

## О КРУГОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ МАЯТНИКА ФРУДА

В. А. Табуева  
(Свердловск)

Рассмотрим некоторую механическую систему, колебания которой описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + f(x) = N \operatorname{sign}(\Omega - \dot{x}) \quad (1)$$

где  $\alpha$ ,  $N$  и  $\Omega$  — положительные постоянные; предполагается, что  $f(x)$  — нечетная периодическая функция с непрерывной производной, имеющей на  $[-\pi, \pi]$  только два нуля

$$xf(x) > 0 \quad \text{вблизи } x = 0, \quad f(\pi) = f(0) = 0 \quad (2)$$

Заметим, что это уравнение, в частности, может описывать колебания маятника Фруда [1], если  $f(x) = \sin x$ .

Представляет интерес изучение колебаний, соответствующих периодическому по  $x$  решению  $\dot{x} = \dot{x}(x)$  уравнения (1), т. е., в частности, изучение круговых движений маятника Фруда при вполне определенной функции  $F(\Omega - \dot{x}) = N \operatorname{sign}(\Omega - \dot{x})$ , характеризующей трение вала о муфту маятника, где  $\Omega$  — скорость вращения вала. Ниже рассматриваются лишь круговые движения уравнения (1), поэтому предполагается, что

$$N > \max f(x) \quad (3)$$

Уравнение (1) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\alpha y - [f(x) + N \operatorname{sign}(\dot{x} - \Omega)] \quad (4)$$

которую будем представлять в виде двух систем, полагая

$$N \operatorname{sign}(y - \Omega) = +N \quad \text{для } y \geq \Omega, \quad N \operatorname{sign}(y - \Omega) = -N \quad \text{для } y < \Omega \quad (5)$$

т. е. изучение траекторий системы (4) сведем к изучению траекторий систем

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\alpha y - [f(x) + N] \quad (6)$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\alpha y - [f(x) - N] \quad (7)$$

Фазовое цилиндрическое пространство систем (6) и (7), а значит, и изучаемой системы (4), будем считать развернутым на плоскость  $xy$ . Тогда на полосах шириной  $2\pi$ , идущих вдоль оси  $y$ , расположение траекторий этих систем периодически повторится. Поэтому достаточно изучить расположение траекторий системы (4), например, в полосе  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,  $-\infty < y < +\infty$ , а затем распространить полученные результаты на всю плоскость.

Системы (6) и (7) при предположениях (2) и (3) не имеют ни особых точек, ни предельных циклов первого рода, соответствующих периодическим по  $t$  траекториям этих систем. Все траектории каждой из систем (6) и (7) при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически приближаются к соответствующему единственному устойчивому предельному циклу [1] второго рода, охватывающему цилиндр фазовой поверхности. Причем для системы (6) такой цикл расположен в полуплоскости  $y < 0$ , а для системы (7) — в полуплоскости  $y > 0$ . Поэтому и исследуемая система (4) не имеет ни особых точек, ни предельных циклов первого рода; все ее траектории при  $t \rightarrow +\infty$  притягиваются устойчивым предельным циклом  $Y$ . Заметим, что параметр  $\Omega$  не входит явно в правую часть уравнений систем (6) и (7), влияя в то же время существенным образом на расположение траекторий системы (4). Поэтому приходится рассматривать разновидности качественной картины расположения траекторий системы (4), меняя последовательно значения параметра  $\Omega$ .

Для определенности будем рассматривать значения  $\Omega > 0$ ; при этом, очевидно, на расположение траекторий системы (4) существенно влияет наличие в полуплоскости  $y > 0$  предельного цикла второго рода  $y_0$  системы (7), в частности соотношение значений  $\Omega$  и экстремумов периодического по  $x$  решения  $y_0(x)$  системы (7), соответствующего циклу. Поэтому остановимся подробнее на качественной характеристике расположения траекторий системы (7).

Введем в рассмотрение кривую монотонности

$$y = \frac{N - f(x)}{\alpha} \equiv \Phi(x) \quad (8)$$

Эта кривая вместе с осью  $x$  разбивает плоскость  $xy$  на области знакопостоянства  $dy/dx$  системы (7). Периодическое решение  $y_0(x)$  системы (7) имеет на кривой монотонности свои экстремумы.

