

О ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

В. В. Сычев

(Москва)

При исследовании поля течения около тела, движущегося с большой сверхзвуковой скоростью, может иметь значение учет влияния вязкости и теплопроводности газа. Это влияние, проявляющееся на определенных режимах полета в виде взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком^[1], при еще больших скоростях и высотах полета может привести к необходимости рассмотрения всего поля течения на основе полных уравнений движения вязкого теплопроводного газа. Ниже рассматриваются некоторые задачи о движении вязкого теплопроводного газа на основе полных уравнений Навье — Стокса в предельном случае бесконечно большого числа Маха. Если предельный переход к бесконечно большому числу Маха совершается при фиксированных значениях плотности и скорости невозмущенного потока, так что значения температуры, давления и энтальпии стремятся к нулю, то в пределе, как известно, достигается некоторое не зависящее от числа Маха состояние поля течения^[2]. Этот результат представляет собой обобщение на случай вязкого теплопроводного газа известного газодинамического принципа независимости от числа Маха течения с очень большой сверхзвуковой скоростью^[3]. В этом смысле течения вязкого теплопроводного газа с очень большими сверхзвуковыми скоростями можно рассматривать как течения с нулевой температурой в невозмущенной области.

Следует сразу отметить главную особенность таких потоков, состоящую в том, что в этом случае вместо асимптотического затухания возмущений на бесконечности всегда имеется поверхность (фронт), отделяющая область возмущенного движения от остальной части пространства, заполненного невозмущенным газом. Это объясняется тем, что вязкость и теплопроводность газа являются функциями температуры, убывающими и обращающимися вместе с нею в нуль.

В первых разделах работы рассматриваются некоторые общие свойства установившихся гиперзвуковых течений около тел, сопровождающиеся образованием сильных ударных волн. Далее рассмотрены некоторые автомодельные неустановившиеся движения газа, причем свойство автомодельности этих движений обусловлено их предельным состоянием, т. е. нулевой температурой в невозмущенной области. Формально это связано с тем, что в этом случае уменьшается число определяющих параметров задачи^[4]. Во всех случаях газ рассматривается совершенным с постоянными удельными теплоемкостями, постоянным числом Прандтля и степенной зависимостью вязкости от температуры (или энтальпии).

§ 1. Структура сильной ударной волны. Простейшим типом движения вязкого теплопроводного газа является одномерное установившееся течение, однородное на бесконечности. Сюда относится хорошо изученное течение в ударной волне, распространяющейся по покоящемуся газу^[5]. Для выяснения особенностей поведения решения вблизи фронта и для получения некоторых важных для дальнейшего соотношений рассмотрим это течение в предположении бесконечно большого числа Маха невозмущенного потока. Пусть скорость в невозмущенной части потока равна V_∞ , плотность ρ_∞ , давление p_∞ , температура T_∞ и энтальпия h_∞ равны нулю. Угол α между нормалью к поверхности фронта (фиг. 1) и вектором скорости V_∞ будем для общности полагать отличным от нуля (косой скачок).

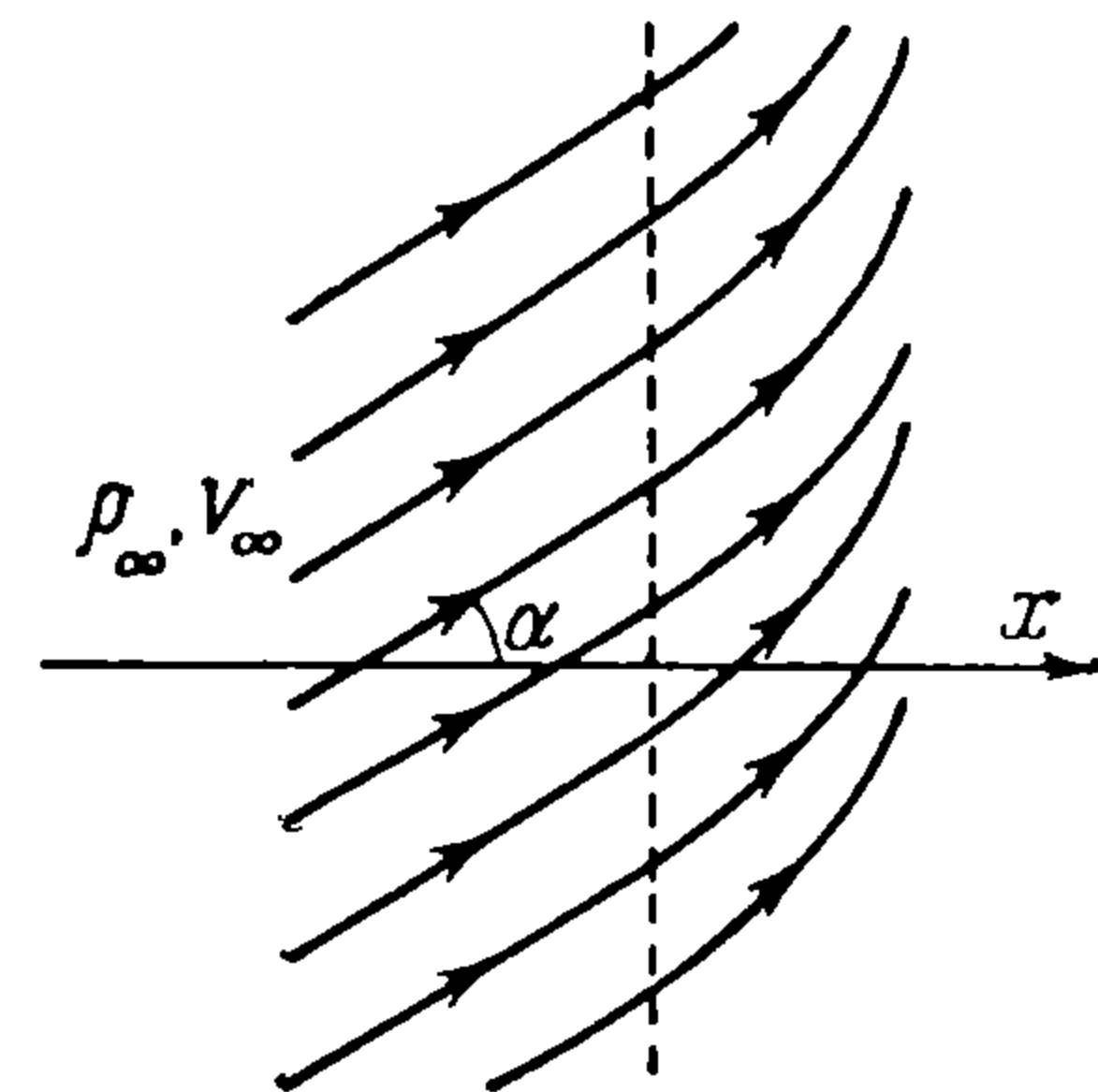
Ось x декартовой системы координат направим по нормали к фронту. Обозначим составляющие вектора скорости исследуемого течения через u, v, w , давление, плотность и энтальпию соответственно через p, ρ, h .

