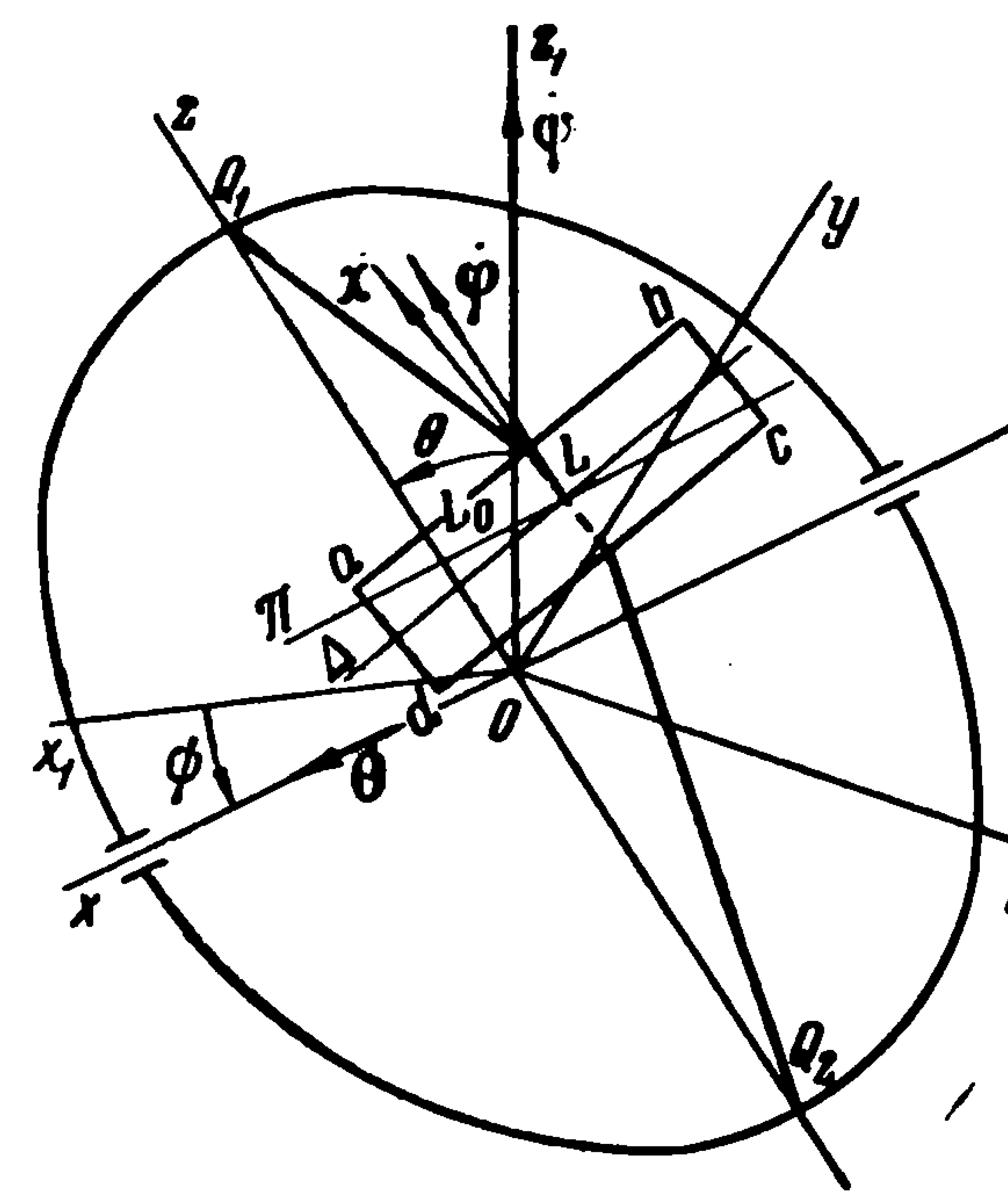
ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА К ИЗУЧЕНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСКОПА С УЧЕТОМ УПРУГИХ СВОЙСТВ ОСИ РОТОРА

В. В. Крементуло

(Москва)