В качестве пределов изменения значений  $\Omega$  возьмем значения экстремумов кривых  $y = y_0(x)$  и  $y = \Phi(x)$ . Пусть значения  $\Omega$  удовлетворяют соотношению

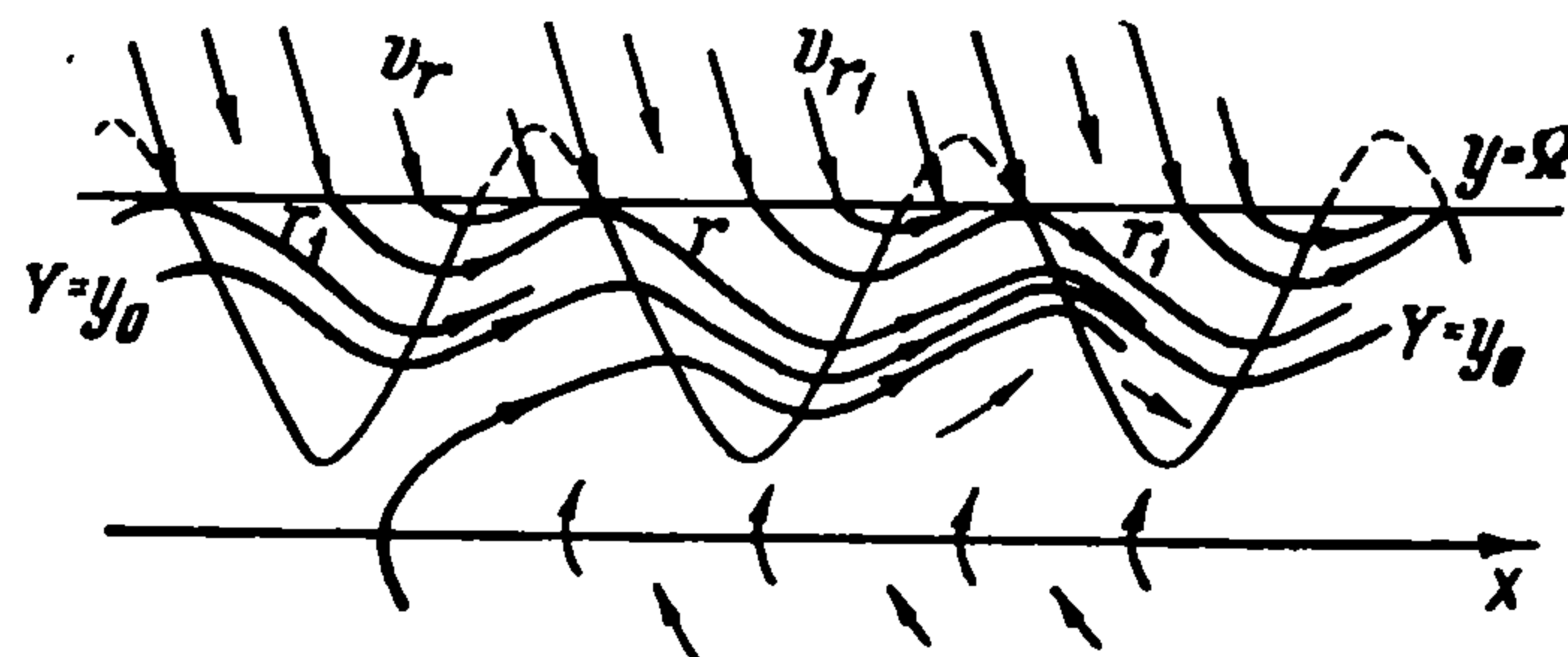
$$\Omega \geq \max \Phi(x) \quad (9)$$

Тогда, легко видеть, прямая переключения  $y = \Omega$  будет прямой бесконтактности [1] для системы (4), т. е. исследуемая система (4) имеет своим предельным циклом  $Y$  цикл  $y_0$  системы (7). Все траектории системы (4) при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически приближаются к нему, причем для полуплоскости  $y < \Omega$  они совпадают с траекториями системы (7), на прямой  $y = \Omega$  имеют «излом» и для  $y > \Omega$  продолжаются траекториями системы (6). В дальнейшем подобный цикл второго рода будем называть «обычным», имея в виду асимптотическое приближение траекторий к нему при  $t \rightarrow +\infty$ . Пусть далее имеем

$$\max y_0(x) < \Omega < \max \Phi(x) \quad (10)$$

Прямая  $y = \Omega$  пересекает кривую монотонности (8). Отрезки прямой  $y = \Omega$  для  $y < \Phi(x)$  таковы, что точка  $[x(t), y(t)]$  системы (4), попадая при некотором значении  $t$  на какой-либо из этих отрезков, под действием системы не может с него сойти и должна с ростом времени  $t$  двигаться по данному отрезку. Назовем подобные отрезки отрезками «захвата» системы (4). Очевидно, для рассматриваемых значений  $\Omega$  на полосе  $-\pi \leq x \leq \pi$  имеется один отрезок захвата системы (4).

