К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

С. С. Гайсарян

(Москва)

Сходимость метода Галеркина для уравнений без запаздывания была установлена М. В. Келдышем [1]. В данной заметке результаты М. В. Келдыша переносятся на случай линейного уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом.

Рассмотрим однородную краевую задачу для уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом

$$L[y(x)] \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + \lambda\left\{\frac{d}{dx}[q_0(x)\,y(x)] + r_0(x)\,y(x)\right\} + \\ + \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{d}{dx}[q_j(x)\,y(x-h_j(x))] + r_j(x)\,y(x-h_j(x))\right\} = f(x) \tag{1}$$

$$y(x) \equiv 0 \quad \text{на начальном множестве } E_0, \qquad y(0) = y(1) = 0 \tag{2}$$

Здесь $p(x)$, $q_0(x)$, $r_0(x)$, а также $q_j(x)$, $r_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ — непрерывно дифференцируемые функции, заданные при $0 \leqslant x \leqslant 1$, функция $p(x)$ нигде не обращается в нуль; запаздывания $h_j(x)$ — неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции $(0 \leqslant h_j(x) \leqslant 1)$; $f(x)$ — непрерывная функция; λ — постоянное комплексное число из некоторой ограниченной области D плоскости λ.

Заметим, что требование $y(x) \equiv 0$ на E_0 не является ограничением общности, так как если $y(x) = \psi(x) \not\equiv 0$ на E_0, то заменой $y_1(x) = y(x) - \psi(x)]$ получается рассматриваемый случай. При этом в правой части (1) будет стоять уже другая функция $f_1(x)$. Приближение решения краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$y_m(x) = a_1^{(m)}\varphi_1(x) + \ldots + a_m^{(m)}\varphi_m(x) \tag{3}$$

$$\varphi_k(x) \equiv 0 \quad \text{на } E_0, \qquad \varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$$

Система функций

$$1,\ \varphi_1'(x),\ \varphi_2'(x),\ \ldots \tag{4}$$

полна и ортонормальна в $L^2_{[0,1]}$ с весом $p(x)$.

Коэффициенты $a_k^{(m)}$ $(k = 1, \ldots, m)$ выражения (3) будем определять из системы уравнений

$$\int_0^1 L[y_m(x)]\,\varphi_i(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,\varphi_i(x)\,dx \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

которую можно записать в виде:

$$a_i^{(m)} + \sum_{k=1}^{m}(\lambda c_{ik} + d_{ik})\,a_k^{(m)} - f_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

где

$$c_{ik} = \int_0^1 [q_0(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_i'(x) - r_0(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_i(x)]dx$$

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\left\{\int_0^1 [q_j(x)\,\varphi_k(x-h_j(x))\ \varphi_i'(x) - r_j(x)\,\varphi_k(x-h_j(x))\,\varphi_i(x)]\,dx\right\} \tag{6}$$

$$f_i = -\int_0^1 f(x)\,\varphi_i(x)\,dx$$

Система (5) получается усечением бесконечной системы уравнений

$$a_i+\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda c_{ik}+d_{ik})-f_i=0 \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{7}$$

Для доказательства сходимости метода Галеркина достаточно установить, что:

1°. Решение $y(x)$ задачи (1), (2) и решение $\{a_k\}$ системы (7) эквивалентны в следующем смысле.

а) Каждому решению $y(x)$ задачи (1), (2) соответствует решение $a_1, a_2, \ldots$ системы (7) со сходящейся суммой квадратов $a_1^2+a_2^2+\ldots<+\infty$; причем

$$a_k=\int_0^1 p(x)\,y'(x)\,\varphi_k'(x)\,dx \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{8}$$

б) Каждому решению $a_1, a_2, \ldots$ системы (7) со сходящейся суммой квадратов соответствует решение $y(x)$ задачи (1), (2), связанное с $a_1, a_2, \ldots$, формулами (8).

2°. Решение системы (7) существует и является пределом при $m\to\infty$ решений систем (5) или

$$\lim\sum_{k=1}^{m}\left|a_k-a_k^{(m)}\right|^2=0 \quad \text{при } m\to\infty$$

Из утверждения (1°) вытекает, что решение задачи (1), (2) существует и единственно, если только существует и единственно решение эквивалентной ей системы (7).

