Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ФОРМЕ ЗАКОНА ОМА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Г. А. Любимов
(Москва)

Для описания движений электропроводных жидкостей и газов в электромагнитных полях пользуются системой уравнений механики и системой уравнений Максвелла, которые в случае взаимодействия поля со средой надо рассматривать совместно. Эта совместная система уравнений становится замкнутой (т. е. из нее возможно определить все величины, характеризующие движение среды и изменения электромагнитного поля), если заданы выражения внутренней энергии среды, тензора напряжений и вектора потока тепла (выражения для этих величин принимаются обычно теми же, как в обычной гидродинамике; уточненные значения этих величин для ионизованного газа, движущегося в магнитном поле, можно найти в работе [1]), а также задана связь плотности тока $\mathbf{j}$ с другими величинами, характеризующими задачу. В качестве простейшей связи для плотности тока в электродинамике и магнитной гидродинамике используется закон Ома (см., например, [2,3])

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}' \tag{0.1}$$

Здесь $\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, σ — коэффициент, называемый проводимостью среды; штрих означает, что соответствующая величина берется в системе координат, в которой среда покоится. Если воспользоваться формулами преобразований полей и токов при переходе от одной системы координат к другой, то соотношение (0.1) в системе координат, относительно которой рассматривается движение среды, можно записать в виде

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}\right) + \rho_e \mathbf{v} \tag{0.2}$$

Здесь ρ_e — плотность объемного электрического заряда, $\mathbf{v}$ — скорость среды; c — константа, равная скорости света. При этом, как и всюду в дальнейшем, используется абсолютная гауссова система единиц измерения. Соотношения (0.1) —(0.2), хорошо описывающие протекание тока в твердых проводниках, а также в жидких и газообразных проводниках при достаточных плотностях среды и умеренных магнитных полях, плохо описывают процессы протекания тока в ряде других задач, представляющих в настоящее время большой интерес. В связи с этим рядом авторов рассматривался вопрос о форме так называемого обобщенного закона Ома, пригодного для описания явлений протекания тока в полностью ионизованных газах [4,5] или в частично ионизованных газах [6] в условиях, в которых соотношения (0.1)—(0.2) становятся неприменимыми.

Для получения обобщенного закона Ома обычно используют модель многокомпонентной квазинейтральной среды, состоящей из электронов, ионов и нейтральных атомов [4,6]. В данной работе на основе этой модели получается соотношение, связывающее плотность тока с другими параметрами (обобщенный закон Ома), при наличии некоторого пространственного заряда ρ_e. Кроме того, формулируются и обсуждаются гипотезы и предположения, которые определяют форму обобщенного закон Ома, а следовательно, и границы применимости получающихся соотношений (в частности, указан круг гипотез, при которых выполняются соотношения (0.1), (0.2)). Выписываются безразмерные параметры, связанные с механическими и физическими характеристиками задачи, определяющие собой форму закона Ома. Обсуждаются различные формы законов Ома с точки зрения их применимости к тем или иным конкретным задачам.

§ 1. Основные уравнения, описывающие движение трехкомпонентной среды, состоящей из электронов, ионов и нейтральных атомов. Для того чтобы получить не зависимое от уравнений Максвелла и уравнений механики соотношение, связывающее плотность тока с величинами, характеризующими движение среды, и напряженностью электромагнитного поля, рассмотрим простейшую молекулярно-кинетическую модель среды.

Пусть в единице объема среды содержится n_a нейтральных атомов, n ионов и $n + n'$ электронов. Для простоты будем считать, что электроны и ионы несут одинаковый по величине, но разного знака заряд e, тогда плотность объемного заряда равна:

$$\rho_e = -n'e$$

Кроме того, массу иона m_i будем считать много больше массы электрона m_e и совпадающей с массой нейтральных атомов m_a.

Назовем степенью ионизации величину

$$\alpha = n / (n + n_a) \tag{1.1}$$

В качестве простейшей модели примем, что каждая из компонент — электроны, ионы и нейтральные атомы — представляет собой газ, движущийся независимо от других компонент, в том смысле, что для каждой из компонент в отдельности могут быть написаны гидродинамические уравнения движения. Взаимодействие между компонентами происходит в результате столкновений частиц и сводится к некоторой усредненной силе, равной среднему изменению импульса при столкновениях частиц, принадлежащих разным компонентам.

Электронный, ионный и нейтральный газы считаются идеальными, так что напряжения внутри компонент сводятся к соответствующим давлениям (о влиянии членов, связанных с вязкостью компонент, на форму закона Ома см. [7]).

Если скорости относительного движения компонент малы по сравнению с хаотическими скоростями частиц, то и смесь в целом можно считать идеальной жидкостью, и суммарное давление равным сумме парциальных давлений каждой из компонент (см., например, [1])

$$p = p_e + p_i + p_a \tag{1.2}$$

Так как в равновесном состоянии давление пропорционально числу частиц, то имеют место следующие формулы:

$$p_i = \frac{n}{2n + n_a + n'} p, \qquad p_e = \frac{n + n'}{2n + n_a + n'} p, \qquad p_a = \frac{n_a}{2n + n_a + n'} p \tag{1.3}$$

В пространстве, занятом движущейся средой, задано электрическое поле **E** и магнитное поле **H**. При этом предполагается, что **E** и **H** определяются как внешними полями, так и зарядами и токами в самой среде.

