Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНОМ ОБТЕКАНИИ ПРОНИЦАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

С. А. Регирер
(Москва)

Одним из методов управления пограничным слоем является отсос или вдув жидкости через обтекаемую поверхность. Если пограничный слой обладает электропроводностью, то существует еще возможность использовать с той же целью магнитное и электрическое поле. В связи с этим представляется интересным исследовать эффекты, возникающие при сочетании обоих методов.

Приближенное решение такого рода задачи было проведено Ватажиным [1], который рассмотрел обтекание полубесконечной пластины вязким сжимаемым газом с учетом вдува и поперечного магнитного поля. Весьма близкую по постановке задачу об обтекании сублимирующейся поверхности изучал также Ликудис [2,3], причем в его работах, в отличие от статьи [1], проводящим считался весь объем газа, а не только пристеночный слой.

В упоминаемых здесь решениях пренебрегалось влиянием индуцированной компоненты магнитного поля, направленной вдоль обтекаемой поверхности. Поэтому в рамках такой теории невозможно учесть магнитогидродинамические эффекты, возникающие в результате взаимодействия поперечного (нормального к поверхности) течения с индуцированным полем. Для изучения этих эффектов необходимо исходить либо из полной системы уравнений магнитной гидродинамики, либо из уравнений пограничного слоя, выведенных Жигулевым [4]. Решения некоторых частных задач подобного типа опубликованы в работах Гупты [5], Ясухары [6] и Гринспана [7],

В данной статье предпринята попытка выяснить возможности более общего подхода к задачам о продольном обтекании проницаемых цилиндрических поверхностей. подобно тому как это сделано для внешних и внутренних прямолинейных течений [8,9].

§ 1. Рассмотрим проницаемую цилиндрическую поверхность S, обтекаемую основным потоком в направлении образующей. Контур поперечного сечения поверхности Σ будем считать гладким и замкнутым, а обтекание — внешним.

Если процесс стационарен, жидкость несжимаема и ее физические свойства постоянны, то скорость, магнитное поле и давление в потоке определяются из уравнений

$$\rho\,(\mathbf{V}\nabla)\,\mathbf{V} = -\nabla p^* + \varkappa\,(\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{H} + \eta\Delta\mathbf{V}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0$$

$$(\mathbf{V}\nabla)\,\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{V} + \nu_m\Delta\mathbf{H}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \qquad (1.1)$$

где $p^* = p + \varkappa H^2/2$, $\varkappa = \mu/4\pi$, $\nu_m = c^2/4\pi\mu\sigma$ и остальные обозначения общеприняты. Электрическое поле и плотность тока находятся из соотношений

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mu}{c}\,\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right) \qquad (1.2)$$

В качестве исходного предположения примем, что составляющие скорости и поперечного к основному потоку магнитного поля неизменны вдоль образующей поверхности. Тогда, поместив ось z параллельно образующей, можно записать

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\perp + v\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{V}_\perp = v_x(x, y)\,\mathbf{e}_x + v_y(x, y)\,\mathbf{e}_y, \qquad v = v_z(x, y)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + h\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{H}_\perp = H_x(x, y)\,\mathbf{e}_x + H_y(x, y)\,\mathbf{e}_y, \qquad h = H_z(x, y, z)$$

Вводя эти разложения в уравнения (1.1) и проектируя первое и третье из них на плоскость xy и ось z, получим (1.3)

$$\rho(\mathbf{V}_\perp\nabla)\,\mathbf{V}_\perp = -\nabla' p^* + \varkappa(\mathbf{H}_\perp\nabla)\,\mathbf{H}_\perp + \eta\Delta\mathbf{V}_\perp \qquad \left(\nabla' = \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\rho\mathbf{V}_\perp\nabla v = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \varkappa\mathbf{H}_\perp\nabla h + \varkappa h\frac{\partial h}{\partial z} + \eta\Delta v \tag{1.4}$$

$$(\mathbf{V}_\perp\nabla)\,\mathbf{H}_\perp = (\mathbf{H}_\perp\nabla)\,\mathbf{V}_\perp + \nu_m\Delta\mathbf{H}_\perp \tag{1.5}$$

$$\mathbf{V}_\perp\nabla h + v\frac{\partial h}{\partial z} = \mathbf{H}_\perp\nabla v + \nu_m\Delta h \tag{1.6}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_\perp = 0 \tag{1.7}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_\perp + \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \text{ или } \operatorname{div}\mathbf{H}_\perp = -\theta(x, y), \quad h = z\theta(x, y) + h_0(x, y) \tag{1.8}$$

причем из (1.3), (1.4) и (1.8) сразу же следует, что $\partial^2 p^*/\partial z^2 = \mathrm{const}$.