Из утверждения (2°) вытекает, что решение системы (7) существует и единственно при всех λ, не являющихся собственными значениями однородной системы, соответствующей системе (7).

Таким образом, из утверждений (1°) и (2°) вытекает не только сходимость метода Галеркина, но и сам факт существования и единственности решения задачи (1), (2).

Доказательство утверждения 1°. а) Пусть $y(x)$ — решение задачи (1), (2). Тогда, из уравнения (1) и условий (2) получим соответственно

$$L[y(x)]\equiv f(x), \qquad \int_0^1 y'(x)\,dx=y(1)-y(0)=0 \tag{9}$$

Так как

$$\int_0^1 \varphi_k'(x)\,dx=0 \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{10}$$

и система функций (4) полная, то $y'(x)$ можно представить в виде ряда Фурье

$$y'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k'(x) \tag{11}$$

где a_k находятся по формулам (8). Ряд (11) сходится, вообще говоря, в среднем; но если ряд (11) проинтегрировать, то получим равномерно сходящийся ряд:

$$y(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x) \tag{12}$$

Подставив этот ряд в тождество $L[y(x)]\equiv f(x)$, получим (принимая во внимание обозначения (6) и интегрируя по частям) тождества:

$$a_i+\sum_{k=1}^{\infty}(c_{ik}\lambda+d_{ik})\,a_k-f_i\equiv 0 \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{13}$$

Тождества (13) означают, что $a_1, a_2, \ldots$, вычисляемые по формулам (8), являются решением системы (7). Сходимость ряда $a_1^2+a_2^2\ldots$ следует из того, что a_k являются коэффициентами сходящегося ряда Фурье.

б) Если теперь $a_1, a_2, \ldots$ — решение системы (7) и $a_1^2+a_2^2+\ldots<\infty$, то по теореме Рисса — Фишера существует некоторая функция $\eta(x)$, которая разлагается в ряд Фурье по полной системе функций (4) с коэффициентами разложения a_k

$$\eta(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k'(x) \tag{14}$$

Положим

$$y(x)=\int_0^x \eta(\xi)\,d\xi.$$

Тогда $\eta(x)=y'(x)$ и a_k вычисляются по формулам (8). Проинтегрировав (14), получим разложение $y(x)$ в равномерно сходящийся ряд (12).

Подставив в тождества (13) выражения для a_i по формулам (8), а также выражения для c_{ik}, d_{ik} и f_i по формулам (6), получим

$$\int_0^1 p(x)\,y'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left\{\lambda\int_0^1[q_0(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_i'(x)-r_0(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_i(x)]\,dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\int_0^1[q_j(x)\,\varphi_k(x-h_j(x))\,\varphi_i'(x)-r_j(x)\,\varphi_k(x-h_j(x))\,\varphi_i(x)]\,dx\right\}+\int_0^1 f(x)\,\varphi_i(x)\,dx\equiv 0$$

Меняя в последнем тождестве порядок суммирования и интегрирования (ряд сходится равномерно) и учитывая (12), получим

$$\int_0^1 p(x)\,y'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx+\lambda\int_0^t[q_0(x)\,y(x)\,\varphi_i'(x)-r_0(x)\,y(x)\,\varphi_i(x)]\,dx+ \tag{15}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^1[q_j(x)\,y(x-h_j(x))\,\varphi_i'(x)-r_j(x)\,y(x-h_j(x))\,\varphi_i(x)]\,dx+\int_0^1 f(x)\,\varphi_i(x)\,dx\equiv 0$$

$$\int_0^1\varphi_i'(x)\left\{p(x)\,y'(x)+\lambda\left[q_0(x)\,y(x)+\int_0^x r_0(\xi)\,y(\xi)\,d\xi\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\left[q_j(x)\,y(x-h_j(x))+\int_0^x r_j(\xi)\,y(\xi-h_j(\xi))d\xi\right]-\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right\}dx\equiv 0 \qquad (i=1,2,\ldots)$$