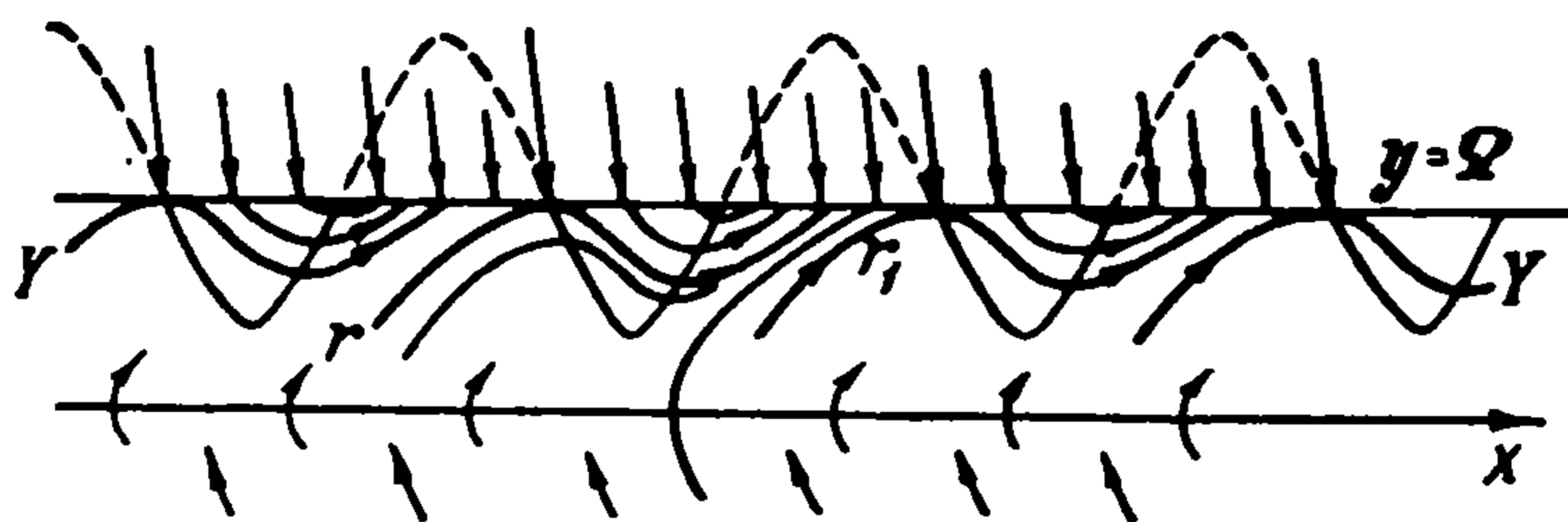
Обозначим через  $r$  траекторию  $x = x(t), y = y(t)$  системы (4), выходящую из правого конца отрезка захвата (фиг. 1) полосы  $-\pi \leq x \leq \pi$ , т. е. такую траекторию, для которой при некотором значении  $t = T < \infty$  точка  $[x(T), y(T)]$  траектории совпадает с самой правой точкой отрезка захвата полосы  $-\pi \leq x \leq \pi$ ; эту траекторию будем рассматривать для  $t > T$ . Кривую, совпадающую с траекторией  $r$ , будем обозначать через  $y = r(x)$ . Через  $r_1$  обозначим траекторию (фиг. 1) системы (4), получаемую периодическим повторением траектории  $r$  для полосы  $\pi \leq x \leq 3\pi$ , т. е. траекторию, выходящую из правого конца отрезка захвата полосы  $\pi \leq x \leq 3\pi$ .



Фиг. 1

Каждый отрезок захвата определяет существование целого семейства траекторий системы (4), каждая из которых при некотором конечном значении  $t$  сливается с соответствующей отрезку траекторией

$r, r_1$  и т. д. Такие семейства траекторий будем обозначать соответственно через  $v_r, v_{r_1}$  и т. д.



Фиг. 2

По предположению (10) имеем, в частности,  $\Omega > \max y_0(x)$ , т. е. предельный цикл  $y_0$  системы (7) является предельным циклом исследуемой системы (4); траектория  $r$ , являясь одновременно и траекторией системы (7),

расположенной выше ее предельного цикла, обладает свойством  $r(x) > r(x + 2\pi)$  для всех  $x$  области существования кривой  $y = r(x)$ , т. е. имеем  $r \equiv v_{r_1}$ . Следовательно, траектория  $r$  системы (4) при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически приближается к циклу системы  $Y \equiv y_0$ .