Закон зависимости вязкости от энтальпии запишем в виде

$$\mu = Ch^n \quad (1.1)$$

где C — постоянная. Из входящих в условия задачи размерных постоянных ρ_∞, V_∞, C можно составить величину l , имеющую размерность длины

$$l = \frac{C}{\rho_\infty} V_\infty^{2n-1} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

(физический смысл этой величины рассмотрен ниже). Введем безразмерную независимую переменную x° и безразмерные искомые функции

$$\begin{aligned} x^\circ &= \frac{x}{l \cos^{2n-1} \alpha}, & u^\circ &= \frac{u}{V_\infty \cos \alpha}, & v^\circ &= \frac{v}{V_\infty \sin \alpha} \\ p^\circ &= \frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2 \cos^2 \alpha}, & \rho^\circ &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, & h^\circ &= \frac{h}{V_\infty^2 \cos^2 \alpha} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения одномерного установившегося движения для этих переменных могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^\circ u^\circ}{dx^\circ} &= 0, & \rho^\circ u^\circ \frac{du^\circ}{dx^\circ} + \frac{dp^\circ}{dx^\circ} &= \frac{4}{3} \frac{d}{dx^\circ} \left(h^{\circ n} \frac{du^\circ}{dx^\circ} \right) \\ \rho^\circ u^\circ \frac{dh^\circ}{dx^\circ} &= u^\circ \frac{dp^\circ}{dx^\circ} + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx^\circ} \left(h^{\circ n} \frac{dh^\circ}{dx^\circ} \right) + \frac{4}{3} h^{\circ n} \left(\frac{du^\circ}{dx^\circ} \right)^2, & p^\circ &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho^\circ h^\circ \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь σ — число Прандтля, $\gamma = Cp/Cv$ — отношение удельных теплоемкостей газа. Граничные условия задачи следующие:

$$u^\circ = \rho^\circ = 1, \quad p^\circ = h^\circ = 0 \quad \text{при } x^\circ \rightarrow -\infty \quad (1.5)$$

решение ограничено при $x^\circ \rightarrow +\infty$.

Поперечная составляющая скорости во всем поле течения $v^\circ = 1$.

Заметим, что уравнения (1.4) и граничные условия (1.5), записанные для безразмерных переменных, не содержат параметра α . Этот факт может рассматриваться как закон подобия для течений в ударных волнах большой интенсивности.

Система (1.4), как известно [6], может быть проинтегрирована до конца при $\sigma = 3/4, n = 1$. В этом случае ее частное решение, удовлетворяющее (1.5), имеет вид (см. приложение А)

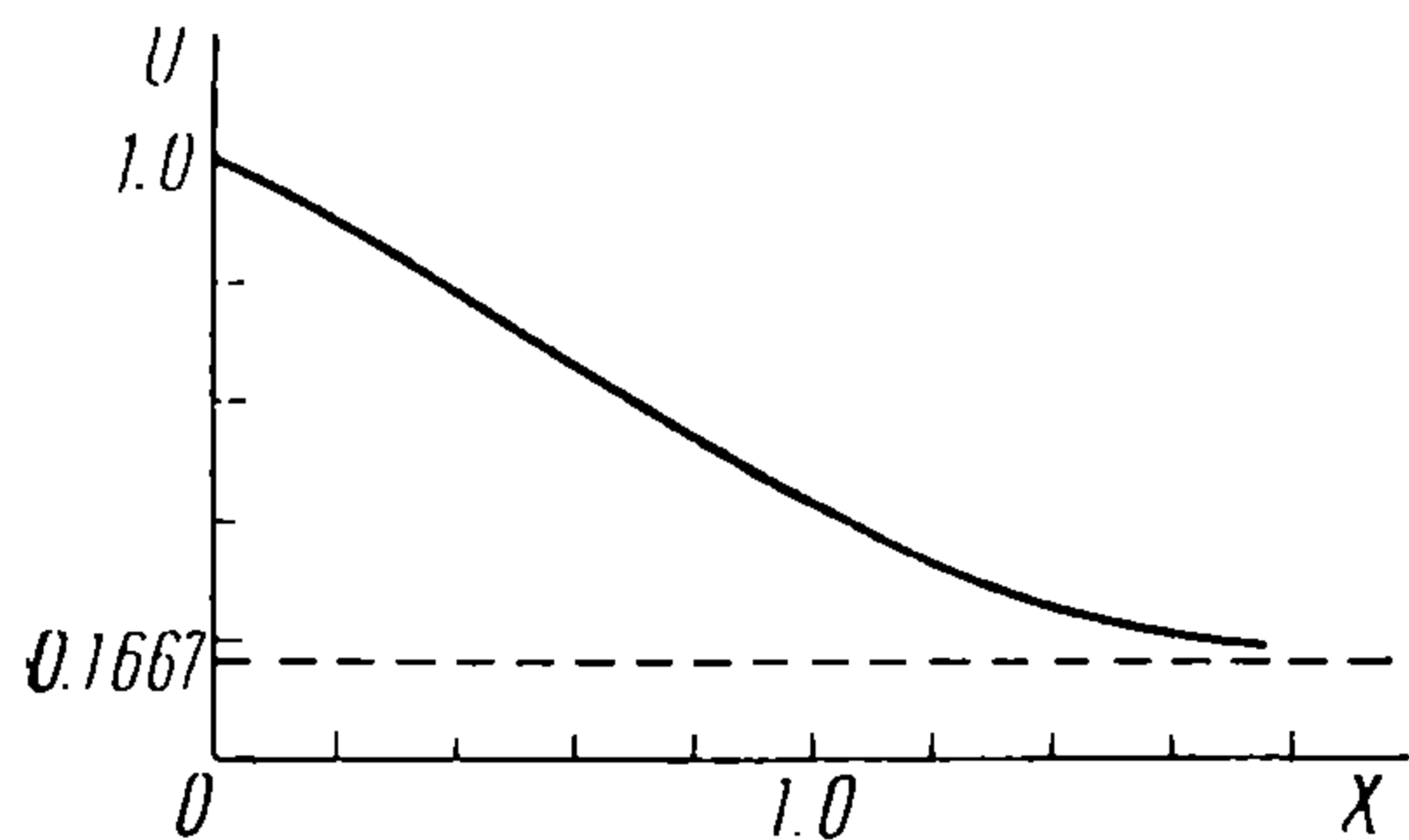
$$\begin{aligned} x^\circ &= \frac{2}{3} (1 + \varepsilon) \left[(1 + \varepsilon) (1 - u^\circ) + \varepsilon (1 + \varepsilon) \ln \frac{1 - \varepsilon}{u^\circ - \varepsilon} + \frac{1 - u^{\circ 2}}{2} \right] \\ \rho^\circ &= \frac{1}{u^\circ}, \quad h^\circ = \frac{1 - u^{\circ 2}}{2}, \quad p^\circ = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho^\circ h^\circ \quad \left(\varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Это решение представлено на фиг. 2, где

$$U = u/V_\infty \cos \alpha, \quad X = x/l \cos \alpha$$

Из рассмотрения полученных зависимостей видно, что возмущенная область течения отделена от однородного набегающего потока фронтом, который (выбором несущественной произвольной постоянной интегрирования) совмещен с осью $x = 0$. Поверхность фронта в рассмотренном случае $n = 1$ будет поверхностью разрыва производных, имеющих при $x = +0$ конечные отличные от нуля значения.