Определим силу, действующую на каждую из компонент, возникающую за счет столкновений частиц данной компоненты с частицами другой компоненты. Силу, действующую на ν-ю компоненту со стороны k-й компоненты, можно представить следующим образом:

$$\mathbf{f}_{\nu k} = \Delta \mathbf{J}_{\nu k} n_\nu \tau_{\nu k}^{-1}, \qquad \nu, k = e, i, a \tag{1.4}$$

Здесь n_ν — число частиц ν-го сорта в единице объема, $\tau_{\nu k}$ — среднее время между столкновениями частиц ν-го сорта с частицами k-го сорта, причем за среднее время между столкновениями принимается промежуток времени, за который частица ν-го сорта при взаимодействии с частицами k-го сорта теряет в среднем импульс $\Delta\mathbf{J}_{\nu k}$.

Обычно в качестве $\Delta\mathbf{J}_{\nu k}$ выбирается величина

$$\Delta\mathbf{J}_{\nu k} = -\frac{m_k m_\nu}{m_k + m_\nu}\mathbf{v}_{\nu k}$$

Здесь $\mathbf{v}_{\nu k}$ — средняя скорость частиц ν-й компоненты относительно частиц k-й компоненты, которая соответствует средней потере импульса при упругом столкновении двух частиц масс m_ν и m_k, движущихся с относительной скоростью $\mathbf{v}_{\nu k}$, при предположении о равной вероятности любого угла отклонения частицы в результате столкновения.

Так как $m_i \gg m_e$, то для электронного газа

$$\Delta\mathbf{J}_{ek} = -\mathbf{J}_{ek} \qquad (k = i,\, a)$$

а для ионного и нейтрального газов

$$\Delta\mathbf{J}_{\nu k} = -\frac{1}{2}\mathbf{J}_{\nu k} \qquad (k,\, \nu = i,\, a;\ k \neq \nu)$$

Здесь $\mathbf{J}_{\nu k}$ — импульс частиц ν-го газа относительно частиц k-го.

Теперь легко написать уравнения движения для каждой из компонент среды. Пусть скорость движения всей среды $\mathbf{v}$, скорость движения ионного газа относительно среды $\mathbf{v}_i$, а скорость движения электронного газа относительно ионного газа $\mathbf{v}_e$. Скорость движения нейтрального газа определяется через скорость среды и скорость ионного газа по формуле

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} - \frac{n}{n_a}\left(\mathbf{v}_i + \frac{m_e}{m_i}\mathbf{v}_e\right) \tag{1.5}$$

При выводе этого соотношения считается, что скорость элемента среды совпадает со скоростью его центра масс, кроме того использовано неравенство $m_e \ll m_i$. Последний член оставлен, несмотря на малую массу электрона, в связи с тем, что соотношение между $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{v}_i$ неизвестно и может оказаться, что $|m_e\mathbf{v}_e| \approx |m_i\mathbf{v}_i|$.

Кроме того, здесь и всюду в дальнейшем считается, что $n' \ll n$, так как значительные концентрации объемного заряда не могут возникнуть при отсутствии специальных внешних условий, обеспечивающих удержание этого заряда. В связи с этим членами порядка n'/n всюду пренебрегается по отношению к членам порядка 1.

Отметим, что условие $n' \ll n$ не равносильно предположению об отсутствии пространственного заряда, так как малое превышение числа электронов над числом ионов может дать заметный вклад в силу, действующую на среду со стороны электрического поля ($-n'e\mathbf{E} = \rho_e\mathbf{E}$), и в плотность тока за счет переноса зарядов вместе с движущейся средой ($-n'e\mathbf{v} = \rho_e\mathbf{v}$). Если газ полностью ионизован ($n_a = \mathbf{v}_a = 0$), то соотношение (1.5) упрощается и дает связь $\mathbf{v}_i$ с $\mathbf{v}_e$. Выкладки, аналогичные тем, которые будут проделаны здесь в предположении $\alpha \neq 1$ ($n_a \neq 0$), можно проделать и для случая полной ионизации (двухкомпонентная среда) [7], причем, как легко проверить, получающуюся при этом форму обобщенного закона Ома можно получить из соотношения (2.12) настоящей работы предельным переходом при $\alpha \to 1$ (соотношение (2.13)).

Кроме силы, обусловленной столкновениями частиц разных компонент, на электронный и ионный газы будет действовать сила, обусловленная электромагнитным полем.

Средний импульс электронов относительно ионов

$$\mathbf{J}_{ei} = m_e \mathbf{v}_e$$

Средний импульс электронов относительно нейтральных молекул

$$\mathbf{J}_{ea} = m_e(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_a) =$$

$$= m_e\left[\mathbf{v}_e + \left(1 + \frac{n}{n_a}\right)\mathbf{v}_i + \frac{n}{n_a}\frac{m_e}{m_i}\mathbf{v}_e\right] = m_e\left(\mathbf{v}_e + \frac{\mathbf{v}_i}{1-\alpha}\right)$$

Следовательно, уравнение движения электронного газа можно записать в виде

$$m_e n \frac{d_e(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e)}{dt} = -\operatorname{grad} p_e - ne\Big[\mathbf{E} +$$

$$+ \frac{1}{c}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e) \times \mathbf{H}\Big] - m_e n \mathbf{v}_e \tau^{-1} - m_e n\left(\mathbf{v}_e + \frac{\mathbf{v}_i}{1-\alpha}\right)\tau_e^{-1} \quad (1.6)$$

$$\frac{d_e}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e)\nabla] = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e)\nabla$$

