О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЯМИ, ОГРАНИЧЕННЫМИ ЗАДАННОЙ ВЕЛИЧИНОЙ

А. Б. Саввин

(Москва)

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{0.1}$$

Функцию $f(x, \dot{x})$ предполагаем непрерывной при $x<B$.

Задача состоит в том, чтобы найти достаточные условия, налагаемые на правую часть уравнения (0.1), при удовлетворении которых все непрерывно дифференцируемые решения $x = x(t)$ этого уравнения с начальными условиями

$$x_0<B, \quad -\infty<\dot{x}_0<\infty \quad \text{при} \quad t = t_0 \tag{0.2}$$

были бы ограничены значением B, т. е.

$$x<B \quad \text{при} \quad t_0\leqslant t<\infty \tag{0.3}$$

Если начальные условия таковы, что скорость $\dot{x}$ велика, а отклонение $B-x$ мало, то для обеспечения ограниченности требуются большие (но конечные) ускорения, направленные против скорости. Поэтому даже при отсутствии в системе регулирования, описываемой уравнением (0.1), достаточно мощных источников энергии, требуемые ускорения могут быть получены за счет введения в систему тормозных устройств. Характерными представителями таких систем являются гидравлические усилители. На участке торможения эти системы могут быть приближенно описаны уравнениями с особенностями [1]. Резкое торможение типа удара неблагоприятно воздействует на систему. Исследуемые ниже свойства уравнений позволяют выбрать закон регулирования, при котором торможение начинается заблаговременно и происходит плавно, а регулируемая величина при этом не превышает заданного значения.

Рассмотрим фазовую плоскость $x\dot{x}$. Изображающая точка при $t>t_0$ может пересечь прямую $x = B$ лишь в верхней полуплоскости.

Если решения уравнения (0.1) с начальными условиями в области D:

$$B - \varepsilon<x_0<B, \qquad 0<\dot{x}<\infty \qquad (\varepsilon>0) \tag{0.4}$$

ограничены величиной B, то и решения уравнения (0.1) при любых начальных условиях (0.2) также ограничены.

Пусть заданы начальные условия $(x_0, \dot{x}_0)\in D$. В силу непрерывности функции $f(x, \dot{x})$ решения уравнения (0.1) продолжаемы [2] до границ области D. Отрезки фазовых траекторий уравнения (0.1), содержащиеся в D, могут быть следующих типов:

1) Уходящие в бесконечность $\dot{x}\to\infty$ при $x\to x^*\leqslant B$.

При этом решение определено лишь на конечном отрезке времени $t_0\leqslant t<T$ и не будет непрерывно дифференцируемым при $t = T$. Такие решения, хотя они и ограничены, здесь не рассматриваются.

2) Пересекающие прямую $x = B$ при $\dot{x}>0$. Решения, соответствующие таким фазовым траекториям, не ограничены величиной B.

3) Пересекающие прямую $x = B$ при $\dot{x} = 0$. Соответствующие решения могут быть как ограничены, так и неограничены (Этот случай рассматривается в п. 4.)

4) Пересекающие ось абсцисс при $x<B$. Если это имеет место для любой начальной точки области D, то решения уравнения (0.1) не превышают величины B. Ниже выводятся условия, при которых все траектории обладают этим свойством.

1. Рассмотрим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}} \equiv g(x, \dot{x}) \tag{1.1}$$

Функция $g(x, \dot{x})$ непрерывна в области D. Если, кроме того, для этого уравнения выполнены условия теоремы существования в некоторой граничной точке ($x_0=B$,

$\dot{x}_0 > 0$), то через эту точку проходит интегральная кривая, которая определена в некотором интервале слева от прямой $x = B$ [3].

Таким образом, необходимым условием ограниченности является невыполнение условий всех возможных теорем существования при $x = B$, $\dot{x} > 0$.

Легко доказывается следующая теорема несуществования решения, дающая достаточные условия ограниченности.

Теорема 1. Пусть в уравнении (1.1) правая часть непрерывна при $x < B$. Если существует функция $m(x)$, такая, что

$$\lim_{x\to B} m(x) = \infty, \qquad \int_{B-\eta}^{B} m(x)\,dx = \infty \quad \text{при } \eta > 0 \tag{1.2}$$

$$|g(x, \dot{x})| \geqslant m(x) \quad \text{при } \dot{x} \geqslant 0 \tag{1.3}$$

то не существует непрерывной интегральной кривой уравнения (1.1), проходящей через точку (B, $\dot{x}_0 \geqslant 0$) и определенной при $x < B$.

При $f(x, \dot{x}) > 0$ фазовые траектории уходят в бесконечность, так что для рассматриваемых случаев получим необходимое условие ограниченности:

$$f(x, \dot{x}) \to -\infty \quad \text{при } x \to B \qquad (\dot{x} > 0)$$

Однако вторая производная $\ddot{x}$ вдоль любой траектории ограничена, так как $x < B$.