В общем случае произвольного положительного n искомые функции вблизи фронта (при $x \rightarrow 0$) могут быть представлены в следующем виде (см. приложение А)



Фиг. 2

$$(1.7) \quad \begin{aligned} u^\circ &\approx 1 - \left(\frac{3n}{4\gamma} x^\circ\right)^{1/n}, & p^\circ &\approx 1 + \left(\frac{3n}{4\gamma} x^\circ\right)^{1/n} \\ h^\circ &\approx \left(\frac{3n}{4\gamma} x^\circ\right)^{1/n}, & p^\circ &\approx \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{3n}{4\gamma} x^\circ\right)^{1/n} \end{aligned}$$

Таким образом, в общем случае поведение решения вблизи фронта является особым.

Полученные результаты уместно сопоставить с аналогичными выводами в отношении поведения решения в задачах нелинейной теории теплопроводности в неограниченной среде, когда в начальном состоянии среды ее температура равна нулю [7].

Выясним физический смысл величины l (1.2), введенной в качестве характерной длины. Эта величина всегда пропорциональна средней длине свободного пробега молекул, вычисленной для условий прямого скачка при $x \rightarrow +\infty$.

В самом деле, средняя длина свободного пробега может быть выражена через макроскопические величины в виде [8]

$$l^\circ \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{\sqrt{p\rho}}$$

Отсюда, пользуясь (1.1), (1.2), (1.3) и подставляя найденные значения функций при $x \rightarrow +\infty$, получаем выражение

$$l = \frac{(\gamma+1)^{2n}}{2^{n-1}\gamma^n \sqrt{(\gamma-1)\pi}} l^\circ \quad (\gamma = 1.4, l \approx 3.66l^\circ \text{ при } n = 1) \quad (1.8)$$

§ 2. Течение в следе за телом. Обратимся к рассмотрению установившегося гиперзвукового движения вязкого теплопроводного газа за телом конечных размеров.

Ограничимся рассмотрением плоского случая и примем линейную зависимость коэффициента вязкости от температуры $\mu = Ch$.

Вновь введем безразмерные независимые переменные и безразмерные искомые функции

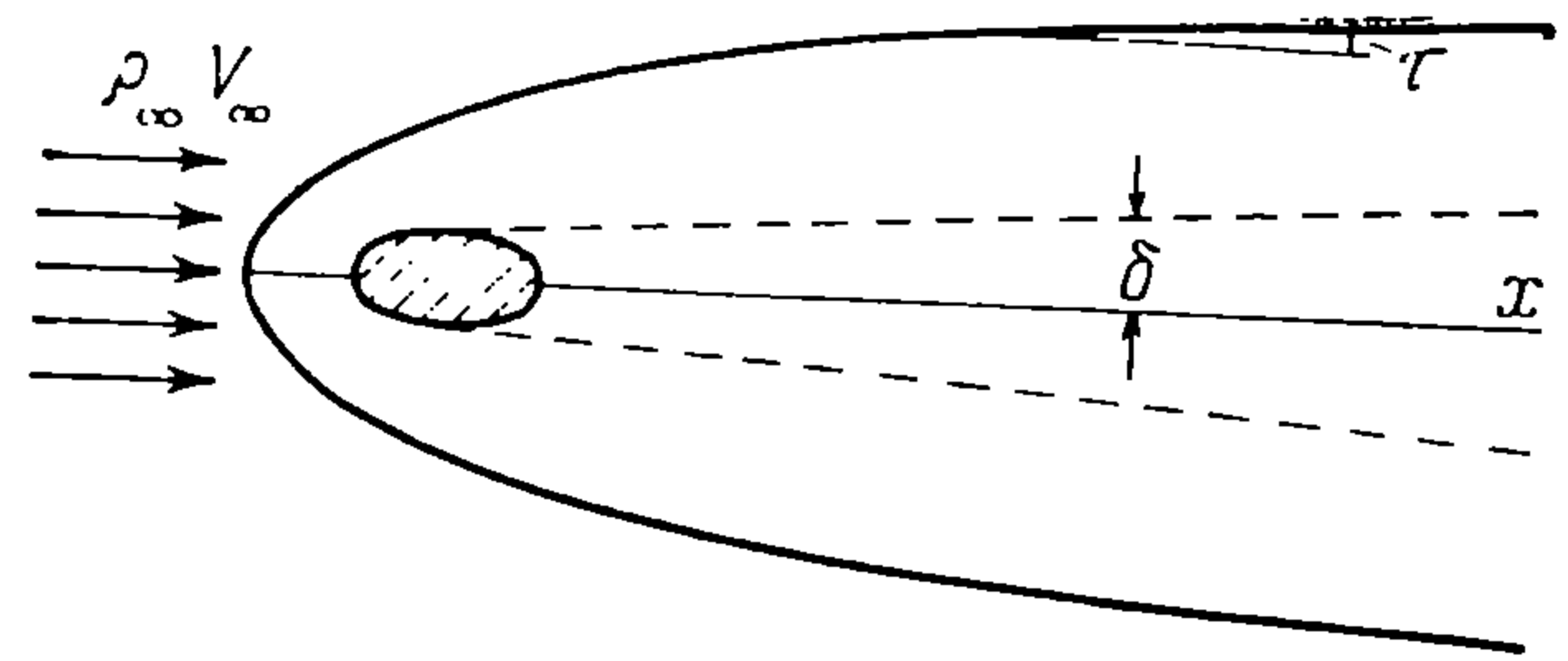
$$(2.1) \quad \begin{aligned} x^\circ &= \frac{x}{l}, & y^\circ &= \frac{y}{l}, & u^\circ &= \frac{u}{V_\infty}, & v^\circ &= \frac{v}{V_\infty}, & p^\circ &= \frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2} \\ \rho^\circ &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, & h^\circ &= \frac{h}{V_\infty^2} & & & & & & \left(l = \frac{CV_\infty}{\rho_\infty}\right) \end{aligned}$$

Уравнения количества движения, неразрывности, притока тепла и уравнение состояния примут вид

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} h \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} h \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4}{3} h \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \quad p = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho h \\ \rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \\ &+ 2h \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и дальше значок $^\circ$ у символов безразмерных величин опущен.