Импульс ионов относительно нейтральных атомов равен

$$\mathbf{J}_{ia} = m_i(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_a) = m_i\frac{\mathbf{v}_i}{1-\alpha} + m_e\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{v}_e$$

Используя это выражение, уравнение движения ионного газа запишем в виде

$$m_i n \frac{d_i(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)}{dt} = -\operatorname{grad} p_i + ne\Big[\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) \times \mathbf{H}\Big] + nm_e\mathbf{v}_e\tau^{-1} -$$

$$-\frac{1}{2}nm_i\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{v}_e\tau_i^{-1}\frac{m_e}{m_i} - \frac{1}{2}nm_i\frac{\mathbf{v}_i}{1-\alpha}\tau_i^{-1} \qquad \left(\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)\nabla\right) \quad (1.7)$$

В уравнениях (1.6) и (1.7) τ, τ_i, τ_e — соответственно время между столкновениями электронов с ионами, ионов с нейтральными атомами и электронов с нейтральными атомами.

Вместо уравнения движения нейтрального газа будем пользоваться уравнением движения для смеси в целом, которое, конечно, будет следствием уравнения движений нейтрального газа и уравнений (1.6) и (1.7)

$$m_i(n + n_a)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p - n'e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[n\mathbf{v}_e + n'(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)] \times \mathbf{H} \quad (1.8)$$

Здесь использовалось определение плотности тока

$$\mathbf{j} = \sum_k n_k e_k \mathbf{v}_k = -(n + n')e(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e) +$$

$$+ ne(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) = -ne\mathbf{v}_e - n'e(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)$$

и неравенство $n' \ll n$.

§ 2. Получение обобщенного закона Ома. Оценим в уравнениях (1.6), (1.7), (1.8) члены, содержащие производные.

Будем предполагать, что характерное время задачи много больше времени между столкновениями частиц и что скорость компонент относительно центра масс мала по сравнению с хаотическими скоростями частиц, принадлежащих данной компоненте (это условие использовано при получении соотношений (1.2), (1.3). Если T — характерное время задачи, L — характерный размер и U — характерная скорость ($U = L/T$), то эти предположения равносильны следующим:

$$T \gg \max\{\tau, \tau_e, \tau_i\}$$
$$v_i \ll v_{ix}, \qquad |\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e| \ll v_{ex}, \qquad |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a| < v_{ax} \tag{2.1}$$

Здесь v_{ix}, v_{ex} и v_{ax} — хаотические скорости ионов, электронов и нейтральных атомов; причем, если состояние равновесное, температуры электронов, ионов и нейтральных частиц равны, то

$$m_e v_{ex}^2 = m_i v_{ix}^2 = m_a v_{ax}^2$$

Если условия (2.1) не имеют места, то из уравнений (1.6)—1.8) можно получить одно соотношение, связывающее плотность тока с другими параметрами задачи только при дополнительных специальных предположениях, например, если имеет место условие $v_i \ll v$.

Так как давление пропорционально произведению массы частиц на средний квадрат хаотической скорости, то при условии (2.1) членами

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e), \qquad (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e)\nabla(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e), \qquad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}, \quad \mathbf{v}_i\nabla(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)$$

в левых частях уравнений (1.6) и (1.7) можно пренебречь по сравнению с последними членами в правой части этих уравнений и с градиентами соответствующих давлений.

Кроме того, в силу уравнения (1.8) и формул (1.3) при условиях $m_i \gg m_e$, $m_i = m_a$, $n \gg n'$ имеет место соотношение

$$m_e n\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| = \frac{m_e}{m_i}\frac{n}{n+n_a}\left|\left[-n'e\mathbf{E} + \operatorname{grad} p - \frac{ne}{c}(\mathbf{v}_e \times \mathbf{H}) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - n'e(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) \times \mathbf{H}\right]\right| \ll \left|-\operatorname{grad} p_e - ne\mathbf{E} - \frac{ne}{c}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e) \times \mathbf{H}\right|$$

т. е. членом $m_e n d\mathbf{v}/dt$ в левой части уравнения (1.6) тоже можно пренебречь. Таким образом, при условии (2.1) уравнения (1.6)—(1.8) примут вид

$$-\operatorname{grad} p_e - ne\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e) \times \mathbf{H}\right] - m_e n \mathbf{v}_e \tau^{-1} -$$
$$- m_e n\left(\mathbf{v}_e + \frac{\mathbf{v}_i}{1-\alpha}\right)\tau_e^{-1} = 0$$
$$m_i n\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p_i + ne\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) \times \mathbf{H}\right] + nw_e\mathbf{v}_e\tau^{-1} - \tag{2.2}$$
$$-\frac{1}{2}nm_i\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{v}_e\tau_i^{-1}\frac{m_e}{m_i} - \frac{1}{2}nm_i\frac{\mathbf{v}_i}{1-\alpha}\tau_i^{-1}$$
$$m_i(n + n_a)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p - n'e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[n\mathbf{v}_e + n'(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)] \times \mathbf{H}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}_e - n'e(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i), \quad \mathbf{j}_i = ne\mathbf{v}_i$$
$$\varkappa \equiv \frac{1}{\omega_e\tau} = \frac{cm_e}{eH}\tau^{-1}, \qquad \varkappa_e \equiv \frac{1}{\omega_e\tau_e} = \frac{cm_e}{eH}\tau_e^{-1}, \quad \varkappa_i \equiv \frac{1}{\omega_i\tau_i} = \frac{1}{2}\frac{cm_i}{eH}\tau_i^{-1} \tag{2.3}$$

Здесь ω_e, ω_i представляют собой ларморовские частоты электронов и ионов. Величины $\omega_e\tau$, $\omega_e\tau_e$ и $\omega_i\tau_i$ обозначают, таким образом, число витков спиральной траектории, которое проходит соответствующая частица за время между двумя столкновениями с частицами других компонент.