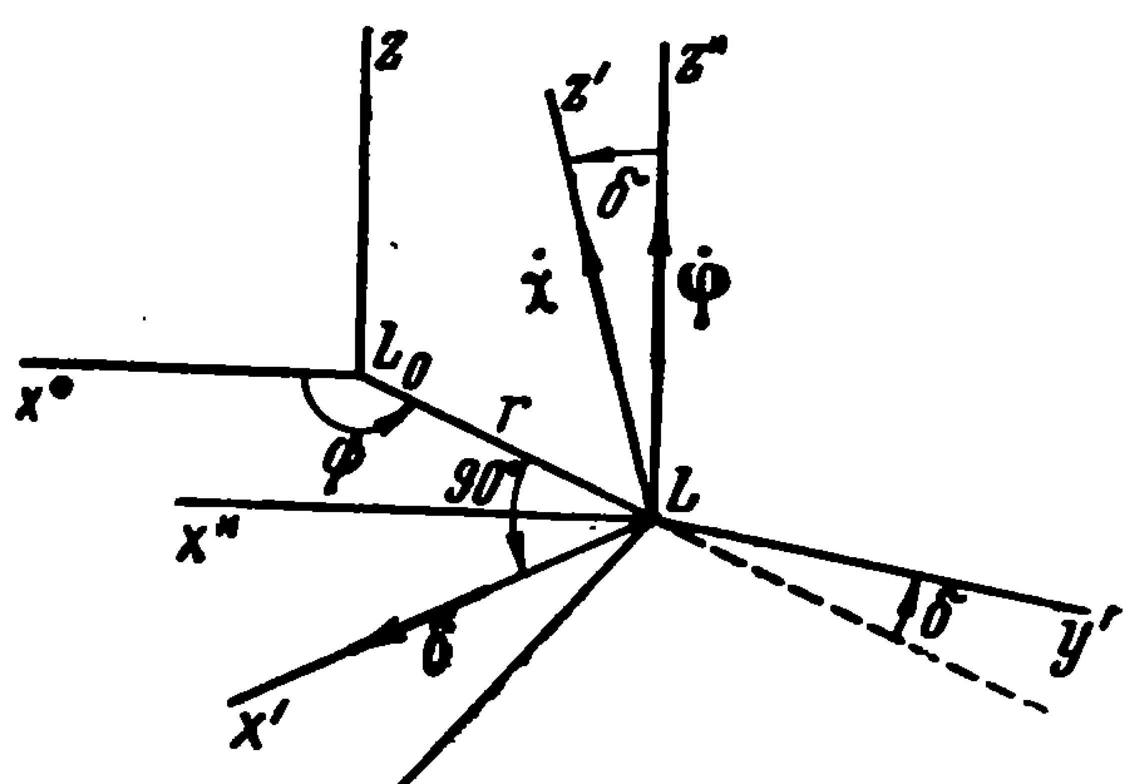
Будем рассматривать ротор гироскопа как тяжелый однородный маховик, посаженный симметрично на гибкую невесомую ось, концы которой закреплены в двух диаметрально противоположных точках внутреннего кольца. Полученная механическая система представляет, вообще говоря, систему с бесконечным числом степеней свободы. Для такого класса задач строгие методы Ляпунова не разработаны, изучение устойчивости проводится приближенными приемами. Часто систему с бесконечным числом степеней свободы моделируют подходящей системой с конечным числом степеней свободы, которая обладает основными механическими свойствами исходной системы и в то же время легче поддается изучению. Например, Н. Г. Четаев [1] при исследовании устойчивости стационарных движений маховика, укрепленного на неподвижном гибком вертикальном валу, моделировал исходную систему механической системой с тремя степенями свободы: маховик совершает плоское движение; вводятся две координаты, определяющие положение его центра тяжести в неподвижной горизонтальной плоскости, и угол поворота маховика.



Фиг. 2

Схема модели, принятой для рассматриваемой задачи, дана на фиг. 1.

Как обычно, ψ — угол поворота внешнего кольца вокруг своей оси z_1, которую направим по вертикали, θ — угол поворота внутреннего кольца (кожуха) вокруг оси x; $abcd$ — ротор, укрепленный на упругой оси Q_1LQ_2, которая проходит через центр тяжести ротора L (вид сбоку); zQ_1OQ_2 — прямая, лежащая в плоскости внутреннего кольца и соединяющая его геометрический центр (неподвижную точку O) с Q_1, Q_2 — точками крепления оси ротора в кольце; при отсутствии поперечных прогибов ось ротора совпадает с указанной прямой, в этом положении точка L совпадает с точкой L_0, отстоящей на расстоянии ζ от неподвижной точки; π — плоскость, проходящая через L_0 перпендикулярно OQ_1; по предположению, центр тяжести ротора L остается при движении системы в этой плоскости, его положение определим полярными координатами $r = L_0L$ и φ — углом между полярным радиусом L_0L и осью x°, являющейся пересечением плоскости π с плоскостью внутреннего кольца (оси x° и x параллельны); x^*, y^*, z^* — система координат с началом в точке L, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат x, y, z, жестко связанной с внутренним кольцом; оси x', y' лежат в плоскости Δ центрального сечения