Необходимо еще сформулировать уравнения, характеризующие течение и электромагнитное поле внутри обтекаемого тела. Если предположить, что тело может двигаться только поступательно в направлении своей оси с постоянной скоростью v_w, а векторы поперечной скорости и поперечного магнитного поля для области внутри тела не зависят от z, то могут представиться следующие случаи.

а) *Обтекание проницаемого тела с внутренними источниками жидкости.* Магнитное поле описывается уравнениями типа (1.5), (1.6), (1.8), где $v = v_w$, а $\mathbf{V}_\perp$ либо задано, либо определяется с помощью дополнительных уравнений, например, уравнений магнитной гидродинамики типа (1.3), (1.7) или уравнений теории фильтрации.

б) *Обтекание непроницаемого тела, имеющего на поверхности непрерывно распределенные источники.* Магнитное поле внутри тела описывается уравнениями Максвелла.

На поверхности тела должны выполняться обычные условия для скорости, магнитного и электрического полей:

$$v = v_w, \quad v_\tau = 0, \quad [v_n] = q, \quad [\mu H_n] = 0, \quad [E_z] = 0$$
$$[E_\tau] = 0, \quad [h] = 0, \quad [H_\tau] = 0 \text{ на } S \tag{1.9}$$

причем последние два равенства имеют место при отсутствии поверхностных токов, т. е. при конечной проводимости обеих сред. Скачок на S определен здесь как $[a] = a - a_w$, где индекс w относится к обтекаемому телу, а индексами n, τ отмечены составляющие векторов по нормали к S и по касательной к Σ. Плотность поверхностных источников жидкости q будем далее считать заданной.

Для зоны обтекания должны быть заданы еще асимптотические условия, определяющие поведение p^*, v, h на бесконечном удалении от тела. Аналогичные условия для $\mathbf{V}_\perp$ и $\mathbf{H}_\perp$ играют вспомогательную роль; как будет показано, они не всегда могут быть поставлены произвольно

Следует более подробно остановиться на условиях непрерывности электрического поля в (1.9), которым с помощью (1.2) и остальных равенств (1.9) можно придать вид

$$\nu_m \left(\frac{\partial H_n}{\partial \tau} - \frac{\partial H_\tau}{\partial n} \right) + v_n H_\tau = \frac{\mu_w}{\mu} \left[\nu_{mw} \left(\frac{\partial H_{nw}}{\partial \tau} - \frac{\partial H_{\tau w}}{\partial n} \right) + v_{nw} H_\tau \right]_{\text{на } S} \tag{1.10}$$

$$\nu_m \frac{\partial h}{\partial n} - v_n h = \frac{\mu_w}{\mu} \left(\nu_{mw} \frac{\partial h_w}{\partial n} - v_{nw} h \right) \tag{1.11}$$

Слагаемые, содержащие скорость проницаемости, исчезают при $q = 0$, $\mu_w = \mu$, а также при $\nu_{mw} \to \infty$ (обтекание диэлектрика). При бесконечной проводимости обтекаемого тела ($\nu_{mw} = 0$), вообще говоря, не удается получить таким путем столь простых граничных условий, как в задачах без учета проницаемости [9].

§ 2. Возвратимся теперь к анализу уравнений (1.3) — (1.8). Возможны случаи, когда их решение сводится к последовательному решению более простых и даже линейных уравнений. Это может иметь место, в частности, при $\mathbf{H}_\perp = \alpha \mathbf{V}_\perp$, когда поперечное течение осуществляется вдоль силовых линий поперечного магнитного поля. Действительно, при этом предположении уравнения (1.3) — (1.8) преобразуются к виду

$$(\rho - \varkappa\alpha^2)(\mathbf{V}_\perp \nabla)\mathbf{V}_\perp - \varkappa\alpha \mathbf{V}_\perp (\mathbf{V}_\perp \nabla \alpha) - \eta \Delta \mathbf{V}_\perp = -\nabla' p^* \tag{2.1}$$

$$\mathbf{V}_\perp (\mathbf{V}_\perp \nabla \alpha) = \nu_m [2(\nabla \alpha \nabla)\mathbf{V}_\perp + \alpha \Delta \mathbf{V}_\perp + \mathbf{V}_\perp \Delta \alpha] \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{V}_\perp (\rho \nabla v - \varkappa\alpha \nabla h) = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \varkappa h \frac{\partial h}{\partial z} + \eta \Delta v \\ \mathbf{V}_\perp (\nabla h - \alpha \nabla v) = -v \frac{\partial h}{\partial z} + \nu_m \Delta h \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_\perp = 0, \qquad \mathbf{V}_\perp \nabla \alpha = -\theta \tag{2.4}$$