В обозначениях (2.3) при условиях $m_i \gg m_e$ и $n \gg n'$ уравнения (2.2) примут вид

$$-\operatorname{grad} p_e - en\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)-\frac{1}{c}\,\mathbf{j}_i\times\mathbf{H}+\frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}+$$
$$+\frac{1}{c}(\varkappa+\varkappa_e)\,H\,(\mathbf{j}+n'e\mathbf{v})-\left(\frac{H}{1-\alpha}\frac{\varkappa_e}{c}-\frac{\varkappa}{c}H\frac{n'}{n}\right)\mathbf{j}_i=0 \qquad (2.4)$$

$$-\operatorname{grad} p_i + ne\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)+\frac{1}{c}\,\mathbf{j}_i\times\mathbf{H}-\left(\frac{\varkappa}{c}H-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\frac{\varkappa_i}{c}H\right)(n'e\mathbf{v}+\mathbf{j})-\left(\frac{\varkappa}{c}H\frac{n'}{n}+\frac{H}{1-\alpha}\frac{\varkappa_i}{\alpha}\right)\mathbf{j}_i=nm_i\frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (2.5)$$

$$-\operatorname{grad} p+\frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}-n'e\mathbf{E}=\frac{m_i n}{\alpha}\frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (2.6)$$

Сложив (2.4) и (2.5) и исключив $d\mathbf{v}/dt$ при помощи (2.6), получим выражение

$$\mathbf{j}_i=\frac{(1-\alpha)\,c}{H(\varkappa_e+\varkappa_i)}\Big[\alpha\operatorname{grad} p-\operatorname{grad}(p_e+p_i)-(1-\alpha)\,n'e\,\mathbf{E}+$$
$$+n'e\mathbf{v}\frac{H}{c}\left(\varkappa_e+\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\varkappa_i\right)+\frac{(1-\alpha)}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}+\frac{H}{c}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\varkappa_i+\varkappa_e\right)\mathbf{j}\Big] \qquad (2.7)$$

(в сумме уравнений (2.4) и (2.5) надо учесть член $n'eE$, так как члены $\pm ne\mathbf{E}$, входящие в эти уравнения, при сложении сокращаются).

Исключим теперь $\mathbf{j}_i$ при помощи (2.7) из уравнения (2.4), тогда получим соотношение, связывающее плотность тока с напряженностью электромагнитного поля и параметрами, характеризующими среду и ее движение

$$-\left[\operatorname{grad} p_e+\beta\,(\alpha\operatorname{grad} p-\operatorname{grad}(p_i+p_e)\right]-ne\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)+$$
$$+\left[1-2\,(1-\alpha)\,\beta-\alpha\,\frac{\varkappa_i}{\varkappa_e+\varkappa_i}\frac{m_e}{m_i}\right]\frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}+\beta\alpha n'e\mathbf{E}-$$
$$-\frac{1-\alpha}{c}\left(\beta+\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\frac{\varkappa_i}{\varkappa_e+\varkappa_i}\right)en'\mathbf{v}\times\mathbf{H}+\Big[\varkappa+(1-\beta)\,\varkappa_e-$$
$$-\beta\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\varkappa_i\Big]\frac{H}{c}(\mathbf{j}+n'e\mathbf{v})-\frac{1-\alpha}{H(\varkappa_e+\varkappa_i)}\Big\{[\alpha\operatorname{grad} p-$$
$$-\operatorname{grad}(p_e+p_i)]\times\mathbf{H}+\frac{1-\alpha}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}\times\mathbf{H}-(1-\alpha)\,n'e\mathbf{E}\times\mathbf{H}\Big\}=$$
$$=-\varkappa\frac{n'}{n}\frac{1-\alpha}{\varkappa_e+\varkappa_i}\Big[\alpha\operatorname{grad} p-\operatorname{grad}(p_e+p_i)-(1-\alpha)\,n'e\mathbf{E}+$$
$$+(\mathbf{j}+n'e\mathbf{v})\frac{H}{c}\left(\varkappa_e+\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\varkappa_i\right)+\frac{1-\alpha}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}\Big] \qquad (2.8)$$

$$\left(\beta=\frac{\varkappa_e}{\varkappa_i+\varkappa_e}\right)$$

Соотношение (2.8) можно рассматривать как обобщенную форму закона Ома для частично ионизованных газов.