Исследуем характер течения в следе за телом на расстояниях $x \gg L$, где L — характерный размер тела¹. Так как в предельном случае потока с числом $M_\infty \rightarrow \infty$ возмущенная область ограничена фронтом, то рассмотрим прежде всего характер течения вблизи фронта, т.е. структуру ударной волны при $x \gg L$. Угол наклона фронта τ к направлению невозмущенного потока при больших x можно считать малым (фиг. 3).



Фиг. 3

Из результатов, полученных в § 1, следует, что при $\tau \ll 1$ для переменных системы (2.2) в рассматриваемой области течения вблизи фронта справедливы следующие оценки:

$$y \sim \tau x, \quad u \sim 1, \quad v \sim \tau, \quad \rho \sim 1, \quad p \sim \tau^2, \quad h \sim \tau^2 \quad (2.3)$$

а для приращений этих переменных имеем

$$\Delta x \sim 1, \quad \Delta y \sim \tau, \quad \Delta u \sim \tau^2, \quad \Delta v \sim \tau, \quad \Delta \rho \sim 1, \quad \Delta p \sim \tau^2, \quad \Delta h \sim \tau^2 \quad (2.4)$$

Оценивая на основании (2.3), (2.4) порядки величин членов, входящих в (2.2) и сохраняя главные члены этих уравнений, получим приближенную систему вида

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{4}{3} h \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \quad p = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho h \quad (2.6)$$

Система уравнений (2.6) будет не зависимой от (2.5) и, как легко видеть, не отличается (при замене x на переменную времени t) от полной системы уравнений одномерного неустановившегося движения вязкого теплопроводного газа. Таким образом, имеет место полная эквивалентность течения в ударной волне на больших расстояниях от обтекаемого тела и одномерного неустановившегося движения газа вблизи фронта, перемещающегося по закону $dY/dt = \tau(t)$.

¹ Кроме того, выполняется конечно условие $l < L$, являющееся критерием применимости уравнений механики сплошной среды.

Заметим, что отношение отброшенных в (2.5), (2.6) членов к оставленным, определяющее относительную ошибку полученного результата, имеет порядок τ^2 .

Обратимся теперь к рассмотрению течения во внутренней области следа. Поперечные размеры этой области будут порядка $\Delta y \sim y \sim \tau x$. Поэтому для этой области, кроме членов, отброшенных в уравнениях (2.2) при выводе системы (2.5), (2.6), могут быть также отброшены все вязкие и теплопроводные члены этих уравнений, отношение которых к инерционным членам, как легко видеть, имеет здесь порядок $1/x$. Однако это не имеет места вблизи оси $y = 0$, где роль вязкости и теплопроводности, как видно, весьма существенна. В самом деле, приравнивая, как обычно, порядки величин вязкого и инерционного членов первого из уравнений (2.2), получим, что влиянием вязкости нельзя пренебрегать на расстояниях от оси порядка

$$\delta \sim \tau \sqrt{x} \quad (2.7)$$

Величина поперечной составляющей скорости в этой области течения очевидно имеет порядок

$$v \sim \frac{\delta}{x} \sim \frac{\tau}{\sqrt{x}} \quad (2.8)$$

Сделанные оценки позволяют упростить уравнения системы (2.2), которая для этой области принимает вид

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h \quad (2.10)$$

При этом отношение отброшенных в этих уравнениях членов к оставленным имеет порядок τ^2 .

Здесь не будет рассматриваться задача интегрирования полученной системы приближенных уравнений (2.10). Существенным для дальнейшего будет лишь то обстоятельство, что она не содержит членов, отброшенных при выводе уравнений (2.6), вследствие чего последние могут рассматриваться как уравнения, характеризующие асимптотические поведения всего поля течения на больших расстояниях за телом. Поэтому и отмеченная выше аналогия с неустановившимся одномерным движением оказывается справедливой для всего поля течения в следе. Физически это означает, что на больших расстояниях за телом, движущимся в вязком теплопроводном газе с очень большой сверхзвуковой скоростью, справедлив закон плоских сечений, подобно тому как это имеет место в случае невязкого и нетеплопроводного газа [9]. При этом в центральной части следа (вблизи оси) основное влияние на течение в поперечных плоскостях оказывает теплопроводность газа. Это конечно не означает, что роль вязкости здесь вообще несущественна, так как согласно уравнению (2.9) она оказывает определяющее влияние на изменение продольной составляющей вектора скорости.

§ 3. **Аэродинамическое сопротивление тела.** Для полного определения течения на больших расстояниях за телом необходимо установить его связь с аэродинамическим сопротивлением тела и суммарным тепловым потоком через его поверхность. Это нетрудно сделать, воспользовавшись установленным в предыдущем параграфе принципом эквивалентности течения в следе и одномерным неустановившимся движением газа. В этой аналогии соответствующее нестационарное движение газа очевидно будет из-энергетическим, т. е. происходящим под действием сильного взрыва на плоскости. Энергию единицы площади заряда E при этом необходимо приравнять сумме аэродинамического сопротивления тела X и интегрального потока тепла Q в единицу времени через его поверхность

$$E = X + Q \quad (3.1)$$

(Величины E , X , Q выражаются в механических единицах и будут безразмерными, если отнести их к величине $\rho_\infty V_\infty^2 l$. Подробный вывод этой формулы дается в приложении В.)

С другой стороны, полную энергию неустановившегося движения газа в момент времени t можно выразить в виде интеграла от внутренней и кинетической энергии частиц по возмущенной области

$$E = 2 \int_0^{Y(t)} \rho \left(\frac{h}{\gamma} + \frac{v^2}{2} \right) dy, \quad Y(t) = \int_0^t \tau(t) dt \quad (3.2)$$

Здесь $Y(t)$ определяет закон распространения фронта.

Таким образом, известная газодинамическая аналогия между гиперзвуковым течением на больших (по сравнению с характерным размером тела) расстояниях от тела и одномерным неустановившимся движением за ударной волной сильного взрыва [9] обобщается на случай движения вязкого теплопроводного газа в предельном случае бесконечно большого числа Маха. При этом важно подчеркнуть, что характер течения в следе совершенно не зависит от характера аэродинамического сопротивления, т. е. от того, обусловлено оно силами давления или силами трения. Так, например, течения на больших расстояниях за двумя теплоизолированными ($Q = 0$) пластинами, обладающими одинаковым сопротивлением, одна из которых установлена по потоку, а другая перпендикулярно потоку, будут совершенно одинаковыми.