Фиг. 2

ротора (фиг. 2), ось x' является прямой пересечения плоскости π с плоскостью центрального сечения и, по предположению, перпендикулярна к L_0L; положение ротора относительно осей x^*, y^*, z^* определяется углами δ (угол наклона к плоско-

	x^*	y^*	z^*
x'	$\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	0
y'	$\cos\varphi\cos\delta$	$\sin\varphi\cos\delta$	$\sin\delta$
z'	$-\cos\varphi\sin\delta$	$-\sin\varphi\sin\delta$	$\cos\delta$

сти π) и χ (угол собственного вращения ротора); таблица направляющих косинусов углов между осями x^*, y^*, z^* и x', y', z' приводится здесь слева.

Упругие свойства оси ротора характеризуются восстанавливающей силой $m\mu_1 r$ и упругим моментом $m\mu_2\delta$, где m — масса ротора; μ_1, μ_2 — положительные коэффициенты жесткости оси.

Координаты точки L в системе $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = \zeta$ позволяют записать ее координаты в неподвижной системе x_1, y_1, z_1 в виде

$$x_1 = r\cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\cos\theta\sin\psi + \zeta\sin\theta\sin\psi$$
$$y_1 = r\cos\varphi\sin\psi + r\sin\varphi\cos\theta\cos\psi - \zeta\sin\theta\cos\psi$$
$$z_1 = r\sin\theta\sin\varphi + \zeta\cos\theta$$

Силовая функция рассматриваемой механической системы выразится так:

$$2U = -m\mu_1 r^2 - m\mu_2\delta^2 - 2mg\,(r\sin\theta\sin\varphi + \zeta\cos\theta)$$

Пусть I — момент инерции внешнего кольца относительно оси z_1. Тогда кинетические энергии внешнего кольца, кожуха и гироскопа соответственно равны

$$2T^{(\text{вн})} = I\dot\psi^2$$
$$2T^{(\text{к})} = A_1\dot\theta^2 + B_1\dot\psi^2\sin^2\theta + C_1\dot\psi^2\cos^2\theta$$
$$2T^{(\text{г})} = m\,(\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot z_1^2) + A\,(\Omega_{x'}^2 + \Omega_{y'}^2) + C\Omega_{z'}^2$$

Здесь A_1, B_1, C_1 — моменты инерции кожуха относительно осей x, y, z соответственно, A, A, C — моменты инерции ротора относительно осей x', y', z' соответственно; $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$ — проекции на оси x', y', z' абсолютной мгновенной угловой скорости ротора

$$\Omega = \dot\psi + \dot\theta + \dot\chi + \dot\varphi + \dot\delta$$

которые, как нетрудно проверить, таковы,

$$\Omega_{x'} = -\dot\psi\sin\theta\cos\varphi + \dot\theta\sin\varphi + \dot\delta$$
$$\Omega_{y'} = \dot\psi\,(\sin\theta\sin\varphi\cos\delta + \cos\theta\sin\delta) + \dot\theta\cos\varphi\cos\delta + \dot\varphi\sin\delta$$
$$\Omega_{z'} = -\dot\psi\,(\sin\theta\sin\varphi\sin\delta - \cos\theta\cos\delta) - \dot\theta\cos\varphi\sin\delta + \dot\varphi\cos\delta + \dot\chi$$

Выражение кинетической энергии всей системы представим в виде:

$$\begin{aligned}2T = m\,[&\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + r^2\dot\psi^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\theta) - r\zeta\dot\psi^2\sin 2\theta\sin\varphi +\\ &+ r^2\dot\theta^2\sin^2\varphi + \zeta^2(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta) - 2\zeta\dot r\dot\theta\sin\varphi + 2\zeta\dot r\dot\psi\sin\theta\cos\varphi +\\ &+ 2r\,(r\cos\theta - \zeta\sin\theta\sin\varphi)\,\dot\varphi\dot\psi - 2r\zeta\dot\varphi\dot\theta\cos\varphi - 2r\cos\varphi\,(r\sin\theta\sin\varphi + \zeta\cos\theta)\,\dot\theta\dot\psi +\\ &+ A_1\dot\theta^2 + [B_1\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + I]\,\dot\psi^2 + A\,(\Omega_{x'}^2 + \Omega_{y'}^2) + C\Omega_{z'}^2]\end{aligned}$$