Вводя выражение для h из (1.8) в (2.3) и отделяя члены, содержащие z, получим

$$\mathbf{V}_\perp (\rho \nabla v - \varkappa\alpha \nabla h_0) = \varkappa\theta h_0 + \eta \Delta v, \quad \mathbf{V}_\perp (\nabla h - \alpha \nabla v) = -v\theta + \nu_m \Delta h \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = C = \varkappa(\theta^2 + \alpha \mathbf{V}_\perp \nabla \theta), \quad \mathbf{V}_\perp \nabla \theta = \nu_m \Delta \theta \tag{2.6}$$

Таким образом, если из уравнений (2.2), (2.4), (2.6) будут найдены $\mathbf{V}_\perp$, α, θ, обеспечивающие к тому же разрешимость уравнения (2.1) относительно p^* (т. е. rot от его левой части обратится в нуль), то v и h_0 определятся затем из линейных уравнений (2.5). Система уравнений относительно $\mathbf{V}_\perp$, α, θ является, вообще говоря, переопределенной, и ее решение может существовать только в исключительных случаях, причем вид решения одновременно будет указывать допустимую постановку предельных условий. Выявление всей совокупности решений здесь не удается провести элементарными средствами, но, тем не менее, некоторые важные классы решений можно изучить эффективно — например, для течений с псевдоплоским (в смысле Беркера) магнитным полем, когда $\theta = 0$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y)$ и вследствие (2.4) $\alpha = \alpha(\psi)$, где ψ — функция тока поперечного движения. Еще ряд решений получится, если предположить, что $\mathbf{V}_\perp$ или $\mathbf{H}_\perp$ постоянный вектор, а поверхность S — плоскость, и т. п.

§ 3. Рассмотрим подробнее уравнения (2.1) — (2.4) в наипростейшем случае, когда $\alpha = \mathrm{const}$. Заметим, прежде всего, что уравнения (2.2) и (2.4) эквивалентны более простым

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_\perp = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{V}_\perp = \Omega \mathbf{e}_z \tag{3.1}$$

где Ω — произвольная постоянная. Доказательство становится очевидным, если применить к (2.2) тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{V}_\perp = -\triangle \mathbf{V}_\perp$ и учесть, что $\mathbf{V}_\perp$ не зависит от z. Обращаясь к первому из равенств (1.2), которое можно записать как

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}(\operatorname{rot} \mathbf{H}_\perp + \operatorname{rot} h\mathbf{e}_z) = \frac{c\alpha}{4\pi}\Omega \mathbf{e}_z + \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial h}{\partial y} - \mathbf{e}_y \frac{\partial h}{\partial x}\right) \tag{3.2}$$

видим, что вихрь Ω пропорционален плотности тока в направлении основного течения. Следовательно, при отсутствии такого тока на бесконечном удалении от обтекаемого тела, поперечное течение должно быть потенциальным.

Предположим, что скорость проницаемости v_n задана на S как функция дуги кривой Σ. Если обычным образом ввести в (3.1) функцию тока, то с учетом (1.9) получим внешнюю краевую задачу

$$\triangle \psi = -\Omega; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = f(s), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma \tag{3.3}$$

сводящуюся в принципе к определению особенностей функции ψ на бесконечности.