Полученные результаты позволяют оценить характер поведения вязкого следа вблизи оси. Воспользуемся известным законом распространения плоской ударной волны сильного взрыва в невязком газе

$$Y(t) \sim t^{2/3} \quad (3.3)$$

и приближенно примем его в качестве закона распространения фронта в исследуемом случае. Тогда для характерного угла наклона фронта при больших x получим

$$\tau \sim x^{-1/3} \quad (3.4)$$

откуда при помощи (2.7) получаем, что вязкий след расширяется по закону

$$\delta \sim x^{1/3} \quad (3.5)$$

Наконец, заметим, что система (2.6) и граничные условия на фронте ($\rho = 1$, $p = h = v = 0$) инвариантны относительно преобразований:

$$x = \xi, \quad y = a\eta, \quad v = av_1, \quad p = a^2 p_1, \quad \rho = \rho_1, \quad h = a^2 h_1 \quad (3.6)$$

Выбором постоянной

$$a = E^{1/3} \quad (3.7)$$

условие постоянства полной энергии в возмущенной области приводится к виду

$$2 \int_0^{\tau(\xi)} p_1 \left(\frac{h_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2} \right) d\eta = 1 \quad (3.8)$$

Соотношения (3.6), (3.7) устанавливают закон подобия для течений с различными значениями энергии E . Согласно этому закону ширина возмущенной области и величина скорости течения изменяются пропорционально $E^{1/3}$, а давление и температура — пропорционально $E^{2/3}$.

§ 4. Автомодельные движения вязкого теплопроводного газа. Если температура газа в невозмущенной области равна нулю, то единственным термодинамическим параметром, определяющим состояние газа в этой области, будет плотность ρ_∞ . Другим размерным определяющим параметром задачи будет постоянная C в законе зависимости вязкости от энтальпии (1.2). Размерности этих величин следующие:

$$[\rho_\infty] = \frac{M}{L^3}, \quad [C] = \frac{MT^{2n-1}}{L^{2n+1}} \quad (4.1)$$

Здесь L — символ единицы измерения длины, T — времени, M — массы. Если среди других определяющих параметров задачи не содержится величин с независимыми от ρ_∞ и C размерностями, то такая задача, как известно, будет автомодельной [4]. Для исключения символа массы образуем отношение ρ_∞ / C , имеющее размерность

$$\left[\frac{\rho_\infty}{C} \right] = \frac{L^{2n-2}}{T^{2n-1}} \quad (4.2)$$

Отсюда следует, что автомодельными будут, например:

а) равноускоренное движение теплоизолированного тела, не имеющего характерной длины (пластины, конуса, клина) при $n = 3/2$, так как в этом случае (4.2) будет иметь размерность ускорения $[a] = LT^{-2}$;

б) вращение теплоизолированных конических осесимметричных тел при $n = 1$, так как в этом случае (4.2) будет иметь размерность угловой скорости $[\Omega] = T^{-1}$;

в) точечный взрыв с центральной симметрией при $n = 1/6$, так как в этом случае (4.2) будет иметь размерность

$$\left[\frac{\rho_\infty}{E} \right]^{1/3} = \frac{L^{-5/3}}{T^{-2/3}} \quad (E — энергия взрыва)$$

Остановимся подробнее на рассмотрении двух первых случаев, связанных с движением тел. Случай автомодельного решения для сильного взрыва был указан в работе Г. М. Бам — Зеликовича (см. [4]).

а) *Равноускоренное движение пластины.* Рассмотрим простейшую из задач первого типа — задачу о движении вязкого теплопроводного газа под действием бесконечной пластины, которая в некоторый момент времени начинает равноускоренное движение из состояния покоя.

Вектор ускорения будем считать направленным под углом α к поверхности пластины (фиг. 4). Ось x декартовой системы координат совместим с ее положением в начальный момент времени. Рассматриваемое движение может очевидно зависеть лишь от двух независимых переменных y и t . Так как среди определяющих параметров задачи отсутствуют постоян-

ные с размерностями длины и времени, то единственной возможной безразмерной комбинацией независимых переменных и этих параметров будет

$$\eta = \frac{2y}{at^2} \quad (4.3)$$

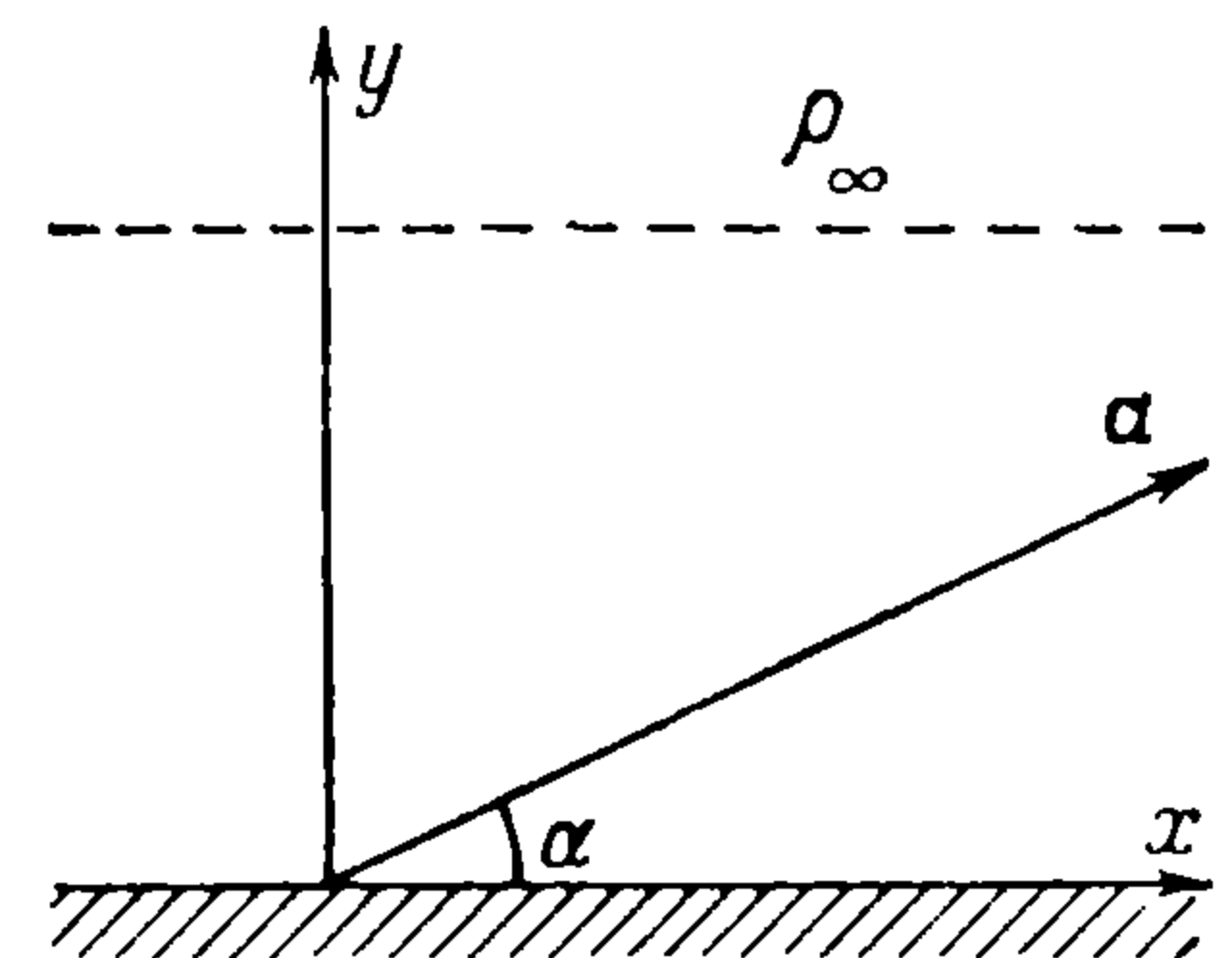
Искомые функциями задачи будут составляющие вектора скорости u , v , давление p , плотность ρ и энтальпия h . Легко видеть, что единственно возможными функциями от этих независимых переменных будут зависимости вида

