колебания, то потенциал ускорений должен быть периодической функцией с периодом, равным шагу решетки.

§ 2. Некоторые функции, используемые при решении задачи. Рассмотрим функцию комплексного переменного z и действительной постоянной q

$$F(z, q) = \frac{1}{q} \ln \frac{\operatorname{ch} qz + \sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}}{\operatorname{ch} q} \quad (2.1)$$

Функция $F(z, q)$ имеет следующие свойства, используемые при решении задачи.

- (1) Функция $F(z, q)$ периодическая с периодом $i\pi/q$
- (2) Функция $F(z, q) \rightarrow z - q^{-1} \ln \operatorname{ch} q + \dots$ при $z \rightarrow \infty$
- (3) Функция $F(z, q) \rightarrow \sqrt{z^2 - 1}$ при $q \rightarrow 0$
- (4) На отрезке $y = 0, -1 < x < +1$ функция $F(z, q)$ принимает чисто мнимые значения

$$F(z, q) = i \frac{1}{q} \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{sh}^2 qx}}{\operatorname{ch} q} \quad (2.2)$$

На этом отрезке функция $F(z, q)$ может быть разложена в ряд вида

$$F(x, q) = i \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - x^2)^{n/2} \quad (2.3)$$

Коэффициенты в этом разложении будут функциями параметра q и могут быть определены при помощи теории рядов Фурье.

Если ограничиться только первым членом в разложении, то можно воспользоваться следующим приближением:

$$F(x, q) = i \frac{1}{q} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{sh} q \sqrt{1 - x^2} \quad (2.4)$$

Это приближение будет достаточно хорошим даже при большом q . Производная функции $F(z, q)$ равна

$$F'(z, q) = \frac{\operatorname{sh} qz}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}} \quad (2.5)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(z, q) = \frac{1}{q} \ln \frac{\operatorname{sh} qz + \sqrt{\operatorname{ch}^2 qz + \operatorname{sh}^2 q}}{\operatorname{ch} q} \quad (2.6)$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

- (1) Функция $\Phi(z, q)$ периодическая с периодом $i\pi/q$
- (2) Функция $\Phi(z, q) \rightarrow z - q^{-1} \ln \operatorname{ch} q + \dots$ при $z \rightarrow \infty$
- (3) Справедливо соотношение $\Phi(z + i\pi/2q, q) = F(z, q)$
- (4) Функция $\Phi(z, q) \rightarrow z$ при $q \rightarrow 0$
- (5) На отрезке $y = 0, -1 < x < 1$ функция $\Phi(z, q)$ принимает действительные значения

На этом отрезке функция $\Phi(x, q)$ может быть разложена в ряд вида

$$\Phi(x, q) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad (n = 1, 5, \dots) \quad (2.7)$$

Коэффициенты b_n зависят от параметра q . Первые члены ряда равны

$$\Phi(x, q) = \frac{1}{\operatorname{ch} q} x + \frac{6q^4}{5! \operatorname{ch} q} x^5 + \dots \quad (2.8)$$

При уменьшении q второй член ряда очень быстро уменьшается, что будет использовано в приближенных решениях.

Производная функции $\Phi(z, q)$ равна

$$\Phi'(z, q) = \frac{\operatorname{ch} qz}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 qz + \operatorname{sh}^2 q}} \quad (2.9)$$

Далее рассмотрим функцию

$$P(z, q) = \ln \frac{\operatorname{sh} qz + \sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}}{\operatorname{sh} q} \quad (2.10)$$

обладающую следующими свойствами.

- (1) Функция $P(z, q)$ периодична с периодом $i\pi/q$
- (2) Функция $P(z, q) \rightarrow \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ при $q \rightarrow 0$
- (3) На отрезке $y = 0, -1 < x < +1$ функция $P(x, q)$ принимает чисто мнимые значения

Производная функции $P(z, q)$ равна

$$P'(z, q) = \frac{q \operatorname{ch} qz}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}} \quad (2.11)$$

Введем, наконец, еще одну функцию

$$Q(z, q) = \ln i \frac{\operatorname{ch} qz + \sqrt{\operatorname{ch}^2 qz + \operatorname{sh}^2 q}}{\operatorname{sh} q}, \quad P(z + i\pi/2q, q) = Q(z, q) \quad (2.12)$$

Производная функции $Q(z, q)$ равна

$$Q'(z, q) = \frac{q \operatorname{sh} qz}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 qz + \operatorname{sh}^2 q}} \quad (2.13)$$

Итак, введены периодические функции $F(z, q)$ и $P(z, q)$, а также функции $\Phi(z, q)$ и $Q(z, q)$, полученные из предыдущих сдвигом на половину периода. Эти функции соответствуют комплексному потенциалу скорости поперечного и циркуляционного обтекания решетки пластин [1].

Поведение функций $F(z, q) - z$ и $\Phi(z, q) - z$ при больших по модулю x соответствует поведению комплексного потенциала решетки диполей, расположенных вдоль оси y с шагом $i\pi/q$.

Поведение производных функций $P'(z, q)$ и $Q'(z, q)$ при больших по модулю x соответствует поведению комплексного потенциала решетки вихрей, расположенных вдоль оси y с тем же шагом $i\pi/q$.

§ 3. Комплексный потенциал ускорений для решетки. Пусть поток идеальной несжимаемой жидкости обтекает прямую решетку вибрирующих пластин. Начало координат плоскости $z = x + iy$ поместим в середину одной из пластин, а ось решетки направим вдоль оси y . Хорду пластин примем равной $b = 2$, шаг решетки t .

Применим введенные функции для представления комплексного потенциала ускорений.

Если профили колеблются синхронно и синфазно, то комплексный потенциал ускорений может быть выражен таким рядом:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n [F(z, q) - z + q^{-1} \ln \operatorname{ch} q]^n + iB \left[\operatorname{ch} q F'(z, q) - q^{-1} \operatorname{sh} q P'(z, q) \right] \quad (3.1)$$

или, после преобразования последнего члена, получим

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[F(z, q) - z + q^{-1} \ln \operatorname{ch} q \right]^n + iB \sqrt{\frac{\operatorname{sh} q (z - 1)}{\operatorname{sh} q (z + 1)}} \quad (3.2)$$

Возможность такого представления определяется следующим.

(1) При $q = \pi/t$ комплексный потенциал имеет период, равный шагу решетки it .