Аналогичная внутренняя задача возникает при отыскании поперечного магнитного поля $\mathbf{H}_{\perp w}$ внутри обтекаемого тела, если $\partial h_w / dz = 0$, тело непроницаемо или в нем также $\mathbf{H}_{\perp w} = \alpha \mathbf{V}_{\perp w}$, и его проводимость конечна. Действительно, в этом случае, согласно § 1, $\triangle \mathbf{H}_{\perp w} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H}_{\perp w} = 0$. После введения вектор-потенциала поля эти уравнения дают $\triangle A_w = -(4\pi/c)\, j_w$, где $j_w = \mathrm{const}$, причем на S (или, что то же самое, на Σ) для A_w получаются условия, такие же, как в (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_w}{\partial \tau} &= H_{nw} = \frac{\mu}{\mu_w} H_n = \frac{\mu\alpha}{\mu_w} v_n = \frac{\mu\alpha}{\mu_w} f(s) \\ \frac{\partial A_w}{\partial n} &= -H_{\tau w} = -H_\tau = -\alpha V_\tau = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Тем самым отыскание A_w сводится к определению особенностей или источников магнитного поля внутри тела. Если тело проницаемо и $\mathbf{H}_{\perp w} = \alpha \mathbf{V}_{\perp w}$, то такая же задача может быть сформулирована и для функции тока ψ_w. Очевидно, что обратная проблема — нахождение ψ, A_w или ψ_w, удовлетворяющих уравнению Пуассона и условиям типа (3.3), при заданных особенностях может не иметь решения, даже если $f(s)$ считать неизвестной.

Не останавливаясь далее на этих вопросах, укажем, что в большинстве практически интересных случаев задачи типа (3.3) для внутренней и внешней областей имеют решение; более того, это решение удовлетворяет (при $\Omega = 0$) таким дополнительным условиям, как ограниченность $\mathbf{V}_\perp$ и $\mathbf{H}_\perp$ на бесконечности. Некоторое неудобство, связанное с возможным появлением бесконечных значений $\mathbf{H}_{\perp w}$ внутри тела, отчасти искупается тем, что все решение в целом дает в зоне обтекания нормальное к поверхности магнитное поле, являющееся в известном смысле обобщением однородного поля.

Заметим еще, что постоянные Ω и j_w вследствие равенств (1.10) и (3.2) связаны между собой соотношением $\Omega = (4\pi\sigma_w/ca\sigma)\, j_w$, которое показывает, что при отсутствии продольного тока в обтекаемом теле поперечное течение потенциально. Очевидно, что величины Ω и j_w не определяются из решения задачи и одна из них должна быть задана заранее.

Возвращаясь к уравнениям (2.1), (2.3), легко видеть, что при $\partial h/\partial z = 0$, $\alpha = \mathrm{const}$ и не слишком быстром возрастании поперечной скорости все слагаемые в (2.3) исчезают на бесконечности, откуда $\partial p^*_\infty/\partial z = 0$. Интегрирование уравнения (2.1) с учетом (3.1) позволяет теперь найти величину полного давления в виде

$$p^* = p^*_\infty + (\varkappa\alpha^2 - \rho)\,(\Omega\psi + \mathbf{V}_\perp{}^2/2), \qquad p^*_\infty = \mathrm{const} \tag{3.5}$$

Введем безразмерные переменные и параметры

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad v' = \frac{v}{v_0}, \quad \mathbf{V}_\perp' = \frac{\mathbf{V}_\perp}{v_0}, \quad h' = \frac{h}{\alpha v_0}, \quad \psi' = \frac{\psi}{L v_0}$$

$$S = \frac{\varkappa\alpha^2}{\rho}, \quad R = \frac{v_0 L}{\nu}, \quad R_m = \frac{v_0 L}{\nu_m}, \quad N = \frac{\nu_m}{\nu} \qquad (v_0 > 0)$$

где L, v_0 — характерные значения размера тела и скорости. Тогда, отбрасывая штрихи при безразмерных величинах, вместо (2.3) получим

$$R\mathbf{V}_\perp \nabla(v - Sh) = \triangle v, \qquad R_m \mathbf{V}_\perp \nabla(h - v) = \triangle h$$

Полагая

$$u_i = v + \chi_i h, \qquad R_i = R_m\,(N - \chi_i) \tag{3.7}$$

$$\chi_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left[N - 1 \pm \sqrt{(N-1)^2 + 4NS}\right]$$

удается отделить неизвестные и получить для них однотипные уравнения

$$R_i \frac{D(u_i, \psi)}{D(x, y)} = \triangle u_i \qquad (i = 1,2) \tag{3.8}$$

Такое преобразование использовалось ранее при решении задач о магнитогидродинамическом обтекании в приближении Осеена [10]. Оно оказывается полезным, если из предельных условий для v и h можно составить все необходимые условия для u_i. Аналогичное преобразование уравнений (2.3) осуществимо и в более общем случае, когда $\alpha = \alpha(\psi)$, $\partial p^*/\partial z \neq 0$.