$$u = atV(\eta), \quad v = atV(\eta) \quad (4.4)$$

$$p = \rho_\infty a^2 t^2 P(\eta), \quad \rho = \rho_\infty R(\eta), \quad h = a^2 t^2 H(\eta)$$

Зависимость коэффициента вязкости от энтальпии, на основании сказанного выше, примем в виде

$$\mu = Ch^{3/2} = Ca^3 t^3 H^{3/2}(\eta) \quad (4.5)$$



Фиг. 4

Подстановка (4.3) — (4.5) в полную систему уравнений движения вязкого теплопроводного газа приведет к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для безразмерных функций U , V , P , R , H (которая здесь не выписывается). Безразмерным параметром задачи, как легко видеть, будет параметр

$$k = \frac{\rho_\infty}{aC}$$

характеризующий влияние вязкости и теплопроводности газа (наподобие числа Рейнольдса).

Рассмотрим теперь граничные условия задачи. На поверхности пластины, которая предполагается теплоизолированной, должны удовлетворяться условия прилипания и отсутствия потока тепла. Записанные для безразмерных переменных эти условия, как легко видеть, будут

$$U(1) = \cos \alpha, \quad V(1) = \sin \alpha, \quad H'(1) = 0 \quad (4.6)$$

В невозмущенной области температура равна нулю, вследствие чего, как указывалось выше, она будет отделяться от области возмущенного движения фронтом¹, закон перемещения которого $Y(t)$, очевидно, определяется условиями автомодельности

$$Y(t) = \eta_0 \frac{at^2}{2} \quad (4.7)$$

где η_0 — постоянная, подлежащая определению. Граничные условия на фронте, очевидно, имеют вид

$$U(\eta_0) = V(\eta_0) = P(\eta_0) = H(\eta_0) = 0, \quad R(\eta_0) = 1 \quad (4.8)$$

Условия (4.6), (4.8) должны полностью определять решение краевой задачи, включая определение постоянной η_0 .

в) Движение вязкого теплопроводного газа под действием вращающихся конических поверхностей. Рассмотрим автомодельное движение другого

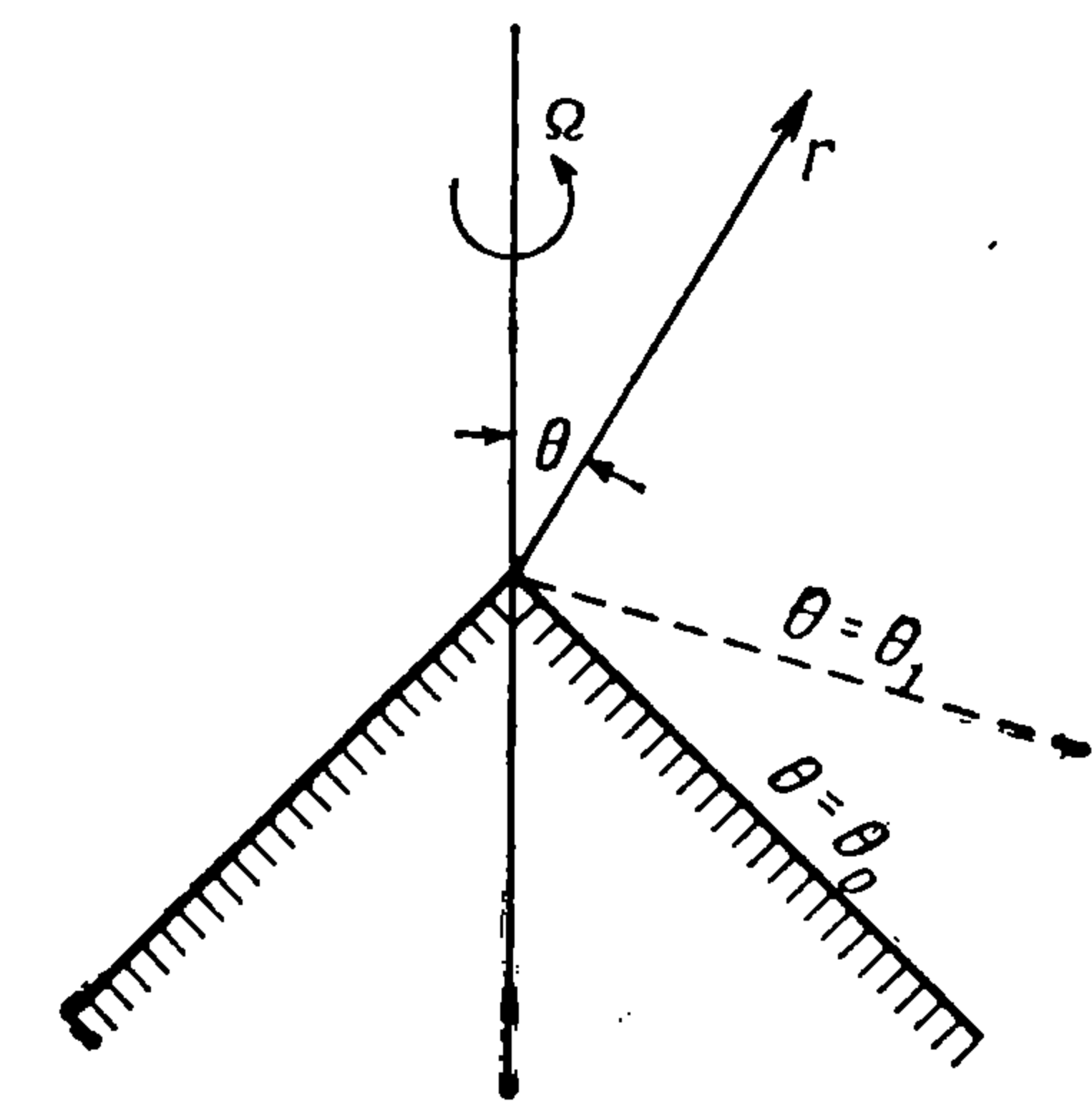
¹ Математически необходимость существования фронта в этой и других задачах может быть обоснована от противного — попыткой рассмотрения асимптотического проведения решения на бесконечности, приводящей к противоречию.