(2) При условии $\operatorname{Im} B = 0$ в бесконечности перед решеткой $\varphi = \operatorname{Re} w \rightarrow 0$, т. е. течение будет невозмущенным ($p \rightarrow 0$).

(3) На задних кромках профилей выполняется условие Чаплыгина — Жуковского, так как при $z = +1 \pm int$ функция φ не терпит разрыва.

Постоянные (относительно z) коэффициенты A_n и B должны определяться из граничных условий по заданному закону изменения скорости и ускорения на профиле. Комплексное ускорение находится дифференцированием ряда (3.1).

Перейдем к рассмотрению синхронных колебаний профилей в противофазе. При таком типе колебаний потенциал ускорений должен иметь период, равный удвоенному шагу решетки. Значения нормальных ускорений и скоростей на соседних лопатках должны быть равны по модулю и обратны по знаку.

Будем искать решение для комплексного потенциала ускорений в виде ряда

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\left(F - z + 2q^{-1} \ln \operatorname{ch} \frac{q}{2} \right)^n - \left(\Phi - z + 2q^{-1} \ln \operatorname{ch} \frac{q}{2} \right)^n \right] + \\ + iB \left[\operatorname{ch} \frac{q}{2} (F' - \Phi') - 2q^{-1} \operatorname{sh} \frac{q}{2} (P' - Q') \right] \quad (3.3)$$

Здесь для сокращения записи аргументы опущены, т. е.

$$F = F(z, q/2), \quad \Phi = \Phi(z, q/2), \quad P = P(z, q/2), \quad Q = Q(z, q/2)$$

Возможность выражения w рядом вида (3.3) доказывается следующим.

Период функций F , Φ , P и Q , входящих в ряд (3.3), равен $2i\pi/q$. Если принять $q = \pi/t$, то период функций равен $2it$, т. е. удвоенному шагу решетки. При изменении y на половину периода, т. е. на величину шага решетки it , функции u и a меняют знак.

При бесконечном возрастании шага решетки $t \rightarrow \infty$ ($q \rightarrow 0$) выражения для комплексного потенциала ускорений (3.1) и (3.3) переходят в ряд

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\sqrt{z^2 - 1} - z)^n + iB \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} \quad (3.4)$$

§ 4. Определение присоединенных масс при вибрации профилей в аэродинамической решетке. В том случае, если профили в аэродинамической решетке вибрируют, но решетка не обтекается потоком, на профили действует только давление, соответствующее инерционным силам жидкости, окружающей решетку. Действие этих сил может быть учтено присоединенными массами.

В том случае, если пластины совершают синхронные синфазные колебания, а скорость потока далеко перед решеткой $U = 0$, комплексный потенциал ускорения можно выразить через ряд (3.1), положив в нем $B=0$:

$$w = i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[F(z, q) - z + q^{-1} \ln \operatorname{ch} q \right]^n \quad (4.1)$$

Для того чтобы период этой функции был равен периоду решетки, необходимо положить $q = \pi/t$. Перед всем рядом поставлена мнимая единица i , а все коэффициенты A_n будут теперь действительными числами (относительно i) ввиду симметрии задачи.

Комплексное ускорение выразится таким рядом:

$$a = i [F'(z, q) - 1] \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \left[F(z, q) - z + q^{-1} \ln \operatorname{ch} q \right]^{n-1} \quad (4.2)$$

Коэффициенты ряда A_n могут быть найдены, так как известен закон колебания пластин, т. е. известна функция $a_y = a_y(x, \tau)$, где τ — время.

Рассмотрим определение присоединенных масс для некоторых частных случаев.

а. Синхронные синфазные изгибные колебания лопаток. Изгибными колебаниями будем называть колебания, когда профили перемещаются в направлении, перпендикулярном хорде.

Пусть пластины колеблются по гармоническому закону:

$$v = v_0 \exp j\omega\tau$$

где v — скорость колебания, ω — частота колебаний, j — мнимая единица, не взаимодействующая с мнимой единицей i .

Ускорение, направленное вдоль оси y , находится дифференцированием

$$a_y = j\omega v_0 \exp j\omega\tau$$

Для данного частного случая ряд (4.1) ограничивается только первым членом.

Это следует из того, что комплексное ускорение

$$a = a_x - ia_y = iA [F'(z, q) - 1]$$

при $A = j\omega v_0 \exp j\omega\tau$ отвечает граничным условиям на контуре пластины, так как $F'(x, q)$ на пластине принимает чисто мнимые значения.

Далее находим распределение давлений по пластине

$$p = A \rho q^{-1} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{sh}^2 qx}}{\operatorname{ch} q}$$

Сила, действующая на пластину, находится интегрированием p по контуру пластины. Так как сила находится в фазе с ускорением, она может быть заменена эффектом присоединенной массы. В данном случае может быть получено точное решение, которое известно [1]

$$\Delta m = \rho \frac{2t^2}{\pi} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2t} \quad (4.3)$$

Получим также приближенное решение, опираясь на приближенное представление функции $F(x, q)$ на отрезке $-1 \leq x \leq +1$ только одним членом ряда (2.4). Опуская элементарное интегрирование, приведем приближенную формулу для присоединенной массы

$$\Delta m = \rho \frac{bt}{2} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \frac{\pi b}{2t} \quad (4.4)$$