Уравнения (3.8) сохраняют свой вид при переходе к любой изотермической системе координат $\zeta_1(x, y)$, $\zeta_2(x, y)$, характеризуемой равенствами $\triangle\zeta_1 = \triangle\zeta_2 = \nabla\zeta_1\nabla\zeta_2 = 0$, т. е.

$$R_i \frac{D(u_i, \psi)}{D(\zeta_1, \zeta_2)} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial\zeta_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial\zeta_2{}^2} \qquad (i = 1,2) \tag{3.9}$$

Если поперечное течение безвихревое ($\Omega = 0$) и его комплексный потенциал есть $\Psi = \varphi + i\psi$, то можно положить $\zeta_1 = \varphi$, $\zeta_2 = \psi$ и

$$R_i \frac{\partial u_i}{\partial\varphi} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial\psi^2} \qquad (i = 1, 2) \tag{3.10}$$

Подобное упрощение достигается также в двух случаях вихревого течения, когда линии тока совпадают с линиями тока потенциального течения, т. е. при $\psi = \psi(\zeta_2)$. Из уравнения (3.3) следует, что в этом случае $\psi''(\zeta_2)\,(\nabla\zeta_2)^2 = -\Omega$, а согласно результатам статьи [11], при $\triangle\zeta_2 = 0$

и $(\nabla\zeta_2)^2 = f(\zeta_2)$ линии $\zeta_2 = \mathrm{const}$ образуют семейство либо параллельных прямых, либо концентрических окружностей. Следовательно, при $\Omega \neq 0$ возможно рассмотрение задач о продольном обтекании плоскости и двугранного угла, причем (3.9) приобретает вид

$$R_i \frac{d\psi}{d\zeta_2}\frac{\partial u_i}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial \zeta_2^2} \qquad (i = 1, 2)$$

Для всех других поверхностей при $\Omega \neq 0$ преобразование координат описанного типа позволяет построить интегральное уравнение, эквивалентное (3.9), если известна функция Грина данной краевой задачи при потенциальном течении (см., напр., [12]). В связи с тем, что условие ограниченности $\mathbf{V}_\perp$ и $\mathbf{H}_\perp$ на бесконечности для течений с постоянным вихрем, вообще говоря, не соблюдается, эти задачи представляют сравнительно небольшой интерес. В случае потенциального поперечного течения уравнения (3.10) имеют частное решение

$$u_i(\varphi) = C_i + D_i \exp R_i\varphi \qquad (i = 1, 2) \tag{3.11}$$

где C_i, D_i — постоянные. Оно пригодно для задач, в которых граничные значения и асимптотическое поведение u_i не зависят от ψ. Построив простейшее решение задачи об обтекании плоскости ($\varphi = \pm y$, $\psi = \mp x$, $v_y = \pm 1$), на основании формул (3.11) не составит труда изучить обтекание других цилиндрических тел с помощью преобразования координат.

§ 4. Остановимся на некоторых особенностях обтекания диэлектрических тел, когда поперечное течение заведомо потенциально. Из равенств $\mathbf{j}_w = (c/4\pi)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_w = 0$, $\nu_{mw} \to \infty$, легко заключить, что внутри тела $h_w = \mathrm{const}$ и условие (1.11) выполняется автоматически. Следовательно, на поверхности $v = v_w$, $h = h_w$ или же

$$u_i = v_w + \chi_i h_w = u_{iw} \text{ на } \Sigma \qquad (i = 1, 2) \tag{4.1}$$

Предполагая, что на бесконечном удалении от тела $v \to v_\infty = \mathrm{const}$, $h \to h_\infty = \mathrm{const}$, т. е.

$$u_i \to v_\infty + \chi_i h_\infty = u_{i\infty} \qquad (i = 1, 2) \tag{4.2}$$

можем использовать решение (3.11). Заметим теперь, что $u_i(\varphi)$ и φ принимают на Σ постоянные значения; кроме того, φ не имеет особенностей на конечном расстоянии от тела. Поэтому, с учетом соображений § 3, можно утверждать, что линии тока $\psi = \mathrm{const}$ уходят в бесконечность и вдоль них φ неограниченно возрастает по абсолютной величине: $\lim \varphi = \pm\infty$ при $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$. Верхний и нижний знаки здесь соответствуют вдуванию и отсосу на поверхности тела. Таким образом, полагая $|\varphi| \to \infty$, можно рассматривать асимптотическое поведение решения (3.11), не переходя к первоначальной системе координат.