Так как переменные ψ, θ, χ, r, φ, δ являются [независимыми голономными, можно записать уравнения движения системы в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, 6) \tag{1}$$

$$(q_1 = \psi,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \chi,\ q_4 = r,\ q_5 = \varphi,\quad q_6 = \delta)$$

Уравнения (1) допускают три первых интеграла: закон сохранения энергии

$$T - U = \text{const} \tag{2}$$

и два циклических интеграла по координатам ψ, χ

$$\begin{aligned}\partial T/\partial\dot\psi = m\,\{&r^2\dot\psi\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\theta) - r\zeta\dot\psi\sin 2\theta\sin\varphi + \zeta^2\dot\psi\sin^2\theta +\\ &+ \zeta\dot r\sin\theta\cos\varphi + r\,(r\cos\theta - \zeta\sin\theta\sin\varphi)\,\dot\varphi - r\cos\varphi\,(r\sin\theta\sin\varphi + \zeta\cos\theta)\,\dot\theta\,] +\\ &+ (B_1\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + I)\,\dot\psi - A\Omega_{x'}\sin\theta\cos\varphi + A\Omega_{y'}(\sin\theta\sin\varphi\cos\delta +\\ &\cos\theta\sin\delta) + C\Omega_{z'}(\cos\theta\cos\delta - \sin\theta\sin\varphi\sin\delta) = \text{const}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\Omega_{z'} = \text{const} \tag{4}$$

Уравнения (1) имеют стационарные решения

$$\theta = \theta_0, \quad r = r_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \delta = \delta_0, \quad \dot\theta = \dot r = \dot\varphi = \dot\delta = 0, \quad \dot\psi = \Omega_0, \quad \Omega_{z'} = \omega \quad (5)$$

если постоянные θ_0, r_0, φ_0, δ_0, Ω_0, ω удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(T+U) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r}(T+U) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}(T+U) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\delta}(T+U) = 0$$

Эти условия в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{gathered}
-m\Omega_0^2(r_0^2 \sin 2\theta_0 \sin^2\varphi_0 + 2r_0\zeta\cos 2\theta_0 \sin\varphi_0 - \zeta^2 \sin 2\theta_0) + \\
+(B_1 - C_1)\Omega_0^2 \sin 2\theta_0 + 2A\Omega_0^2(\sin\theta_0\cos\theta_0\cos^2\varphi_0 + h_1h_3) - \\
-2C\omega\Omega_0 h_4 - 2mg(r_0\cos\theta_0\sin\varphi_0 - \zeta\sin\theta_0) = 0 \qquad (6)
\end{gathered}$$

$$2r_0\Omega_0^2(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0\cos^2\theta_0) - \zeta\Omega_0^2\sin 2\theta_0\sin\varphi_0 - 2\mu_1 r_0 - 2g\sin\theta_0\sin\varphi_0 = 0$$

$$\begin{gathered}
mr_0\Omega_0^2(r_0\sin^2\theta_0\sin 2\varphi_0 + \zeta\sin 2\theta_0\cos\varphi_0) + A\Omega_0^2(\sin^2\theta_0\sin 2\varphi_0 - \\
-2h_3\sin\theta_0\cos\varphi_0\cos\delta_0) + 2C\omega\Omega_0\sin\theta_0\cos\varphi_0\sin\delta_0 + 2mgr_0\sin\theta_0\cos\varphi_0 = 0
\end{gathered}$$

$$(Ah_2\Omega_0 + C\omega)h_3\Omega_0 + m\mu_2\delta_0 = 0$$

Здесь

$$h_1 = \cos\theta_0\sin\varphi_0\cos\delta_0 - \sin\theta_0\sin\delta_0, \qquad h_3 = \sin\theta_0\sin\varphi_0\cos\delta_0 + \cos\theta_0\sin\delta_0$$
$$h_2 = \sin\theta_0\sin\varphi_0\sin\delta_0 - \cos\theta_0\cos\delta_0, \qquad h_4 = \cos\theta_0\sin\varphi_0\sin\delta_0 + \sin\theta_0\cos\delta_0$$