При $b/t \rightarrow 0$ приближенное решение стремится к

$$\Delta m_1 = \rho \pi \frac{b^2}{4} \quad (4.5)$$

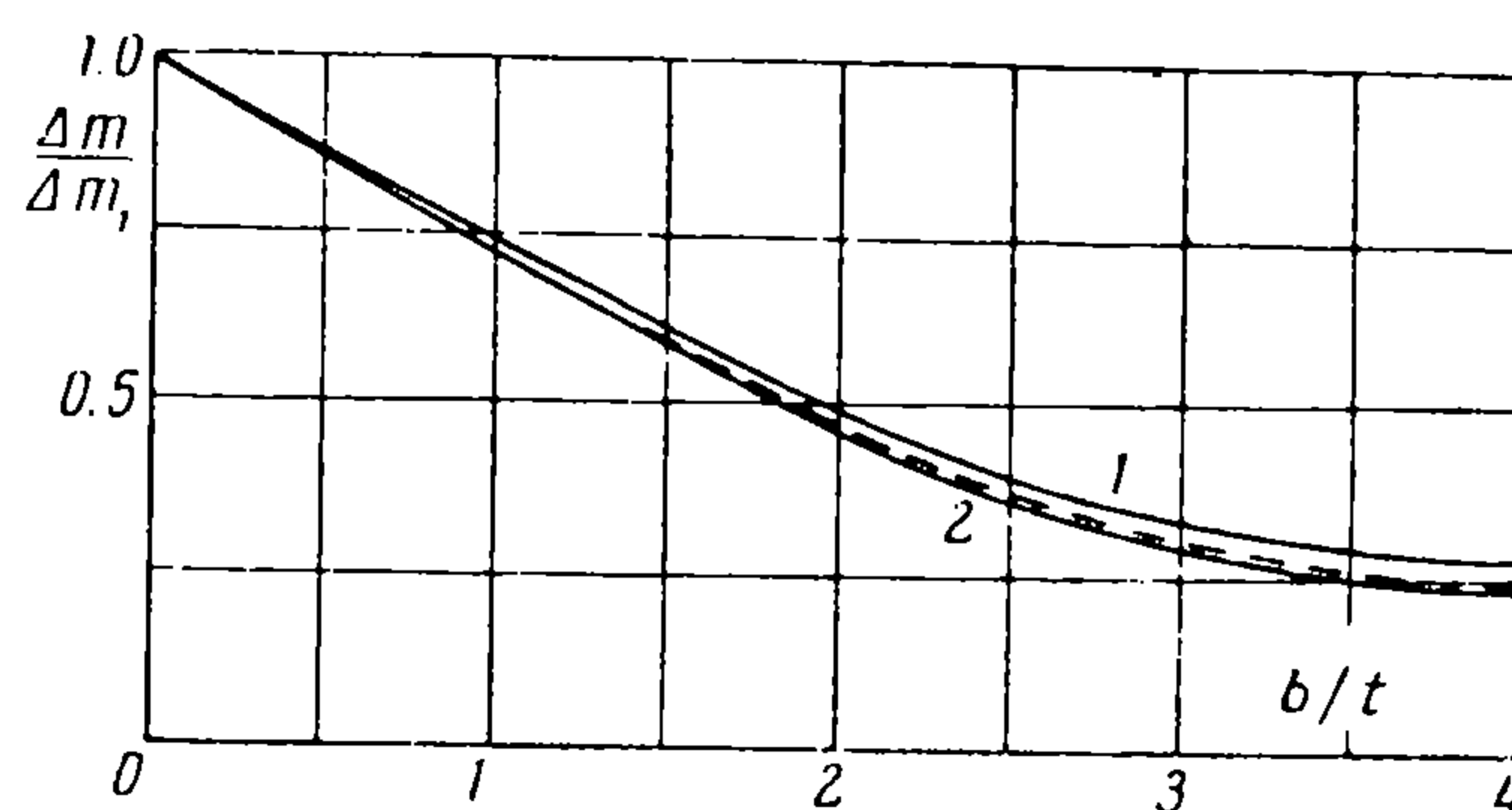
т. е. совпадает с точным значением присоединенной массы для изолированной пластины.

На фиг. 1 дано сопоставление точного решения (4.3) (кривая 1) и приближенного решения (4.4) (кривая 2).

В окончательных формулах удобно отказаться от условия $b = 2$ и принять, как это и сделано здесь и далее, произвольную хорду b .

б. Синхронные синфазные крутильные колебания лопаток. Рассмотрим синхронные синфазные гармонические крутильные колебания пластин вокруг их центров

$$v = v_0 x \exp j\omega\tau$$



Фиг. 1

Составляющая ускорения вдоль оси y должна быть равна

$$a_y = j\omega v_0 x \exp j\omega\tau \quad (4.6)$$

В этом случае для представления потенциала ускорений и комплексного ускорения необходимо воспользоваться рядом (4.1). Ввиду того, что ускорение a_y должно быть нечетной функцией x , в рядах следует сохранить члены только с коэффициентами A_n , имеющими четные индексы.

Получим приближенное решение, воспользовавшись приближенным представлением функции $F(x, q)$ на отрезке $-1 \leq x \leq +1$ при помощи выражения (2.4).

В этом случае ряд ограничится только первым членом с четным индексом, и легко получить

$$A_2 = -\frac{1}{2} v_0 j\omega \exp j\omega\tau \frac{q^2}{q^2 + (\operatorname{arc\,tg\,sh} q)^2} \quad (4.7)$$

Далее обычным путем находится значение потенциала ускорений на пластине и после интегрирования по формуле

$$\Delta m = -2 \int_{-b/2}^{+b/2} \rho \varphi x dx \quad (4.8)$$

значение обобщенной присоединенной массы профилей в решетке

$$\Delta m = \frac{\pi \rho b^4}{64} \frac{q \operatorname{arc\,tg\,sh} q}{q^2 + (\operatorname{arc\,tg\,sh} q)^2}, \quad q = \frac{\pi b}{2t} \quad (4.9)$$

При $b/t \rightarrow 0$ это выражение переходит в

$$\Delta m_1 = \frac{\pi \rho b^4}{128} \quad (4.10)$$

которое совпадает с известным точным решением для изолированной пластины, совершающей вращательные движения вокруг центра.

При вращении пластин не вокруг их центров можно использовать (4.3), (4.9) и принцип наложения.

Перейдем к рассмотрению синхронных колебаний профилей в противофазе. При таком типе колебаний потенциал ускорений должен иметь период, равный удвоенному шагу решетки. Значения нормальных ускорений на соседних лопатках должны быть равны по модулю и обратны по знаку.

Будем искать решение для комплексного потенциала ускорений в виде ряда (3.3), положив в нем $B = 0$ (при $U = 0$ граничные условия на профиле удовлетворяются выбором коэффициентов A_n).

Ввиду симметрии задачи поставим перед всем рядом мнимую единицу i ; все A_n будут действительными (относительно i) количествами.

Тогда получим

$$w = i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \left[F\left(z, \frac{q}{2}\right) - z + \frac{2}{q} \ln \operatorname{ch} \frac{q}{2} \right]^n - \left[\Phi\left(z, \frac{q}{2}\right) - z + \frac{2}{q} \ln \operatorname{ch} \frac{q}{2} \right]^n \right\} \quad (4.11)$$

Разберем частные случаи.