типа, связанное с равномерным вращением конической осесимметричной поверхности вокруг ее оси. Расположим начало сферической системы координат r, θ, φ в вершине конуса и ось $\theta = 0$ совместим с осью его симметрии (фиг. 5). Будем вновь полагать, что вращения тела с постоянной угловой скоростью Ω начинается в момент времени $t = 0$ из состояния покоя и температура невозмущенной среды равна нулю. Рассматриваемое движение может, очевидно, зависеть лишь от трех независимых переменных r, θ, t , а так как среди определяющих параметров задачи, не содержащих размерности массы, имеется лишь угловая скорость, то зависимость от переменной r может быть получена в явном виде. В качестве безразмерной переменной времени примем

$$\tau = \Omega t \quad (4.9)$$

Искомые функциями задачи будут составляющие вектора скорости V_r, V_θ, V_λ ; давление p ; плотность ρ и энтальпия газа h . Единственными возможными зависимостями этих функций от независимых переменных будут, очевидно, зависимости вида

$$\begin{aligned} V_r &= \Omega r U(\theta, \tau), & V_\theta &= \Omega r V(\theta, \tau) & (4.10) \\ V_\varphi &= \Omega r W(\theta, \tau), & p &= \rho_\infty \Omega^2 r^2 P(\theta, \tau) \\ \rho &= \rho_\infty R(\theta, \tau), & h &= \Omega^2 r^2 H(\theta, \tau) \end{aligned}$$



Фиг. 5

Коэффициент вязкости, в соответствии со сказанным выше, будем полагать линейно зависящим от энтальпии

$$\mu = Ch = C \Omega^2 r^2 H(\theta, \tau) \quad (4.11)$$

В результате подстановки (4.9) — (4.11) в дифференциальные уравнения движения вязкого теплопроводного газа получим для безразмерных функций (4.10) систему уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Граничными условиями на поверхности тела $\theta = \theta_0$, которая предполагается теплоизолированной, как легко видеть, будут

$$U = V = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad W = \sin \theta_0 \quad (4.12)$$

Кроме того, необходимо удовлетворить условиям на фронте, закон перемещения которого $\theta = \theta_1(\tau)$ подлежит определению. Эти условия будут

$$U = V = W = P = H = 0, \quad R = 1 \quad (4.13)$$

Система граничных условий (4.12) — (4.13) должна полностью определить решение задачи, включая определение функции $\theta_1(\tau)$.

Заметим, что из условия (4.13) следует, что фронт, отделяющий область влияния от области покоящегося газа, распространяется в виде конической поверхности с вершиной в вершине вращающегося конуса. Кроме того, из вида решения (4.10) следует, что составляющие скорости вдоль каждого луча, проведенного из начала координат, возрастают пропорционально расстоянию, давление и энтальпия — пропорционально квадрату расстояния, а плотность сохраняется постоянной.

Выше рассмотрены некоторые частные задачи, связанные с движением вязкого теплопроводного газа с очень большими сверхзвуковыми скоростями; однако полученные результаты все же позволяют сделать некоторые общие выводы о постановке задачи обтекания произвольного тела при $M_\infty \rightarrow \infty$. Важнейшим свойством любого течения с бесконечно большим числом Маха будет наличие фронта, отделяющего область возмущенного движения от однородного набегающего потока. Вследствие этого условие асимптотического затухания всех возмущений на бесконечности всегда заменятся краевым условием на поверхности фронта. Поведение решения вблизи этой поверхности будет особым и достаточно просто может быть установлено путем рассмотрения уравнений движения в ее малой окрестности. При таком рассмотрении элемент поверхности фронта можно считать плоским, а скорость его перемещения (в направлении нормали) в течение малого промежутка времени постоянной. Сведение задачи обтекания тела при $M_\infty \rightarrow \infty$ к краевой задаче в конечной области (наподобие задачи обтекания тела идеальным газом), по-видимому, облегчает ее решения приближенными методами.

Приложение А. Интегрирование системы уравнений (1.4) в частном случае числа Прандтля $\sigma = 3/4$ производится весьма просто. Первое из уравнений этой системы вместе с граничными условиями (1.5) дает

$$\rho^\circ u^\circ = 1 \quad (A.1)$$

В результате интегрирования второго уравнения получаем

$$u^\circ + p^\circ = \frac{4}{3} h^{\circ n} \frac{du^\circ}{dx^\circ} + 1 \quad (A.2)$$

Третье уравнение при помощи второго может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dx^\circ} \left(h^\circ + \frac{u^{\circ 2}}{2} \right) = \frac{4}{3} \frac{d}{dx^\circ} \left[h^{\circ n} \frac{d}{dx^\circ} \left(h^\circ + \frac{u^{\circ 2}}{2} \right) \right] \quad (A.3)$$

Его единственным частным решением, удовлетворяющим (1.5), будет

$$h^\circ + \frac{u^{\circ 2}}{2} = \frac{1}{2} \quad (A.4)$$

Подставляя в (A.2) выражение h° (A.4) и

$$p^\circ = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho^\circ h^\circ = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{h^\circ}{u^\circ} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1 - u^{\circ 2}}{u^\circ} \quad (A.5)$$

получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{2^{2-n}}{3} (1 - u^{\circ 2})^n u^\circ \frac{du^\circ}{dx^\circ} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} (1 - u^\circ) \left(u^\circ - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) = 0 \quad (A.6)$$

Его интегрирование при $n = 1$ элементарно и дает (1.6). При произвольном $n > 0$ вблизи фронта величина u° может быть представлена в виде

$$u^\circ \approx 1 - ax^\alpha \quad (A.7)$$

Подставляя это выражение в (A.6) и сохраняя главные члены, находим

$$\alpha = \frac{1}{n}, \quad a \left(\frac{3}{4} \frac{n}{\gamma} \right)^{1/n} \quad (A.8)$$

Отсюда следует (1.7).