Будем изучать устойчивость рассматриваемого движения по отношению к θ, r, φ, δ, $\dot\theta$, $\dot\psi$, $\dot r$, $\dot\varphi$, $\dot\delta$, $\Omega_{z'}$. Возмущенное движение, соответствующее (5), обозначим через

$$\theta = \theta_0 + \eta_1, \quad r = r_0 + \eta_3, \quad \varphi = \varphi_0 + \eta_4, \quad \delta = \delta_0 + \eta_5$$
$$\dot\theta = \xi_1, \quad \dot\psi = \Omega_0 + \xi_2, \quad \dot r = \xi_3, \quad \dot\varphi = \xi_4, \quad \dot\delta = \xi_5, \quad \Omega_{z'} = \omega + \xi_6$$

Интегралы уравнений возмущенного движения, отвечающие интегралам (2), (3), (4) и выписанные по степеням η_i $(i = 1, 3, 4, 5)$, ξ_j $(j = 1, \ldots, 6)$ с точностью до членов второго порядка малости включительно, обозначим через V_1, V_2, V_3 соответственно; при этом $V_3 = \xi_6$. Легко убедиться, что линейная связка

$$W = V_1 - 2\Omega_0 V_2 - 2C(\omega + \Omega_0 h_2)V_3$$

в силу (6) не содержит линейных членов

$$W = F_1(\xi_1, \ldots, \xi_6) + F_2(\eta_1, \eta_3, \eta_4, \eta_5) + F_3(\eta_1, \eta_4, \eta_5, \xi_6) + \ldots$$

Квадратичная форма $F_1(\xi_1, \ldots, \xi_6)$ является определенно положительной по всем своим переменным, так как ее определитель совпадает с определителем удвоенной кинетической энергии системы при значениях координат (5).

Функции F_2 и F_3 также представляют собой квадратичные формы

$$\begin{gathered}
F_2(\eta_1, \eta_3, \eta_4, \eta_5) = [mr_0\Omega_0^2(r_0\cos 2\theta_0\sin^2\varphi_0 + 2\zeta\sin 2\theta_0\sin\varphi_0) - \\
-(m\zeta^2 + A\cos^2\varphi_0 + B_1 - C_1)\Omega_0^2\cos 2\theta_0 - A\Omega_0^2(h_1^2 - h_3^2) - C\Omega_0\omega h_2 - \\
-mg(r_0\sin\theta_0\sin\varphi_0 + \zeta\cos\theta_0)]\eta_1^2 + 2m\Omega_0^2(r_0\sin 2\theta_0\sin^2\varphi_0 + \\
+\zeta\cos 2\theta_0\sin\varphi_0)\eta_1\eta_3 + [mr_0\Omega_0^2(r_0\sin 2\theta_0\sin 2\varphi_0 + 2\zeta\cos 2\theta_0\cos\varphi_0) + \\
+A\Omega_0^2(\sin 2\theta_0\sin 2\varphi_0 - 2h_1\sin\theta_0\cos\varphi_0\cos\delta_0 - 2h_3\cos\theta_0\cos\varphi_0\cos\delta_0) + \\
+2C\omega\Omega_0\cos\theta_0\cos\varphi_0\sin\delta_0 + 2mgr_0\cos\theta_0\cos\varphi_0]\eta_1\eta_4 + \\
+2\Omega_0[A\Omega_0(h_1h_2 + h_3h_4) + C\omega h_1]\eta_1\eta_5 + m[\mu_1 - \Omega_0^2(\cos^2\varphi_0 + \\
+\cos^2\theta_0\sin^2\varphi_0)]\eta_3^2 + m\Omega_0^2(2r_0\sin^2\theta_0\sin 2\varphi_0 + \zeta\sin 2\theta_0\cos\varphi_0)\eta_3\eta_4 + \\
+[mr_0\Omega_0^2(r_0\sin^2\theta_0\cos 2\varphi_0 - {}^1/{}_2\zeta\sin 2\theta_0\sin\varphi_0) + \\
+A\Omega_0^2(\sin^2\theta_0\cos 2\varphi_0 + h_3\sin\theta_0\sin\varphi_0\cos\delta_0 - \sin^2\theta_0\cos^2\varphi_0\cos^2\delta_0) - \\
-C\omega\Omega_0\sin\theta_0\sin\varphi_0\sin\delta_0]\eta_4^2 + 2[A\Omega_0^2\sin\theta_0\cos\varphi_0(h_2\cos\delta_0 + \\
+h_3\sin\delta_0) - C\omega\Omega_0\sin\theta_0\cos\varphi_0\cos\delta_0]\eta_4\eta_5 + [m\mu_2 + A\Omega_0^2(h_3^2 - h_2^2) - C\omega\Omega_0 h_2]\eta_5^2
\end{gathered}$$

$$F_3(\eta_1, \eta_4, \eta_5, \xi_6) = 2C\Omega_0(h_4\eta_1 + \sin\theta_0\cos\varphi_0\sin\delta_0\eta_4 + h_3\eta_5)\xi_6$$