в. Синхронные изгибные колебания в противофазе. Пусть соседние пластины колеблются в противофазе

$$v = v_0 \exp j\omega\tau, \quad v = -v_0 \exp j\omega\tau \quad (4.12)$$

Получим приближенное решение задачи для малых q , ограничиваясь приближенным представлением функций. В этом случае в рядах (4.11) коэффициент A_1 определяется следующим выражением:

$$A_1 = j\omega v_0 \exp j\omega\tau \operatorname{ch}(q/2)$$

Определение потенциала ускорений и подсчет присоединенной массы проводится по обычным формулам. Приводим окончательное выражение для присоединенной массы

$$\Delta m = \rho b t \operatorname{ch} \frac{\pi b}{4t} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{sh} \frac{\pi b}{4t} \quad (4.13)$$

При $b/t \rightarrow 0$ получаем известное выражение (4.5) для присоединенной массы изолированной пластины.

Очевидно, что при колебаниях в противофазе присоединенная масса пластины в решетке больше, чем присоединенная масса изолированной пластины.

г. Синхронные крутильные колебания в противофазе. Пусть соседние пластины вращаются вокруг своих центров по гармоническому закону в противофазе

$$v = v_0 x \exp j\omega\tau, \quad v = -v_0 x \exp j\omega\tau \quad (4.14)$$

Воспользовавшись теми же зависимостями, что и в предыдущем пункте, можно получить следующее приближенное выражение для обобщенной присоединенной массы

$$\Delta m = \frac{\rho \pi b^4}{64} \frac{(q/2) \operatorname{ch}^2 q/2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{sh} q/2}{(q/2)^2 + (\operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{sh} q/2 \operatorname{ch} q/2)^2}, \quad q = \frac{\pi b}{2t} \quad (4.15)$$

Здесь использован только один член ряда (4.11); легко получить более точное решение, учтя дальнейшие члены.

§ 5. Обтекание решетки вибрирующих профилей. Рассмотрим обтекание прямой решетки (без выноса) вибрирующих пластин потоком идеальной несжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности перед решеткой скорость U .

Коэффициенты A_n по-прежнему определяются по заданному ускорению a_y на пластине. Коэффициент B , который теперь не равен нулю, не участвует в этих вычислениях, так как выражение, на которое он множится, будет давать только составляющую ускорения a_x . Это очевидно из рассмотрения выражения, представляющего собой производную последнего члена в (3.2)

$$\frac{i q B \operatorname{sh} 2q}{2 \operatorname{sh} q (z+1) \sqrt{\operatorname{sh} q (z-1) \operatorname{sh} q (z-1)}} \quad (5.1)$$

Это выражение принимает действительные значения (относительно i) на отрезках $y = int$, $-1 \leq x \leq +1$.

Коэффициент B необходимо выбрать так, чтобы удовлетворить кинематическому условию на колеблющемся контуре, где нормальная составляющая скорости частиц жидкости определяется из условия непроницаемости контура.

Выражение (5.1) имеет мнимое (относительно i) значение на полубесконечных прямых $y = int$, $x < -1$, и, следовательно, влияет на составляющую ускорения a_y , а тем самым на скорость v частиц жидкости, набегающих из бесконечности на колеблющиеся профили решетки.

Составляющая ускорения частицы жидкости по оси y может быть представлена через сумму локального и конвективного ускорений.

Выполнив линеаризацию уравнения движения, получим

$$a'_y = \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} \quad (5.2)$$

Рассмотрим гармонические колебания и выразим функции скорости и ускорения явным образом через время

$$a'_y = a_y \exp j\omega\tau, \quad v' = v \exp j\omega\tau$$

Здесь a_y и v будут функциями x и y . Функция a_y может иметь комплексные значения (относительно j).

Окончательно вместо (5.2) получим

$$a_y = j\omega v + U \partial v / \partial x \quad (5.3)$$

Это уравнение можно записать в комплексной (относительно i) форме, что является более удобным

$$a = j\omega c + U \partial c / \partial x \quad (5.4)$$

где a и c — соответственно комплексные ускорение и скорость.

Проинтегрировав это линейное уравнение при условии, что далеко перед решеткой $v = 0$, а на профилях в решетке $v = iv_0 \exp j\omega\tau$, получим

$$iv_0 \exp j\omega\tau = \frac{1}{U} e^{jk} \int_{-\infty}^{-1} a e^{jkz} dz, \quad k = \frac{\omega b}{2U} \quad (5.5)$$

Верхний предел интеграла взят равным -1 , так как длина хорды профиля $b = 2$.

Величина B , о которой говорилось выше, должна быть определена с помощью условия (5.5).

Параметр k представляет собой число Струхаля.

Параметр k можно трактовать так же как отношение средней завихренности в следе $\omega\Gamma/\pi U$, приходящейся на половину цикла колебаний, к средней завихренности на профиле Γ/b (Γ — циркуляция скорости вокруг профиля, вызванная вибрацией).

а. Синхронные синфазные изгибные колебания лопаток. Для этого частного случая из (3.1) может быть записано точное выражение для комплексного потенциала

$$w = iA [F(z, q) - z] + iB [\operatorname{ch} qF'(z, q) - q^{-1} \operatorname{sh} qP'(z, q)] \quad (5.6)$$

$$A = jkUv_0 \exp j\omega\tau$$

Здесь величина A действительная постоянная (относительно i и z). Продифференцировав это выражение, находим комплексное ускорение

$$a = iA [F'(z, q) - 1] + iB [\operatorname{ch} qF''(z, q) - q^{-1} \operatorname{sh} qP''(z, q)] \quad (5.7)$$

Подставив a согласно (5.6) в (5.5) и произведя интегрирование второго члена по частям, получим

$$B = -R(k, q) v_0 U \exp j\omega\tau \quad (5.8)$$

Здесь $R(k, q)$ — комплексная по j функция, равная

$$R(k, q) = \frac{1 + jke^{jk} J_1(k, q)}{1 + jke^{jk} J_2(k, q)} \quad (5.9)$$

При этом J_1 и J_2 — несобственные интегралы

$$J_1(k, q) = \int_1^\infty \left(\frac{\operatorname{sh} qx}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 qx - \operatorname{sh}^2 q}} - 1 \right) e^{-jkx} dx \quad (5.10)$$

$$J_2(k, q) = \int_1^\infty \left(\sqrt{\frac{\operatorname{sh} q(x+1)}{\operatorname{sh} q(x-1)}} - e^q \right) e^{-jkx} dx \quad (5.11)$$