Приложение В. Полные уравнения установившегося движения вязкого теплопроводного газа (2.2) могут быть записаны в дивергентной форме и затем представлены в виде следующих интегралов по замкнутому контуру:

$$\oint \left(h \frac{\partial u}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial x} - \rho uv \right) dx + \left(p + \rho u^2 - \frac{4}{3} h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} h \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$

$$\oint \left(\frac{4}{3} h \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} h \frac{\partial u}{\partial x} - p - \rho v^2 \right) dx + \left(\rho uv - h \frac{\partial u}{\partial y} - h \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy = 0$$

$$\oint -\rho v dx + \rho u dy = 0 \quad (B.1)$$

$$\oint \left(-\rho v h - \rho v \frac{u^2}{2} - \rho v \frac{v^2}{2} + \frac{h}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial y} + hu \frac{\partial u}{\partial y} + hu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} hv \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3} hv \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx +$$

$$+ \left(\rho u h + \rho u \frac{u^2}{2} + \rho u \frac{v^2}{2} - \frac{h}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{4}{3} hu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} hu \frac{\partial v}{\partial y} - hv \frac{\partial u}{\partial y} - hv \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy = 0$$

Выберем в качестве контура интегрирования контур $ABCDEF$ (фиг. 6) с точкой A в вершине фронта AE и отрезком DE , расположенным на большом расстоянии за телом BC . Тогда учитывая, что полное сопротивление тела X будет интегралом нормальных и касательных напряжений в проекции на направление оси x

$$X = 2 \int_B^C \left(h \frac{\partial u}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(p - \frac{4}{3} h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} h \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \quad (B.2)$$

а суммарный поток тепла через поверхность тела

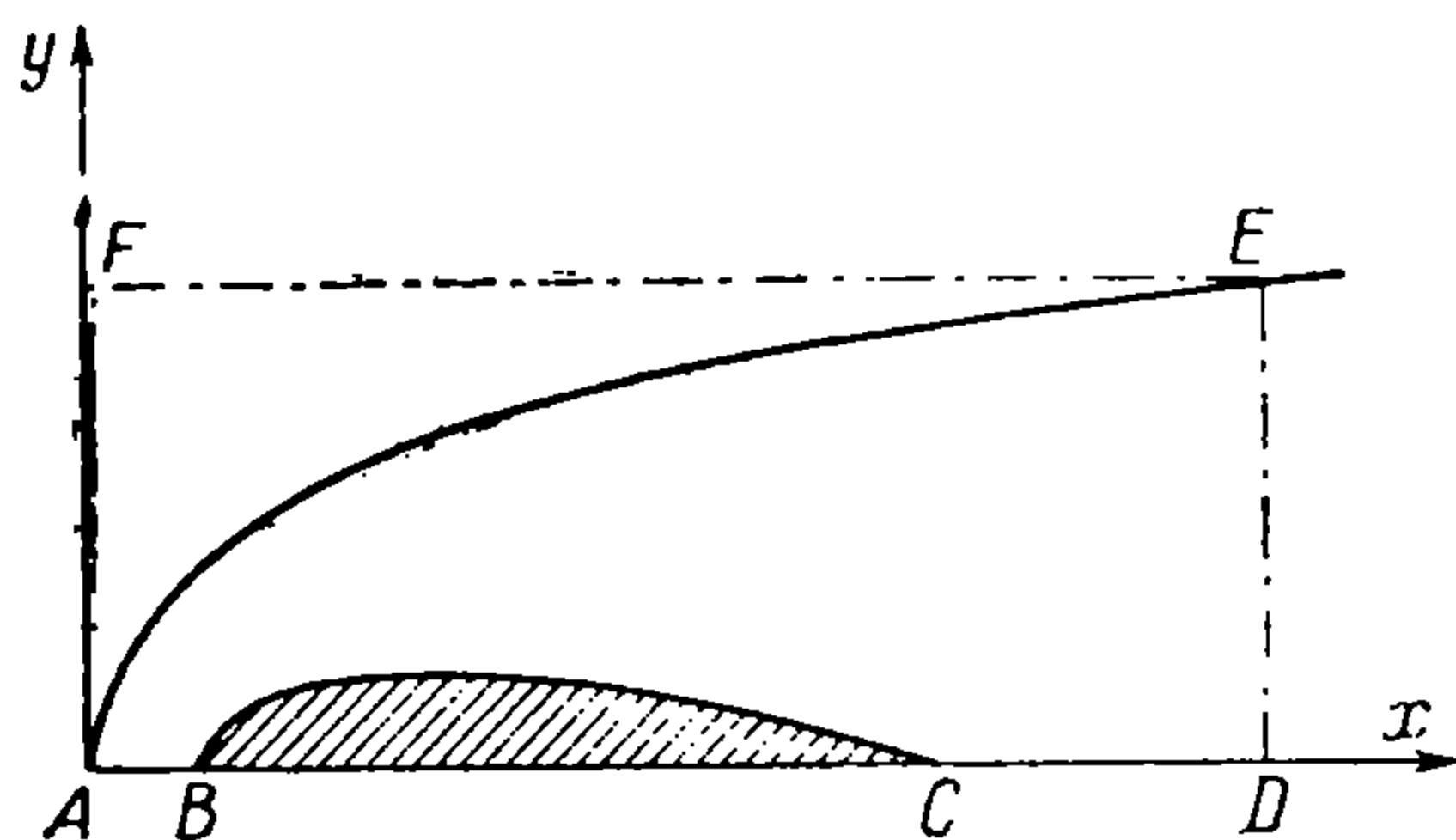
$$Q = 2 \int_B^C \frac{h}{\sigma} \left(\frac{\partial h}{\partial y} dx - \frac{\partial h}{\partial x} dy \right) \quad (B.3)$$

получим (с учетом граничных условий на поверхности тела и в невозмущенной области)

$$X = -2 \int_0^Y \left(p + \rho u^2 - \frac{4}{3} h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} h \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + 2 \int_0^Y dy \quad (B.4)$$

$$Q = 2 \int_0^Y \left(\rho u h + \rho u \frac{u^2}{2} + \rho u \frac{v^2}{2} - \frac{h}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{4}{3} h u \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} h u \frac{\partial v}{\partial y} - h v \frac{\partial u}{\partial y} - h v \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy - \int_0^Y dy \quad (B.5)$$

Уравнение неразрывности перепишем в виде



Фиг. 6

$$\int_0^Y \rho u dy = \int_0^Y dy \quad (B.6)$$

Отбрасывая в этих уравнениях (на основе оценок § 2) члены высших порядков малости, получим

$$X + Q = 2 \int_0^{Y(x)} \rho \left(\frac{h}{\gamma} + \frac{v^2}{2} \right) dy \quad (B.7)$$

С другой стороны, правая часть этого соотношения, как легко видеть, представляет собой полную энергию эквивалентного одномерного неустановившегося движения газа. Отсюда следует справедливость соотношения (3.1). Заметим, что отношение отброшенных в (B.4) — (B.6) членов к оставленным имеет порядок τ^2 .

Поступила 6 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory. Academic Press, 1959, N. Y.
2. Hayes W. D., Probstein R. F. Viscous hypersonic similitude. Jour. Aero/Space Sci., 1959, № 12.
3. Oswatitsch K. Ähnlichkeitsgesetze für Hyperschallströmung. Z. Angew. Math. Phys., 1951, v. 2, p. 249—264.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., ГТТИ, 1954.
5. Кочин И. Е., Кибель П. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. II, М., ГТТИ, 1948.
6. Becker R. Stosswelle und Detonation. Z. für Phys., 1922, v. 8, p. 321—362.
7. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб. статей, посвящ. семидесятилетию А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950.
8. Tsien H. S. Superaerodynamics. J. Aero. Sci., 1946, № 12.
9. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью М., Физматгиз., 1959.