Если функция F_2 является определенно положительной по своим переменным η_1, η_3, η_4, η_5, то, как нетрудно видеть, форма

$$V = W + R\xi_6$$

соответствующим выбором постоянной R может быть сделана определенно положительной по всем возмущенным координатам и скоростям и, следовательно, может быть взята в качестве функции Ляпунова, решающей задачу устойчивости решения (5) [2]. Таким образом, достаточные условия устойчивости изучаемого движения по отношению к θ, r, φ, δ, $\dot\theta$, $\dot\psi$, $\dot r$, $\dot\varphi$, $\dot\delta$, Ω_z, сводятся к четырем условиям положительной определенности квадратичной формы $F_2(\eta_1, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$ (неравенства Сильвестра). В общем случае эти условия ввиду их громоздкости трудно обозримы. Приведем некоторые частные случаи. 1°. Вертикальное вращение ротора $\theta_0 = 0$, $_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\delta_0 = 0$ оказывается устойчивым по отношению к θ, r, δ и всем скоростям при выполнении неравенств

$$\begin{gathered} -(m\zeta^2 + A + B_1 - C_1)\,\Omega_0^2 + C\omega\Omega_0 - mg\zeta > 0 \\ \mu_1 > \Omega_0^2, \qquad m\mu_2 + C\omega\Omega_0 - A\Omega_0^2 > 0 \end{gathered} \tag{7}$$

2°. Для регулярной прецессии $\theta_0 \neq 0$, $r_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\delta_0 = 0$ имеет место устойчивость по отношению к тем же переменным при соблюдении неравенств

$$-(m\zeta^2 + A + B_1 - C_1)\,\Omega_0^2 \cos 2\theta_0 + (C\omega\Omega_0 - mg\zeta)\cos\theta_0 > 0 \tag{8}$$

$$\mu_1 > \Omega_0^2, \qquad m\mu_2 + C\omega\Omega_0 \cos\theta_0 - A\Omega_0^2\cos^2\theta_0 > 0 \tag{9}$$

Условие (8) совпадает с достаточным условием устойчивости регулярной прецессии гироскопа в случае абсолютно жесткой оси ротора [3]. Учет упругих свойств оси ротора приводит к появлению двух дополнительных неравенств (9).

Достаточные условия устойчивости решения (5) можно получить также с помощью теоремы Рауса. Измененная потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{[P_\psi + P_\chi(\sin\theta\sin\varphi\sin\delta - \cos\theta\cos\delta)]^2}{n} + \frac{P_\chi^2}{C} + \\ + m\mu_1 r^2 + m\mu_2\delta^2 + 2mg(r\sin\theta\sin\varphi + \zeta\cos\theta)$$

где

$$P_\psi = \partial T/\partial\dot\psi, \qquad P_\chi = \partial T/\partial\dot\chi$$

$$n = mr^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\theta) - mr\zeta\sin 2\theta\sin\varphi + m\zeta^2\sin^2\theta + \\ + B_1\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + I + A\sin^2\theta\cos^2\varphi + A(\sin\theta\sin\varphi\cos\delta + \cos\theta\sin\delta)^2$$

Изучаемое стационарное решение (5) определяется уравнениями

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{\partial\Pi}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{\partial\Pi}{\partial\delta} = 0 \tag{10}$$

Решение (5) будет устойчивым по отношению к θ, r, φ, δ, $\dot\theta$, $\dot r$, $\dot\varphi$, $\dot\delta$, если функция Π имеет минимум в положении (10) при условии, что постоянные циклических интегралов P_ψ, P_χ не варьируются. Условия минимума Π выражаются четырьмя неравенствами, которые получаются из того, что главные диагональные миноры определителя [4]

$$\left\| \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right\| \qquad \begin{gathered}(i, j = 1, \ldots, 4) \\ (q_1 = \theta, \ q_2 = r, \ q_3 = \varphi, \ q_4 = \delta)\end{gathered}$$

должны быть строго положительны в положении (10).

Поступила 23 II 1961 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат. 1946.
2. Пожарицкий Г. К. О построении функций Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1938, т. XXII, № 2.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. I, ПММ, 1958, т. XXII, № 3.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального, исчисления т. I, Гостехтеоретиздат, 1948.