При безграничном увеличении шага решетки ($t \rightarrow \infty$) $q \rightarrow 0$ и интегралы (5.10) и (5.11) переходят соответственно в интегралы

$$\begin{aligned} J_1(k, 0) &= \int_1^\infty \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1 \right) e^{-jkx} dx \\ J_2(k, 0) &= \int_1^\infty \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) e^{-jkx} dx \end{aligned} \quad (5.12)$$

которые можно выразить через функции Ганкеля [16]

$$\begin{aligned} J_1(k, 0) &= -\frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(k) - \frac{1}{jk} e^{-jk} \\ J_2(k, 0) &= -\frac{\pi}{2} [H_1^{(2)}(k) + jH_0^{(2)}(k)] - \frac{1}{jk} e^{-jk} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Подставляя (5.13) в (5.9), убеждаемся, что функция $R(k, q)$ в предельном случае при $q = 0$ переходит в известную функцию Теодорсена $C(k)$, играющую фундаментальную роль при исследовании колебаний изолированного профиля

$$R(k, 0) = C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + jH_0^{(2)}(k)} \quad (5.14)$$

Перейдем к подсчету сил, действующих на колеблющийся профиль в решетке.

Распределение давлений по профилю находится выделением действительной (по i) части из (5.6). После подстановки значений функций $F(x, q)$ и $P(x, q)$ получим

$$p = \frac{1}{q} A\rho \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{sh}^2 qx}}{\operatorname{ch} q} + \rho B \sqrt{\frac{\operatorname{sh} q(1-x)}{\operatorname{sh} q(1+x)}} \quad (5.15)$$

Давления на нижней и верхней сторонах профиля равны по величине, но противоположны по знаку.

Сила, действующая на лопатку, находится интегрированием (5.15) по контуру лопатки.

Сила, полученная при интегрировании первого члена в (5.15), не связана с циркуляцией, а равна присоединенной массе, умноженной на уско-

рение. Подсчет присоединенной массы для данного типа колебаний уже был произведен ((4.3) или (4.4)).

Интегрирование второго члена в (5.15) дает составляющую силы, зависящую от циркуляции

$$L = -4\rho v_0 U \frac{t}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi b}{2t} R(k, q) e^{j\omega\tau} \quad (5.16)$$

Здесь в окончательной формуле, как и ранее, вводим хорду профиля b . При неограниченном возрастании шага решетки ($t/b \rightarrow 0$) формула (5.16) переходит в известную формулу для подъемной силы изолированной колеблющейся пластины

$$L = -2\rho v_0 U C(k) e^{j\omega\tau}$$

б. Изгибные колебания лопаток в решетке с разными частотами, фазами и амплитудами. Рассмотрим задачу обтекания решетки, соседние профили которой колеблются с разными частотами и фазами, но так, что все нечетные профили имеют частоту ω_1 , а четные — частоту ω_2 и сдвиг фазы θ . Скорости колебания профилей обозначим для нечетных профилей v_1 , а для четных v_2 .

Итак, нечетные профили, в число которых входит профиль, расположенный в начале координат, колеблются по закону

$$v_1 = v_{01} \exp j\omega_1\tau \quad (5.17)$$

Четные же профили колеблются по закону

$$v_2 = v_{02} \exp j(\omega_2\tau - \theta) \quad (5.18)$$

Выражение для комплексного потенциала ускорений может быть построено по типу (3.3), но необходимо сгруппировать члены с функциями F и Φ в разных рядах, так как соседние профили имеют разные характеристики колебательного процесса.

Рассмотрим задачу в приближенной постановке и ограничимся только первыми членами в рядах. Комплексный потенциал ищем в виде

$$\begin{aligned} w = & iA [F(z, q/2) - z] + iB [\Phi(z, q/2) - z] + \\ & + iC [\operatorname{ch} q/2 F'(z, q/2) - 2q^{-1} \operatorname{sh} q/2 P'(z, q/2)] + \\ & + iD [\operatorname{ch} q/2 \Phi'(z, q/2) - 2q^{-1} \operatorname{sh} q/2 Q'(z, q/2)] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Это выражение можно записать так:

$$\begin{aligned} w = & iA [F(z, q/2) - z] + iB [\Phi(z, q/2) - z] + \\ & + iC \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^{1/2} q(z-1)}{\operatorname{sh}^{1/2} q(z+1)}} + iD \frac{\operatorname{ch}^{1/2} q(z-1)}{\sqrt{\operatorname{ch}^{2 1/2} qz + \operatorname{sh}^{2 1/2} q}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Продифференцировав (5.20) по z , получим выражение для комплексного ускорения a . Продифференцировав (5.17) и (5.18) по τ и учтя, что в данной задаче на пластинах $\partial v/\partial x = 0$, получим значения нормальных ускорений $a_1 = j\omega_1 v_{01} \exp j\omega_1\tau$ и $a_2 = j\omega_2 \exp j(\omega_2\tau - \theta)$. Приравняв соответствующие значения ускорений, придем к двум уравнениям, связывающим искомые величины A , B , C и D .

$$\begin{aligned} -a_1 = & -A + [\operatorname{sch}(q/2) - 1] B + [1 - q/2 \operatorname{th}(q/2)] D \\ -a_2 = & [\operatorname{sch}(q/2) - 1] A - B + [1 - q/2 \operatorname{th}(q/2)] C \end{aligned} \quad (5.21)$$

При выводе использовано приближенное представление функций $\Phi(z, q/2)$ и $Q'(z, q/2)$ на отрезке $-1 \leq x \leq +1$ первыми членами рядов.

Другие два уравнения, связывающие коэффициенты, должны быть определены так, чтобы удовлетворить значению нормальных скоростей на пластинах и условию, что в бесконечности перед решеткой скорость потока равна U ($v = 0$).