Так как система функций (4) полна, то, принимая во внимание (10), из тождества (15) имеем

$$p(x)\,y'(x)+\lambda\left[q_0(x)\,y(x)+\int_0^x r_0(\xi)\,y(\xi)\,d\xi\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[q_j(x)\,y(x-h_j(x))+\int_0^x r_j(\xi)\,y(\xi-h_j(\xi))\,d\xi\right]-\int_0^x f(\xi)\,d\xi=\mathrm{const}$$

Дифференцируя последнее соотношение по x, получаем тождество (9), а это означает, что $y(x)$ есть решение задачи (1), (2).

Доказательство утверждения 2°. Бесконечная система уравнений (7) изучалась Г. Кохом в ряде работ. Из результатов работы Коха [2] следует, что решение системы вида (7) существует и является пределом последовательности решений системы (5) если λ не является собственным значением системы (7) и систем (5) и если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda c_{ik}+d_{ik}|^2 \tag{16}$$

сходится равномерно по λ в области D. При этом, если λ не является собственным значением системы (7), то оно не является значением ни одной из систем (5).

Следовательно, для доказательства утверждения 2° достаточно установить равномерную сходимость ряда (16). Если $\Lambda=\max|\lambda|$, то для доказательства равномерной сходимости ряда (16) достаточно доказать, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\Lambda c_{ik}+d_{ik}|^2 \leqslant |\Lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |d_{ik}|^2 < \infty$$

т. е. что ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_0^1 q_0(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_i'(x)\,dx\right|^2, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_0^1 r_j(x)\,\varphi_k(x-h_j(x))\,\varphi_i(x)dx\right|^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_0^1 r_0(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_i(x)\,dx\right|^2, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 q_j(x)\,\varphi_k(x-h_i(x))\;\;\varphi_i'(x)dx\,\Big|^2$$

$$(j=1,\ldots,n)$$

сходятся. Докажем сходимость первых двух рядов (сходимость двух других рядов доказывается аналогичными рассуждениями). Имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \left|\int_0^1 q_0(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_i'(x)\,dx\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 |q_0(x)\,\varphi_k(x)|^2\frac{dx}{p(x)} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{q_0^2(x)}{p(x)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^t \varphi_k'(\xi)\,d\xi\right]^2\right\}dx \leqslant \int_0^1 \frac{q_0^2(x)}{p(x)}\int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi)}dx = \text{const} < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_0^1 r_j(x)\,\varphi_k(x-h_j(x))\,\varphi_i(x)\,dx\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 |r_j(x)\varphi_i(x)|^2 dx$$

$$\cdot\int_0^1 |\varphi_k(x-h_j(x))|^2 dx \leqslant \int_0^1 r_j^2(x)\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^x \varphi_i(\xi)\,d\xi\right]^2 dx \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^{x-h_j(x)} \varphi_k'(\xi)\,d\xi\right]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 r_j^2(x)\int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi)}dx\int_0^1 dx \int_0^{x-h_j(x)} \frac{d\xi}{p(\xi)} = \text{const} < \infty$$

Здесь при оценках использованы неравенства Бесселя и Шварца. Таким образом, утверждение 2° доказано.

Замечание. Если все запаздывания постоянны $(h_j(x) = h_j = \text{const})$, то на основании результатов работы [3] изложенным методом можно доказать существование решения неоднородной задачи на собственные значения

$$L[y(x)] = 0, \quad y(x) = \psi(x) \quad (-h \leqslant x \leqslant 0,\ h = \max_j h_j), \qquad \psi(0) = y(0) = y(1) = 0$$

и вычислить приближенные значения собственных значений.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность Л. Э. Эльсгольцу за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 16 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. О методе Галеркина решения краевых задач, Известия АН СССР, серия матем., 1942, т. 6, № 6, 309—330.
2. Koch H. Sur la convergence de determinants infinis. Palermo Rend., 1909, 28.
3. Smith. E. C. T. The approximate solution of equations in infinitely many unknowns, Quart. Journ. Matn. Oxf., 1947, 18, 69, 25—52.