Если скорости хаотического движения велики по сравнению с относительными скоростями движения компонент, то время между столкновениями определяется хаотическими скоростями (v_{ex}, v_{ix}). Так как в равновесном состоянии электроны и ионы обладают сравнимой кинетической энергией хаотического движения, а длина свободного пробега иона между его столкновениями с нейтральными атомами (l_{ia}) меньше длины свободного пробега электронов между их столкновениями с нейтральными атомами (l_{ea}), то

$$\frac{\tau_i}{\tau_e} = \frac{v_{ex}}{l_{ea}} \frac{l_{ia}}{v_{ix}} \approx \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{l_{ia}}{l_{ea}} < \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$$

В силу условия $m_i \gg m_e$ следует, что

$$\frac{\varkappa_e}{\varkappa_i} = \frac{\omega_i\tau_i}{\omega_e\tau_e} \approx \frac{m_e}{m_i} \frac{\tau_i}{\tau_e} < \frac{m_e}{m_i} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \ll 1 \tag{2.9}$$

т. е. электроны между двумя столкновениями с нейтральными атомами проходят значительно больше витков по спиральной траектории, чем ионы. При этом $\beta \ll 1$ и соотношение (2.8) упрощается

$$\begin{aligned} &-\operatorname{grad} p_e - ne\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H} + \frac{\varkappa+\varkappa_e}{c} H(\mathbf{j} - \mathbf{v}\rho_e) - \\ &-\frac{1-\alpha}{\varkappa_i H}\Big\{[\alpha \operatorname{grad} p - \operatorname{grad}(p_e + p_i)] \times \mathbf{H} + \frac{(1-\alpha)}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}\times\mathbf{H} + \\ &+ (1-\alpha)\,\rho_e\mathbf{E}\times\mathbf{H}\Big\} = -\frac{\varkappa}{\varkappa_i}\frac{n'}{n}(1-\alpha)\Big[\alpha \operatorname{grad} p - \operatorname{grad}(p_e+p_i) + \\ &\qquad + (1-\alpha)\,\rho_e\mathbf{E} + \frac{1-\alpha}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}\Big] \end{aligned} \tag{2.10}$$

В правой части уравнения (2.10) некоторые малые члены опущены в силу $m_i \gg m_e$, $n \gg n'$ и (2.9).

Членами, стоящими в правой части уравнения (2.10), можно пренебречь в силу $n \gg n'$ по отношению к соответствующим членам в левой части этого уравнения, если выполняется соотношение

$$\frac{\varkappa}{\varkappa_i} = \frac{\omega_i\tau_i}{\omega_e\tau} \approx \frac{m_e}{m_i} \frac{\tau_i}{\tau} < \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{\tau_e}{\tau} \lesssim 1 \tag{2.11}$$

Время между столкновениями электронов с нейтральными атомами τ_e больше времени между столкновениями электронов и ионов τ благодаря далеким столкновениям между заряженными частицами (см., например, [4]). Для не очень разреженных газов при умеренных температурах имеет место соотношение (2.11) и обобщенный закон Ома имеет вид

$$\begin{aligned} &-\operatorname{grad} p_e - ne\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H} + \frac{\varkappa+\varkappa_e}{c} H(\mathbf{j} - \rho_e\mathbf{v}) - \\ &-\frac{(1-\alpha)^2}{H\varkappa_i}\Big\{-\frac{\alpha}{\alpha+1}\operatorname{grad} p\times\mathbf{H} + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}\times\mathbf{H} + \rho_e\mathbf{E}\times\mathbf{H}\Big\} = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Для упрощения последующих формул первый член последнего слагаемого преобразован для случая $n = \mathrm{const}$, $n_a = \mathrm{const}$.

Если газ полностью ионизован ($\alpha = 1$), то $\varkappa_e = \varkappa_i = 0$. Кроме, того, из (1.5), следует, что $\mathbf{j}_i = (m_e/m_i)\,\mathbf{j}$, т. е. при $\alpha \to 1$ величины $\varkappa_i$, $\varkappa_e$ и $(1-\alpha)^2/\varkappa_i$ стремятся к нулю и закон Ома принимает вид

$$-\operatorname{grad} p_e - ne\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H} + \frac{\varkappa}{c} H(\mathbf{j} - \rho_e\mathbf{v}) = 0 \tag{2.13}$$

Всюду в дальнейшем неравенство (2.11) считается выполненным. Если для конкретной задачи это неравенство нарушается, то при получении закона Ома необходимо учитывать члены, стоящие в правой части уравнения (2.10).

§ 3. Различные формы обобщенного закона Ома. Величины коэффициентов в уравнении (2.12) зависят от физических свойств рассматриваемой среды. Кроме того, величины отдельных членов в этом уравнении зависят от механических характеристик (скорость, давление и т. д.) рассматриваемой задачи и величины напряженности электромагнитного поля. В связи с этим при рассмотрении той или иной конкретной задачи может оказаться, что некоторые члены в уравнении (2.12) пренебрежимо малы. При этом возможно использовать более простые формы обобщенного закона Ома. Для того чтобы выяснить, какие параметры определяют собой форму обобщенного закона Ома, оценим относительную величину членов, входящих в уравнение (2.12).

Отметим, прежде всего, что если газ частично ионизован, но

$$\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i} \ll 1 \tag{3.1}$$

то

$$\begin{gathered}\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i H}\left|\left[-\frac{\alpha}{\alpha+1}\operatorname{grad} p+\frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}\times\mathbf{H}+\rho_e\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right]\right| \ll \\ \ll\left|-\operatorname{grad} p_e+\frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{H}-en\mathbf{E}\right|\end{gathered} \tag{3.2}$$

и, следовательно, закон Ома для частично ионизованного газа при условии (3.1) совпадает с законом Ома для полностью ионизованного газа (2.14) с точностью до коэффициента при плотности тока.