Используя граничные условия для скорости на нечетных профилях, с помощью интеграла (5.5) найдем

$$v_1 U = -e^{jk_1} A J_1 - e^{jk_2} B J_3 + C (1 + e^{jk_1} j k_1 J_2) + D (1 - e^{jk_2} j k_2 J_4) \quad (5.22)$$

Здесь $J_1 = J_1(k, q/2)$ и $J_2 = J_2(k, q/2)$ — интегралы (5.10) и (5.11), которые были введены выше, а $J_3 = J_3(k, q/2)$ и $J_4 = J_4(k, q/2)$ также функции k и q , выражаемые через интегралы

$$J_3(k, q) = \int_1^{\infty} \left(\frac{\operatorname{ch} qx}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 qx + \operatorname{sh}^2 q}} - 1 \right) e^{-jkx} dx \quad (5.23)$$

$$J_4(k, q) = \int_1^{\infty} \left(\frac{\operatorname{ch} q(x+1)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 qx + \operatorname{sh}^2 q}} - eq \right) e^{-jkx} dx \quad (5.24)$$

Для удовлетворения граничных условий для скорости на четных профилях необходимо вычислить интеграл типа (5.5) вдоль полубесконечной прямой $y = it$, $-\infty \leq x \leq -1$. Используя свойства периодичности функций F , Φ , P и Q , получим следующее условие:

$$v_2 U = -e^{jk_1} A J_3 - e^{jk_2} B J_1 + C (1 + e^{jk_1} j k_1 J_4) + D (1 + e^{jk_2} j k_2 J_2) \quad (5.25)$$

Решив уравнения (5.21), (5.22) и (5.25), найдем A , B , C и D .

Функция распределения давлений на колеблющихся профилях находится выделением действительной (по i) части комплексного потенциала ускорений (5.20). Получим выражение (5.15), только вместо q надо поставить $q/2$, а вместо B поставить C .

В общем случае на профили действуют силы, имеющие частоты ω_1 и ω_2 . Действие сил, совпадающих по фазе и частоте с ускорениями, может быть заменено эффектом присоединенной массы.

Кроме того, на профили действуют силы, совпадающие по частоте и фазе с ускорениями соседних профилей, но не связанные с изменением циркуляции данного профиля.

В том случае, когда частоты колебания соседних пластин равны, а сдвиг фаз равен 0 или π , действие этих сил также может быть сведено к эффекту присоединенной массы. Это возможно также в случае, когда четные (или нечетные) профили неподвижны ($\omega_1 = 0$ или $\omega_2 = 0$).

Присоединенные массы определяются по формуле типа (4.4). Для примера приведем формулу для присоединенной массы пластины в решетке, в которой чередуются колеблющиеся и неподвижные пластины ($U=0$)

$$\Delta m = \frac{1}{4} \frac{\rho b t}{1 - (\operatorname{sch} q/2 - 1)^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{sh} q/2 \quad (5.26)$$

Проинтегрировав второй член (5.15) и подставив вместо B коэффициент C и вместо q , как было сказано, $q/2$, получим составляющую силы,

связанную с изменением циркуляции

$$L = 8\rho C \frac{t}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi b}{4t} \quad (5.27)$$

Эта сила действует на нечетные профили. Для подсчета силы, действующей на четные профили, надо заменить C на D .

в. Синхронные синфазные крутильные колебания лопаток в решетке. Рассмотрим обтекание прямой решетки, лопатки которой совершают крутильные колебания по закону

$$y = y_0 x \exp j\omega\tau$$

Нормальная составляющая скорости потока на профиле зависит от мгновенной скорости и мгновенного положения пластины

$$v = y_0 U e^{j\omega\tau} (1 + jkx) \quad (5.28)$$

Нормальная составляющая ускорения потока на профиле находится при помощи (5.3)

$$a_y = jy_0 U^2 k e^{j\omega\tau} (2 + jkx) \quad (5.29)$$

Покажем, что даже для густых решеток при решении задачи можно ограничиться в комплексном потенциале ускорений двумя первыми членами с A_n

$$w = i \sum_{n=1}^2 A_n [F(z, q) - z + q^{-1} \ln \operatorname{ch} q]^n + iB \sqrt{\frac{\operatorname{sh} q (z-1)}{\operatorname{sh} q (z+1)}} \quad (5.30)$$

где A_n и B — действительные (по i) количества.

Комплексное ускорение находится дифференцированием (5.30) по z

$$a = \frac{dw}{dz} = iA_1 \frac{dw_1}{dz} + iA_2 \frac{dw_2}{dz} + iB \frac{dw_3}{dz} \quad (5.31)$$

где w_1, w_2, w_3 представляют собой соответствующие части комплексного потенциала ускорений (5.30).

Нормальная составляющая ускорений на профилях находится выделением мнимой части выражения (5.31). Третий член в (5.31) найден выше (5.1) и будет действительным при $y = 0, -1 \leq x \leq +1$.

Мнимую часть первого и второго членов (5.31) легко найти, воспользовавшись выражениями (2.1), (2.2) и (2.5):

$$a_y = -A_1 - 2A_2 \left(\frac{\operatorname{sh} qx}{q \sqrt{\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{sh}^2 qx}} \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{sh}^2 qx}}{\operatorname{ch} q} + x \right) \quad (5.32)$$