Итак, для рассматриваемых значений  $\Omega$  из соотношения (10), так же как и в предыдущем случае (9), система (4) имеет обычный цикл  $Y$ , совпадающий с циклом  $y_0$  системы (7). В отличие от предыдущего случая, наличие отрезков захвата системы (4) привело к существованию семейств траекторий  $v_r, v_{r_1}$  и т. д., сливающихся с соответствующими траекториями  $r, r_1$  и т. д. и при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически приближающихся к циклу (фиг. 1).

Предположим теперь, что выполняется равенство

$$\Omega = \max y_0(x) \quad (11)$$

Тогда цикл  $Y$  системы (4) по-прежнему совпадает с циклом  $y_0$  системы (7), но не является обычным в определенном нами выше смысле. Действительно, для  $y < y_0$  все траектории системы (4), являясь траекториями системы (7), при  $t \rightarrow +\infty$  по-прежнему асимптотически приближаются к циклу, но для  $y > y_0$  каждая траектория системы (4) при некотором конечном значении  $t$  сливается с предельным циклом. Впредь цикл второго рода системы (4) будем называть «особым», если существует совокупность траекторий системы, каждая из которых при конечном значении времени сливается с циклом. Пусть далее имеем

$$\min \Phi(x) < \Omega < \max y_0(x) \quad (12)$$

т. е. по-прежнему на полосе  $-\pi \leq x \leq \pi$  система (4) имеет один отрезок захвата. Обозначим через  $r_0$  траекторию системы (7), совпадающую с  $r$  для  $y < \Omega$ . Так как  $\Omega < \max y_0(x)$ , то траектория  $r_0$ , являясь траекторией системы (7), расположенной ниже цикла  $y_0$ , при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически приближается к циклу  $y_0$ , т. е. для траектории  $r_0$  выполняется неравенство  $r_0(x) < r_0(x + 2\pi)$  для всех  $x$  области существования кривой  $y = r_0(x)$  в полуплоскости  $\{y > 0\}$ . Поэтому траектория  $r_0$  обязательно пересечет отрезок захвата (фиг. 2) полосы  $\pi \leq x \leq 3\pi$ , т. е.  $r \in v_{r_1}$ .

Итак, при значениях  $\Omega$  из соотношения (12) система (4) имеет в качестве предельного цикла  $Y$  траекторию системы (4), составленную на полосе  $-\pi \leq x \leq \pi$  из траектории  $r$  и части отрезка захвата системы и периодически повторенную на всех полосах шириною  $2\pi$  плоскости  $xy$ . Этот цикл  $Y$  является особым, все траектории системы (4) сливаются с циклом. Наконец, предположим выполненным соотношение

$$0 < \Omega \leq \min \Phi(x) \quad (13)$$

Легко видеть, что в этом случае прямая переключения  $y = \Omega$  будет прямой захвата и особым циклом системы (4). Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Все траектории системы (4), удовлетворяющей условиям (2) и (3) при  $t \rightarrow +\infty$ , притягиваются предельным циклом второго рода либо асимптотически, либо сливаясь с ним в конечный момент времени.

Ясно, что значение  $\Omega_0 = \max y_0(x)$ , где  $y_0(x)$  — периодическое по  $x$  решение системы (7), будет бифуркационным значением параметра  $\Omega$  системы (4). При значениях  $\Omega$  из соотношения  $0 < \Omega < \max y_0(x)$  система (4) имеет особый предельный цикл, при значениях  $\Omega > \max y_0(x)$  система (4) имеет обычный цикл.

**Теорема 2.** Если для системы (4) при условиях (2) и (3) выполняется соотношение  $0 < \Omega < N/\alpha$ , то система (4) имеет особый цикл; при выполнении неравенства

$$\Omega > \frac{N + \max f(x)}{\alpha}$$

система (4) имеет обычный цикл.

Справедливость этой теоремы вытекает из оценки

$$\frac{N}{\alpha} < \max y_0(x) < \max \frac{N - f(x)}{\alpha}$$

Здесь  $N/\alpha$  — среднее значение функции  $y_0(x)$  периодического по  $x$  решения системы (7) на интервале  $[-\pi, \pi]$ .

Поступила 31 I 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Витт А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.