Если электромагнитное поле оказывает существенное влияние на движение среды (именно такие задачи представляют интерес с точки зрения магнитной гидродинамики и ее приложений), то электромагнитные силы имеют порядок величины сил инерции среды

$$\rho U^2 \approx (n+n_a)\, m_i U^2 = \frac{1}{\alpha}\, n m_i U^2 \approx \frac{1}{c}\, jHL \approx \frac{H^2}{4\pi} \approx p \tag{3.3}$$

где L, U — характерные длина и скорость задачи (предполагается, что конвективные токи и токи смещения не превосходят по порядку величины токов проводимости).

Соотношение (3.3) показывает, что при любой степени ионизации

$$|\operatorname{grad} p_e| \lesssim \frac{1}{c}\,|\mathbf{j}\times\mathbf{H}| \tag{3.4}$$

причем $\operatorname{grad} p_e$ несуществен при малой степени ионизации.

Если скорость электронного газа относительно ионного много меньше характерной скорости задачи

$$U \gg v_e \tag{3.5}$$

то имеют место соотношения

$$\frac{1}{c}\,|\mathbf{j}\times\mathbf{H}| \ll \frac{ne}{c}\,|\mathbf{v}\times\mathbf{H}| \tag{3.6}$$

Соотношению (3.5) можно придать более обозримый вид, если воспользоваться формулой (3.3), а именно

$$U \gg \frac{nev_e}{ne} \approx \frac{j}{ne} \approx \frac{1}{\alpha}\,\frac{m_i U^2 c}{eLH}$$

или

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{U}{L}\,\frac{1}{\omega_i} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\Omega}{\omega_i} \ll 1 \qquad \left(\Omega = \frac{1}{T} = \frac{U}{L}\right) \tag{3.7}$$

Величину Ω назовем характерной частотой задачи. Таким образом, условие (3.4) равносильно предположению о том, что ларморовская частота ионов больше характерной частоты задачи.

Если имеет место неравенство

$$U \gg (\varkappa + \varkappa_e)\, v_e, \quad \text{или} \quad \frac{\Omega}{\omega_i} \ll \frac{\alpha}{\varkappa + \varkappa_e} \tag{3.8}$$

то

$$\frac{\varkappa + \varkappa_e}{c} H \mid \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v} \mid \ll \frac{ne}{c} \mid \mathbf{v} \times \mathbf{H} \mid \tag{3.9}$$

При выполнении неравенств (3.1) и (3.7) закон Ома будет иметь вид (0.2), обычно используемый в магнитной гидродинамике

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) + \rho_e \mathbf{v}, \qquad \sigma = \frac{nec}{H(\varkappa + \varkappa_e)} \tag{3.10}$$

Если определить время между столкновениями электрона (с ионом или нейтральным атомом) по формуле

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_e} \tag{3.11}$$

частота столкновений равна сумме частот столкновений разного рода), то для проводимости получим формулу

$$\sigma = \frac{ne^2\tau^*}{m_e}$$

совпадающую по форме с формулой для проводимости полностью ионизованного газа.

Если, кроме неравенств (3.1) и (3.7), имеет место неравенство (3.8), то закон Ома сводится к соотношению

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \tag{3.12}$$

Это соотношение используется при изучении движений бесконечно проводящих сред. При этом соотношения (3.3) позволяют привести неравенство $U \gg v_e$ к виду, указанному в [8]

$$\frac{U}{v_e} \approx \frac{neU}{j} \approx \frac{e\alpha HL}{cm_i U} \approx \sqrt{\frac{4\pi\alpha ne^2L^2}{c^2 m_i}} \gg 1 \tag{3.13}$$

При этих же условиях неравенство (3.1) можно привести к виду

$$\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i} = \frac{2(1-\alpha)^2\tau_i eH}{m_i c} \approx \sqrt{\frac{16\pi(1-\alpha)^4}{\alpha}\,\frac{\tau_i^2 e^2 U^2 n}{m_i c^2}} \ll 1 \tag{3.14}$$

Подчеркнем, что неравенства (3.13) и (3.14) могут быть использованы вместо (3.1) и (3.7) только при рассмотрении движений хорошо проводящих сред, когда имеет место соотношение (3.8).

Относительная величина членов

$$\frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{H}, \qquad \frac{\varkappa + \varkappa_e}{c} H(\mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v})$$

(определяется числом $\omega_e\tau^*$. Если

$$\omega_e\tau^* \ll 1 \tag{3.15}$$

то имеет место соотношение

$$\mid \mathbf{j} \times \mathbf{H} \mid \ll (\varkappa_e + \varkappa) H \mid \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v} \mid \tag{3.16}$$

Наконец, при выполнении неравенства

$$\frac{2(1-\alpha)\tau_i}{\alpha T} \ll 1 \tag{3.17}$$

имеет место соотношение (3.18)

$$\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i H}\left|\left\{-\frac{\alpha}{1+\alpha}\operatorname{grad} p\times\mathbf{H}+\frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}\times\mathbf{H}\right\}\right|\ll\left|-\operatorname{grad} p_e-\frac{en}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right|$$

Таким образом, относительная величина членов в уравнении (2.12) представляющем собой обобщенный закон Ома, определяется величиной следующих безразмерных параметров

$$\omega_e\tau^*,\qquad \frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i},\qquad \frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i},\qquad \frac{2(1-\alpha)\tau_i}{\alpha T},\qquad \frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i}(\omega_e\tau^*)^{-1} \tag{3.19}$$

связанных как с физическими свойствами среды, так и с условиями рассматриваемой задачи.