Если условие (1.3) теоремы справедливо лишь при $\dot{x} > 0$, то фазовые траектории не пересекают прямую $x = B$ при $\dot{x} > 0$, но могут ее пересекать при $\dot{x} = 0$. Вопрос об ограниченности решений уравнения (0.1) требует в этом случае дополнительного исследования (см. п. 4).

2. В уравнении фазовых траекторий в качестве независимой переменной возьмем $\dot{x}$, в качестве зависимой переменной — x. Тогда получим уравнение

$$\frac{dx}{d\dot{x}} = \frac{1}{g(x, \dot{x})} \tag{2.1}$$

Это уравнение может иметь тривиальное решение: $x = B$. Все остальные интегральные кривые уравнений (1.1) и (2.1) совпадают между собой.

Если решение $x = B$ при $\dot{x} \geqslant 0$ обладает свойством единственности для уравнения (2.1), то все интегральные кривые, проходящие через точки ($x_0 < B$, $\dot{x}_0 \geqslant 0$), не могут пересечь решение $x = B$, т. е. будут ограничены. Таким же свойством будут обладать и фазовые траектории уравнения (1.1). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы решения уравнения (0.1) были ограничены величиной B, достаточно, чтобы уравнение (2.1) имело решение $x = B$, единственное при $\dot{x} \geqslant 0$.

Следует отметить, что многие из известных достаточных условий единственности решений дифференциальных уравнений будут излишне жесткими для рассматриваемой задачи, так как они обеспечивают единственность всех решений дифференциального уравнения в некоторой области, а нам требуется единственность лишь тривиального решения, Так, например, из метода доказательства теоремы единственности с условием Липшица [4] следует, что для единственности тривиального решения уравнения (2.1) достаточно выполнения неравенства

$$\left|\frac{1}{g(x, \dot{x})}\right| < L\,|x - B| \tag{2.2}$$

3. Многие условия единственности основаны на сравнении исследуемого уравнения с некоторым другим, обладающим определенными свойствами. Используем метод сравнения для решения задачи об ограниченности.

Теорема 3. Если существует семейство непрерывно дифференцируемых при $\dot{x} > 0$ кривых

$$\dot{x} = \Phi(x, C) \tag{3.1}$$

полностью заполняющих область D и не пересекающих полупрямую L $\{x = B,\ \dot{x} \geqslant 0\}$ и

$$d\Phi / dx - g(x, \Phi(x, C)) > 0 \tag{3.2}$$

то интегральные кривые уравнения

$$d\dot{x} / dx = g(x, \dot{x}) \tag{3.3}$$

не пересекают полупрямой L.

Действительно, в области D функция $g(x, \dot{x})$ непрерывна. Тогда справедливо заключение теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [5], т. е. решения уравнения (3.3) в области D лежат строго ниже кривых семейства (3.1) с теми же начальными точками. При $\dot{x} = 0$ они могут пересекаться. Так как все кривые семейства (3.1) пересекают ось абсцисс при $x < B$, то решения уравнения (3.1) не могут пересечь полупрямую L.

Как частный случай, семейство $\Phi(x, C)$ может быть частью семейства интегральных кривых некоторого дифференциального уравнения

$$d\dot{x} / dx = F(x, \dot{x}), \qquad F(x, \dot{x}) > g(x, \dot{x}) \tag{3.4}$$

Рассмотрим случай, когда

$$F(x, \dot{x}) = -F_2(\dot{x}) / F_1(x) \tag{3.5}$$

где $F_1(x)$, $F_2(\dot{x})$ — непрерывные функции и

$$F_1(x) > 0 \quad \text{при } x < B, \qquad F_1(x) \geqslant 0 \quad \text{при } x = B$$
$$F_2(\dot{x}) > 0 \quad \text{при } \dot{x} > 0, \qquad F_2(\dot{x}) \geqslant 0 \quad \text{при } \dot{x} = 0$$

Уравнение семейства интегральных кривых будет иметь вид

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{F_2(\dot{x})} + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{F_1(x)} = C \tag{3.6}$$

Интегральные кривые не пересекают полупрямую L, если

$$\int_{B-\varepsilon}^{B} \frac{dx}{F_1(x)} = \infty, \qquad \int_{0}^{\eta} \frac{d\dot{x}}{F_2(\dot{x})} < \infty \qquad (\varepsilon > 0,\ \eta > 0) \tag{3.7}$$

Полученные достаточные условия будут довольно общими. Так, теорема 1 следует из теоремы сравнения, если положить

$$m(x) = \frac{1}{F_1(x)}, \qquad F_2(\dot{x}) = 1$$

4. Допустим теперь, что интегральные кривые пересекают прямую $x = B$.