Сразу же обнаруживается, что условия (4.2) могут быть выполнены только при $R_{1,2}\varphi < 0$. Течение, удовлетворяющее четырем независимым условиям (4.1), (4.2), как явствует из (3.7), осуществимо лишь при отсосе со сверхальфвеновской скоростью ($S < 1$, $\varphi < 0$). Если скорость поперечного течения доальфвеновская ($S > 1$), то при отсосе и при вдуве одна из величин $R_i\varphi$ будет положительной, и из условий (4.1), (4.2) только три могут быть независимыми. Наконец, при вдуве со сверхальфвеновской скоростью $R_{1,2}\varphi > 0$ и поэтому возможно лишь квазитвердое течение с $v \equiv v_w$, $h \equiv h_w$. Следует подчеркнуть, что только решения с $S < 1$ являются непрерывным обобщением результатов обычной гидродинамики, в которой $S = 0$.

Подсчитаем в заключение сопротивление, испытываемое диэлектрическим телом в расчете на единицу его длины:

$$F = \oint_{\Sigma} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial n} + \varkappa H_n h\right) d\Sigma \tag{4.3}$$

Переходя к безразмерным величинам и координатам φ, ψ, получим

$$C_f = \frac{F}{L\rho r_0^2} = \oint_{\Sigma} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + Sh\right) d\psi \tag{4.4}$$

Для решений типа (3.11) подынтегральная функция не зависит от ψ и, следовательно,

$$C_f = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + Sh\right)_{\Sigma} Q \qquad \left(Q = \oint_{\Sigma} d\psi\right) \tag{4.5}$$

где Q — суммарная безразмерная мощность источников жидкости на поверхности тела и внутри него, отнесенная к единице длины.

Следует помнить, что рассуждения § 4 имеют смысл только в том случае, когда вдоль контура обтекаемой поверхности скорость проницаемости v_n не меняет своего направления относительно нормали и не равна тождественно нулю.

Предельные случаи продольного обтекания — без магнитного поля с потенциальным поперечным течением и без поперечного течения (непроницаемая поверхность) с потенциальным поперечным полем — могут быть получены соответственно при $\alpha \to 0$ и $\mathbf{V}_{\perp} \to 0$, $\mathbf{V}_{\perp}\alpha \to \mathbf{H}_{\perp}$. Однако при этом многие формулы (особенно §§ 3, 4) претерпят существенные изменения, поэтому эти случаи удобнее рассматривать непосредственно на основе уравнений (1.3) — (1.8).

Поступила 24 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б., О вдувании в пограничный слой в присутствии магнитного поля электропроводной жидкости или газа. ПММ, 1960, 24, 5, 909—911.
2. Lykoudis P. S., A discussion of magnetic boundary layers with boundary conditions assimilating combustion, blowing or sublimation at the wall. Proceed. 1-st Internat. Symp. Rarefied Gas Dynamics, 1960, 409—415.
3. Lykoudis P. S., On a class of compressible laminar boundary layers with pressure gradient for an electrically conducting fluid in the presense of a magnetic field. IX-th. Int. Astronaut. Congr., Amsterdam, 1958. Proceed., v. 1, 168—180.
4. Жигулев В. Н. Теория магнитного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1959, 124, 5, 1001—1004.
5. Gupta A. S., Flow of an electrically conducting fluid past a porous flat plate in the presence of a transverse magnetic field. Z. angew. Math. und Phys., 1960, b. 11, № 1, 43—50.
6. Yasuhara M., Flow of a viscous, electrically conducting fluid along a circular cylinder or a flat plate with uniform suction. J. Phys. Soc. Japan, 1960, v. 15, № 2, 321—325.
7. Greenspan H. P., On the flow of a viscous electrically conducting fluid Quart. Appl. Math., 1961, v. 18, № 4, 408—411.
8. Регирер С. А., О течении электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля по трубам произвольного профиля. ПММ, 1960, 24, 3, 541—542.
9. Hasimoto H., Steady longitudinal motion of a cylinder in a conducting fluid. J. Fluid Mech., 1960, v. 8, № 1, 61—81.
10. Van Blerkom R., Magnetohydrodynamic flow of a viscous fluid past a sphere. J. Fluid Mech., 1960, v. 8, № 3, 432—441.
11. Регирер С. А., Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой капельной жидкости. ПММ, 1957, 21, 3, 424—430.
12. Меркулов В. И. Теплообмен в плоском установившемся потоке вязкой жидкости. ПММ, 1959, 23, 3, 581—582.