Параметр $\omega_e\tau^*$, характеризующий спиральный пробег электрона между двумя столкновениями, определяет относительную величину $(\omega_e\tau^*/H)\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}$. При атмосферном давлении, температурах $\sim 10\,000°$ К и умеренных магнитных полях ($\sim 10\,000$ *гаусс*) этот параметр невелик и членом $(\omega_e\tau^*/H)\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}$ можно пренебречь. Однако при тех же температурах и полях, но при давлениях $\sim 0{,}01$ *атм* величина $\omega_e\tau^*$ становится порядка 1 и член $(\omega_e\tau^*/H)\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}$ становится существенным [9]. При этом имеет место явление «анизотропии проводимости» газа.

Параметр $\alpha^{-1}\Omega/\omega_i$ определяет относительную величину членов $(\omega_e\tau^*/H)\mathbf{j}\times\mathbf{H}$ и $(\sigma/c)\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}$. Так как ларморова частота ионов тяжелых газов (аргон, воздух и т. д.) при $H\approx 10^4$ *гаусс* имеет порядок 10^6 *1/сек*, то для течений с характерной скоростью $U\approx 10^5$ *см/сек* при характерном размере $L\approx 10$ *см* величина $\Omega/\omega_i\approx 10^{-2}$. Следовательно, для «чистых» газов при термической ионизации параметр $\alpha^{-1}\Omega/\omega_i$ велик при температурах ниже 10 000° К в широком диапазоне давлений, т. е. член $(\omega_e\tau^*/H)\mathbf{j}\times\mathbf{H}$ значительно больше $(\sigma/c)\mathbf{v}\times\mathbf{H}$. Если ионизацию газа повысить при тех же условиях путем добавления легко ионизующихся присадков, то член $(\omega_e\tau^*/H)\mathbf{j}\times\mathbf{H}$ становится несущественным. При более высоких температурах это же явление имеет место и для «чистых» газов.

Параметр $(1-\alpha)^2/\varkappa_i$, определяющий относительную величину членов $(\omega_e\tau^*/H)\mathbf{j}\times\mathbf{H}$ и $c^{-1}\mathbf{j}\times\mathbf{H}\times\mathbf{H}$, может стать сравнимым с единицей только для разреженных газов, движущихся в сильных магнитных полях (когда не только электроны, но и ионы обладают спиральным пробегом). При умеренных полях и температурах этот параметр всегда много меньше единицы для плотных сред.

Параметр $[2(1-\alpha)/\alpha]\,\tau_i/T$, определяющий относительную величину $(\sigma/c)\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}$ и $c^{-1}\mathbf{j}\times\mathbf{H}\times\mathbf{H}$, в силу условия (2.1) может стать сравнимым с единицей только при очень низкой степени ионизации газа.

Параметр $\alpha^{-1}(\Omega/\omega_i)(\omega_e\tau^*)^{-1}$, являющийся произведением двух рассмотренных выше параметров, определяет относительную величину членов $(\sigma/c)\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}$.

Рассмотрим движение плотного газа в умеренном магнитном поле в случае, когда электроны, а следовательно, в силу (2.10) и (2.11), и ионы не обладают спиральным пробегом

$$\omega_e\tau^*\ll 1,\qquad \varkappa_i\gg 1$$

В этих условиях имеют место неравенства (3.1) и (3.15). Если при этом степень ионизации значительна, т. е. имеет место (3.7), то (3.17) удовлетворяется автоматически и закон Ома принимает форму (3.12) при выполнении неравенства

$$\alpha^{-1}(\Omega / \omega_i) \ll \omega_e \tau^* \tag{3.20}$$

(это неравенство (3.8), преобразованное при помощи (3.11) и форму (3.10), если имеет место соотношение $\alpha^{-1}(\Omega / \omega_i) \approx \omega_e \tau^*$. Эти формы закона Ома используются в магнитной гидродинамике и обсуждены выше. Если же степень ионизации мала так, что

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i} \gtrsim 1$$

то имеет место неравенство, обратное (3.20), и закон Ома принимает вид

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{3.21}$$

совпадающий по форме с законом Ома для неподвижных проводников. Так как при низкой степени ионизации индукционные токи малы, а токи, текущие в газе, должны быть значительными, если электромагнитное поле влияет на движение газа, т. е. выполняется соотношение (3.3), то естественно, что токи в газе могут создаваться при этом только за счет внешнего электрического поля. Очевидно, что закон Ома в этих условиях имеет вид (3.21). Неравенство (3.7) может нарушаться за счет уменьшения магнитного поля. В слабых магнитных полях закон Ома тоже имеет вид (3.21). При этом, если внешнее электрическое поле слабое, то закон Ома имеет вид (3.21), но соотношение (3.3) нарушается и электромагнитное поле в этом случае не влияет на движение среды.