Если пересечение произошло при $\dot{x} > 0$, то решение $x(t)$ принимает значение $x = B$ в некоторый конечный момент времени T, что противоречит требованию (0.3). Кроме того, интегральную кривую нельзя непрерывным образом продолжить при $t > T$ так, чтобы решение оставалось ограниченным величиной B.

Пусть теперь интегральная кривая уравнения (1.1) $\dot{x} = \varphi(x)$ пересекает прямую $x = B$ при $\dot{x} = 0$.

Предположим, что интегральная кривая входит в точку $(B, 0)$ с определенным направлением касательной, т. е. существует (конечная или бесконечная) производная

$$\varphi'(B) = \lim_{x \to B} \frac{\varphi(x)}{x - B} \tag{4.1}$$

Если производная конечна, т. е. интегральная кривая входит в точку $(B, 0)$ под углом, не равным прямому, то время движения изображающей точки вдоль этой интегральной кривой до точки $(B, 0)$ бесконечно велико

$$T = \int_{x_0}^{B} \frac{dx}{\varphi(x)} \to \infty \tag{4.2}$$

Таким образом, требуемые условия (0.3) будут выполняться. Вторая производная $\ddot{x} = \dot{x}d\varphi / dx$ вдоль интегральных кривых будет также ограничена и стремится к нулю при $x \to B$.

Докажем следующую теорему сравнения.

Теорема 4. Пусть в области D

$$f(x, \dot{x}) < \dot{x}F(x, \dot{x}) \tag{4.3}$$

где функция $F(x, \dot{x})$ непрерывная и отрицательная в D, и решения уравнения

$$\ddot{x} = \dot{x}F(x, \dot{x}) \tag{4.4}$$

при любых начальных условиях $(x_0, \dot{x}_0) \in D$ ограничены

$$x_F(t) < B \quad \text{при } t_0 < t < \infty \tag{4.5}$$

Тогда и решения уравнения (0.1) обладают теми же свойствами.

Действительно, интегральные кривые сравнения в силу отрицательности $F(x, \dot{x})$ монотонны. Так как решения уравнения (4.4) ограничены, то интегральные кривые этого уравнения либо пересекают ось абсцисс при $x < B$, либо входят в точку $(B, 0)$ под углом, меньшим прямого. Согласно теореме Чаплыгина, интегральные кривые уравнения (0.1) в области D лежат строго ниже соответствующих интегральных кривых сравнения. Поэтому изображающая точка, двигаясь по интегральным кривым уравнения (0.1), не может достигнуть прямой $x = B$ за конечное время. Следовательно, все решения уравнения (0.1) ограничены.

Особенно удобно пользоваться теоремой сравнения, когда правая часть уравнения фазовых траекторий сравнения может быть представлена в виде отношения двух, функций (3.5). Кроме условий (3.7), выведенных в предыдущем параграфе, рассмотрим другие условия, при которых решения уравнения (0.1) также будут ограничены

Если

$$\int_{B-\varepsilon}^{B} \frac{dx}{F_1(x)} = \infty, \qquad \int_{0}^{\eta} \frac{d\dot{x}}{F_2(\dot{x})} = \infty \qquad (\varepsilon > 0,\ \eta > 0) \tag{4.6}$$

то интегральные кривые уравнения (4.4) проходят через точку $(B, 0)$, не пересекая прямую $x = B$ при $\dot{x} > 0$. Чтобы выполнялось неравенство (0.3), интегральные кривые должны входить в точку $(B, 0)$ под углом, не равным прямому.

А. Ф. Филипповым [6] установлены достаточные условия, когда уравнение вида $dy/dx = g(y)/h(x)$ не имеет решений, для которых $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(x) \not\equiv 0$. Исходя из этого, легко установить, когда уравнения (3.4), (3.5) при условиях (4.6) не имеют решений, для которых $\dot{x}(0) = 0$ и $d\dot{x} / dx = \infty$ при $x = 0$.

Кроме уравнений с разделяющимися переменными, в качестве уравнений сравнения могут быть приняты и другие типы уравнений с ограниченными решениями.

Поступила 23 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвин-Седой М. З. Гидравлический привод в системах автоматики. М., Машгиз, 1956.
2. Еругин Н.П. О продолжении решений дифференциальных уравнений. ПММ, 1951, т. XV, вып. 1, стр. 55—58.
3. Петропавловская Р. В. О продолжимости решений системы дифференциальных уравнений. Вестн. ЛГУ, 1956, № 7, стр. 40—59.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1953.
5. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М. — Л., Гостехиздат, 1950.
6. Филиппов А. Ф. Достаточные признаки единственности и неединственности решения дифференциального уравнения. ДАН СССР, 1948, т. 60, стр. 549—552.