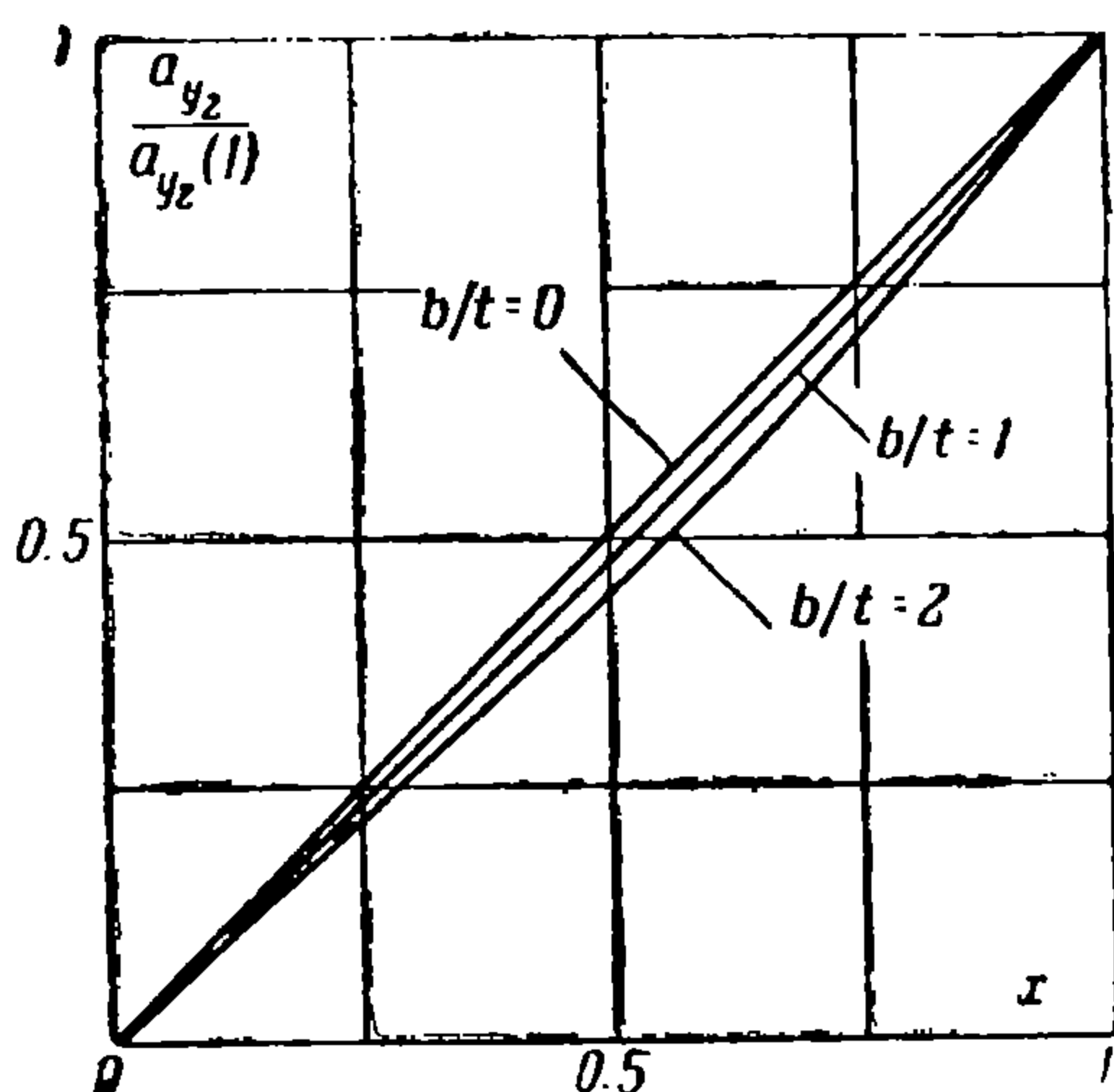
Выражение в скобках в предельном случае решетки бесконечно большого шага ($q = 0$) переходит в $2x$, т. е. дает точное решение задачи для изолированного крыла.

Однако легко заметить, что функция в скобках очень близка к линейной, т. е. дает практически точное решение даже в случае густой решетки. Это подтверждается графиком, приведенным на фиг. 2, где отложено значение a_{y2} в долях от значения этой функции на кромках пластины

$$a_{y2}(1) = 2 \left(1 + \frac{1}{q} \operatorname{th} q \right)$$

Ранее это показано применением приближенной зависимости (2.4).

Тогда коэффициенты A_n в выражении для комплексного потенциала определяются по известному ускорению



Фиг. 2

$$A_1 = -2jy_0kU^2e^{j\omega\tau}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{q}{q + \operatorname{th} q} y_0k^2U^2e^{j\omega\tau} \quad (5.33)$$

Коэффициент B в (5.30) должен быть определен так, чтобы удовлетворить граничным условиям для нормальной скорости на пластинах.

Применив выражение (5.5) для данного случая и используя (5.30), (5.31), (2.1) и (5.33), получим значение B

$$B = -y_0U^2e^{j\omega\tau} \frac{1 - jk + 2jke^{jk}J_1(k, q) + \frac{1}{2}jk^3q(q + \operatorname{th} q)^{-1}J_5(k, q)}{1 + jke^{jk}J_2(k, q)} \quad (5.34)$$

Здесь функции $J_1(k, q)$ и $J_2(k, q)$ выражаются интегралами (5.10) и (5.11), а функция $J_5(k, q)$ интегралом

$$J_5(k, q) = \int_1^\infty \left[\frac{1}{q} \ln(\operatorname{ch} qx + \sqrt{\operatorname{sh}^2 qx - \operatorname{sh}^2 q}) - x \right]^2 e^{-jkx} dx \quad (5.35)$$

Распределение давления по вибрирующим профилям находится выделением действительной (по i) части из (5.30)

$$p = \rho(A_1 - 2A_2x) \frac{1}{q} \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{sh}^2 qx}}{\operatorname{ch} q} + \rho B \sqrt{\frac{\operatorname{sh} q(1-x)}{\operatorname{sh} q(1+x)}} \quad (5.36)$$

Интегрирование первого члена (5.36) по контуру пластины дает силу, действие которой сводится к эффекту обобщенной присоединенной массы.

Интегрирование второго члена дает составляющую силы, зависящую от циркуляции

$$L = 4\rho B \frac{t}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi b}{2t} \quad (5.37)$$

где B дается формулой (5.34). Интегрирование (5.36) по формуле (4.8) определяет действующий момент.

г. Крутильные колебания лопаток в решетке с разными частотами, фазами и амплитудами. Рассмотрим только такой частный случай, когда все нечетные профили колеблются по закону

$$y = y_{01} x \exp j\omega_1\tau \quad (5.38)$$

а все четные по закону

$$y = y_{02} x \exp j(\omega_2\tau - \theta) \quad (5.39)$$

При решении задачи ограничимся в комплексном потенциале ускорений только первыми членами ряда

$$w = i \sum_{n=1}^2 A_n \left[F(z, q/2) - z + \frac{2}{q} \ln \operatorname{ch} \frac{q}{2} \right]^n + i \sum_{n=1}^2 B_n \left[\Phi\left(z, \frac{q}{2}\right) - z + \frac{2}{q} \ln \operatorname{ch} \frac{q}{2} \right]^n + iC \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^{1/2} q(z-1)}{\operatorname{sh}^{1/2} q(z+1)}} + iD \frac{\operatorname{ch}^{1/2} q(z-1)}{\sqrt{\operatorname{ch}^{2 1/2} qz + \operatorname{sh}^{2 1/2} q}} \quad (5.40)$$

Нормальные составляющие ускорения потока на пластинах должны быть равны

$$\begin{aligned} a_{y1} &= a_1 + a_2x = jy_{01}U^2k_1e^{j\omega_1\tau} (2 + jk_1x) \\ a_{y2} &= a_3 + a_4x = jy_{02}U^2k_2e^{j(\omega_2\tau - \theta)} (2 + jk_2x) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Продифференцировав (5.40) по z , найдем выражение для комплексного ускорения. Приравняв нормальные составляющие ускорения, найдем уравнения, связывающие коэффициенты A_1, B_1, C и D (с учетом приближенного представления функций F, Φ и Q' на отрезке $-1 \leq x \leq +1$ первыми членами рядов)

$$\begin{aligned} -a_1 &= A_1 + \alpha B_1 + \beta D, \\ -a_3 &= \alpha A_1 + B_1 + \beta C, \end{aligned} \quad \left(\alpha = \operatorname{sch} \frac{q}{2} - 1, \beta = 1 - \frac{q}{2} \operatorname{th} \frac{q}{2} \right) \quad (5.42)$$

Еще два уравнения для связи коэффициентов A_1, B_1, C и D находятся из кинематических условий подобно тому, как это сделано в п. б этого параграфа.