Пусть условия задачи таковы, что $\omega_e \tau^* \approx 1$. При этом в силу (2.19) и (2.11) $\varkappa_i \gg 1$, т. е. имеет место неравенство (3.1). В этих условиях, если имеет место неравенство (3.7), закон Ома имеет форму (3.12). Если имеет место соотношение $\alpha^{-1}(\Omega / \omega_i) \approx 1$, то закон Ома принимает вид

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) - \frac{\omega_e \tau^*}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \frac{\sigma}{ne} \operatorname{grad} p_e \tag{3.22}$$

Эта форма закона Ома использовалась в ряде работ при изучении течений проводящего газа с анизотропной проводимостью. Если, наконец, имеет место неравен ство, обратное (3.7), то закон Ома имеет вид

$$\mathbf{j} = -\frac{\omega_e \tau^*}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \frac{\sigma}{en} \operatorname{grad} p_e \quad \text{при } |\mathbf{E}| \lesssim \frac{1}{c} |\mathbf{v} \times \mathbf{H}| \tag{3.23}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} - \frac{\omega_e \tau^*}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \frac{\sigma}{en} \operatorname{grad} p_e \quad \text{при } |\mathbf{E}| > \frac{1}{c} |\mathbf{v} \times \mathbf{H}| \tag{3.24}$$

Если условия задачи таковы, что $\omega_e \tau^* \gg 1$, но ионы еще не обладают спиральным пробегом ($\varkappa_i > 1$) или степень ионизации велика так, что имеет место неравенство (3.1), то аналогично предыдущему случаю получим следующие формы закона Ома:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \quad \text{при } \frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i} \ll 1$$

$$\sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) - \frac{\omega_e \tau^*}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \frac{\sigma}{ne} \operatorname{grad} p_e = 0 \quad \text{при } \frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i} \approx 1 \tag{3.25}$$

$$-\frac{\omega_e \tau^*}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \frac{\sigma}{ne} \operatorname{grad} p_e = 0 \quad \text{при } \frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i} \gg 1$$

Наконец, рассмотрим случай, когда условия задачи таковы, что как электроны так и ионы обладают спиральным пробегом, а степень ионизации мала так, что неравенство (3.7) нарушается. В этом случае закон Ома имеет вид

при $\dfrac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i} \approx 1$, $\dfrac{1}{\alpha} \dfrac{\Omega}{\omega_i} \approx 1$

$$ne\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \frac{\sigma}{ne} \operatorname{grad} p_e - \\ - \frac{(1-\alpha)^2}{H \varkappa_i} \left\{-\frac{\alpha}{\alpha+1} \operatorname{grad} p \times \mathbf{H} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \times \mathbf{H}\right\} = 0 \tag{3.26}$$

при $\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i} \approx 1, \; \frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i} \ll 1$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

при $\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i} \approx 1, \; \frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i} \gg 1$

$$-\operatorname{grad} p_e + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{H} - \frac{(1-\alpha)^2}{H\varkappa_i}\left\{-\frac{\alpha}{1+\alpha}\operatorname{grad} p + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{H} \times \mathbf{H}\right\} = 0 \qquad (3.27)$$

если $|\mathbf{E}| \lesssim c^{-1}|\mathbf{v} \times \mathbf{H}|$; если это соотношение не выполняется, то в (3.27) добавляется член $\sigma\mathbf{E}$. Если

$$\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i} \gg 1$$

то закон Ома имеет соответственно следующую форму:

при $\frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i} \ll 1, \; \frac{2(1-\alpha)\tau^i}{\alpha T} \approx 1$

$$-ne\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) - \frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i H}\left\{-\frac{\alpha}{\alpha+1}\operatorname{grad} p + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{H} \times \mathbf{H}\right\} = 0 \qquad (3.28)$$

при $\frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i} \ll 1, \; \frac{2(1-\alpha)\tau_i}{\alpha T} \gg 1, \; |\mathbf{E}| \lesssim \left|\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}\right|$

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha}\operatorname{grad} p + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{H} \times \mathbf{H} + \rho_e\mathbf{E} \times \mathbf{H} = 0 \qquad (3.29)$$

При $\alpha^{-1}\Omega/\omega_i \gtrsim 1$ закон Ома имеет вид (3.29).

Отметим в заключение, что в проведенных оценках характерные величины L, V, T всюду предполагались одинаковыми для всех механических и электромагнитных величин. Таким образом, эти оценки неприменимы к течениям в различного рода пограничных и переходных слоях и другим задачам, в которых характерные величины для разных переменных могут быть различными. В этих задачах (как, впрочем, и при постановке любой задачи) для выбора формы закона Ома необходимо проделать оценки, аналогичные предыдущим. Кроме того, во всех оценках существенно использовалось предположение о том, что электромагнитное поле существенно влияет на движение среды, т. е. имеет место соотношение (3.3), которое определяет вид одного из основных параметров $a^{-1}\Omega/\omega_i$. Если условия задачи таковы, что соотношение (3.3) нарушается (движение слабопроводящей среды с большой скоростью или медленные движения хорошо проводящих сред), то при оценках необходимо пользоваться непосредственно неравенством $U \gg v_e$, а не (3.7), которое является следствием $U \gg v_e$ только при условии (3.3).

Поступила 7 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Губанов А. И., Пунькин Ю. П. Уравнения магнитной плазмодинамики. ЖТФ. 1960, т. XXX, вып. 9.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. ГИТТЛ, 1957.
3. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Введение в магнитную гидродинамику. Изд-во Ин-та им. Баранова, 1960.
4. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. ИИЛ, 1957.
5. Kihara T. Macroscopic Foundation of Plasma Dynamics. J. Phys. Soc. of Japan, 1958, v. 13, № 5.
6. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. ИИЛ, 1959.
7. Баранов В. Б., Любимов Г. А. О форме обобщенного закона Ома в полностью ионизованном газе. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
8. Брагинский С. И. Об одном критерии применимости уравнений магнитной гидродинамики к плазме. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Изд-во АН Латв.ССР.
9. Steg L., Sutton G. W. The prospects of MHD power generation. Astronautics, 1960 v. 5 № 8.