Коэффициенты A_2 и B_2 находятся непосредственно по известным значениям a_2 и a_4

$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{-\gamma a_2 + \alpha^2 a_4}{\gamma^2 - \alpha^4}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \frac{-\gamma a_4 + \alpha^2 a_2}{\gamma^2 - \alpha^4} \quad \left(\gamma = 1 + \left[\frac{2}{q} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{sh} \frac{q}{2} \right]^2 \right) \quad (5.43)$$

§ 6. Расчет обтекания кривой решетки вибрирующих профилей. Расчет обтекания кривой решетки вибрирующих профилей можно свести к расчету прямой, применив метод конформного преобразования.

Рассмотрим кривую решетку пластин, параллельных оси абсцисс комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Ось решетки наклонена к оси абсцисс под углом β .

Конформное преобразование прямой решетки в плоскости $z = x + iy$ на кривую дается функцией:

$$\zeta = \sin \beta z - i \cos \beta F(z, q) \quad (6.1)$$

Шаг кривой решетки равен $te^{i\beta}$, где t — шаг прямой решетки. Острым краям кривой решетки в плоскости z соответствуют критические точки, где производная $d\zeta/dz = 0$. Координаты критических точек $x_{1,2}$ находятся с помощью (6.1) и (2.1):

$$\operatorname{sh} qx_{1,2} = \pm \sin \beta \operatorname{sh} q \quad (6.2)$$

Комплексный потенциал ускорений $w = \varphi + i\psi$ в параметрической плоскости z должен быть определен так, чтобы: 1) $\varphi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$; 2) значение мнимой части производной комплексного потенциала на профилях параметрической решетки определялось условием

$$\operatorname{Im} dw/dz = -a_y d\zeta/dz$$

где a_y — нормальная составляющая ускорений жидкости на профилях кривой решетки; 3) в точках, соответствующих в плоскости z задним краям профилей кривой решетки, $\varphi = 0$.

Приведем для примера комплексный потенциал ускорений для двух частных случаев.

а. Синхронные синфазные изгибные колебания лопаток.

Комплексный потенциал ускорений, удовлетворяющий поставленным требованиям, имеет вид:

$$w = Ae^{-i\beta} \left[F(z, q) - z - q^{-1} \ln \operatorname{ch} q \right] + iB \left[\sqrt{1 + \sin^2 \beta \operatorname{sh}^2 q} F'(z, q) - q^{-1} \sin \beta \operatorname{sh} q P'(z, q) \right] \quad (6.3)$$

Действительные (относительно i и z) постоянные A и B определяются тем же способом, как и ранее, только следует учитывать, что комплексное ускорение в плоскости ζ теперь равно $a(\zeta) = (dw/dz) : (dz/d\zeta)$.

б. Синхронные изгибные колебания лопаток в противофазе. Комплексный потенциал ускорений в параметрической плоскости дается следующим выражением (при тех же оговорках, что и в § 5)

$$w = A [F - \Phi] (\cos \beta - i \sin \beta \operatorname{ch} q/2) + iB \left[\sqrt{1 + \sin^2 \beta \operatorname{sh}^2 q/2} (F' - \Phi') + q^{-1} \sin \beta \operatorname{sh} q (P' - Q') \right] \quad (6.4)$$

Здесь для сокращения записи опущены аргументы, т. е. $F = F(z, q/2)$, $\Phi = \Phi(z, q/2)$ и т. д.

Поступила 17 IV 1961

Московский энергетический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехтеориздат., 1950.
2. Х а с к и н д М. Д. Колебания решетки тонких профилей в несжимаемом потоке. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
3. С и р а з е т д и н о в Т. К. К обтеканию колеблющихся решеток. Тр. КАИ, 1958, т. XXXVIII.
4. S ö n g e n H. Luftkräfte an einem schwingenden Schaufelkranz kleiner Teilung. Zeitschr. angew. Math. und. Phys., 1953, Bd. 4, № 4.
5. S ö n g e n H. Luftkräfte an schwingenden Gitter, Zeitschr. angew. Math. und Mech., 1955, Bd. 35, № 3.
6. C h a n g C. C., C h u W. H. Aerodynamic interference of cascade blades in synchronized oscillation. Journ. of Appl. Mech., 1955, № 4.
7. N i c k e l K., Über Tragflügelssysteme in ebener Strömung bei beliebigen Teilung in stationären Bewegung. Ing.-Arch., 1955, № 3.
8. W o o d s L. C. On unsteady flow through a cascade of airfoils. Proc. Royal Soc., 1955, ser. A, № 1172.
9. P o p e s c u J. L. Asupra miscării nepermanente a unui fluid într-o Retea de profile, Nota I, Bul. stiint. Acad. RPR, sec. mat. fiz., 1957, № 1.
10. P o p e s c u J. L. Asupra miscării nepermanente a unui fluid într-o Retea de profile, Nota II, Communic. Acad. RPR, 1958, № 10.
11. L e g e n d r e R. Premiers éléments d'un calcul del'amortissement aérodynamique des vibrations d'aubes de compresseur. La recherche Aeronaut., 1954, № 37.
12. T i m m a n R. The aerodynamic forces on an oscillating airfoil between two parallel walls. Appl. Sci. Res., 1954, № 31.
13. S i s t o F., Unsteady aerodynamic reactions on airfoil in cascade. Journ. Aeron. Sci., 1955, № 5.
14. M e i s t e r E. Über ein Randwertproblem aus der Aerodynamik eines Gitter. Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 1959, № 9—11.
15. M e i s t e r E., Flow of an incompressible fluid through an oscillating staggered cascade. Arch. for Rat. Mech. and Anal., 1960, № 3.
16. Н е к р а с о в А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. Изд-во АН СССР, 1947.