

Выишем окончательное выражение для функции тока

$$\begin{aligned} \frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = & \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \gamma_n - \beta_n + \left( \beta_n - \alpha_n \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \right) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \sqrt{\kappa s_{1/2, \mu_n}}(\kappa) - 2\beta_n \sqrt{\kappa s_{-3/2, \mu_n}}(\kappa) \right] \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa \rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} - \left( \beta_n - \alpha_n \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \right) \times \right. \\ & \left. \left. \times \sqrt{\kappa \rho s_{1/2, \mu_n}}(\kappa) + 2\beta_n \sqrt{\kappa \rho s_{-3/2, \mu_n}}(\kappa) \right\} \frac{\sqrt{\theta \sin \theta} Z_1(\mu_n \theta)}{[\mu_n \theta_2 Z_0(\mu_n \theta_2)]^2 - (2/\pi)^2} + \\ & + \frac{C}{k\psi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[ \sqrt{\kappa s_{1/2, \mu_n}}(\kappa) \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa \rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} - \sqrt{\kappa \rho s_{1/2, \mu_n}}(\kappa) \right] \frac{\sqrt{\theta \sin \theta} Z_1(\mu_n \theta)}{[\mu_n \theta_2 Z_0(\mu_n \theta_2)]^2 - (2/\pi)^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  — прежние, а

$$\gamma_n = \frac{4}{\pi} \frac{\sin \theta_1 \sqrt{\theta_1 \sin \theta_1}}{\theta_1 (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1)} - 2\mu_n \frac{\sin \theta_2 \sqrt{\theta_2 \sin \theta_2}}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} Z_0(\mu_n \theta_2)$$

По формуле (2.3) были проделаны расчеты при  $\theta_1 = 1.5^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$ ,  $\kappa = 4$  и при различных значениях параметра  $C/k\psi_1$ . На фиг. 2 представлены линии тока при значении  $C/k\psi_1 = 7$ .

Поступила 25 II 1961 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

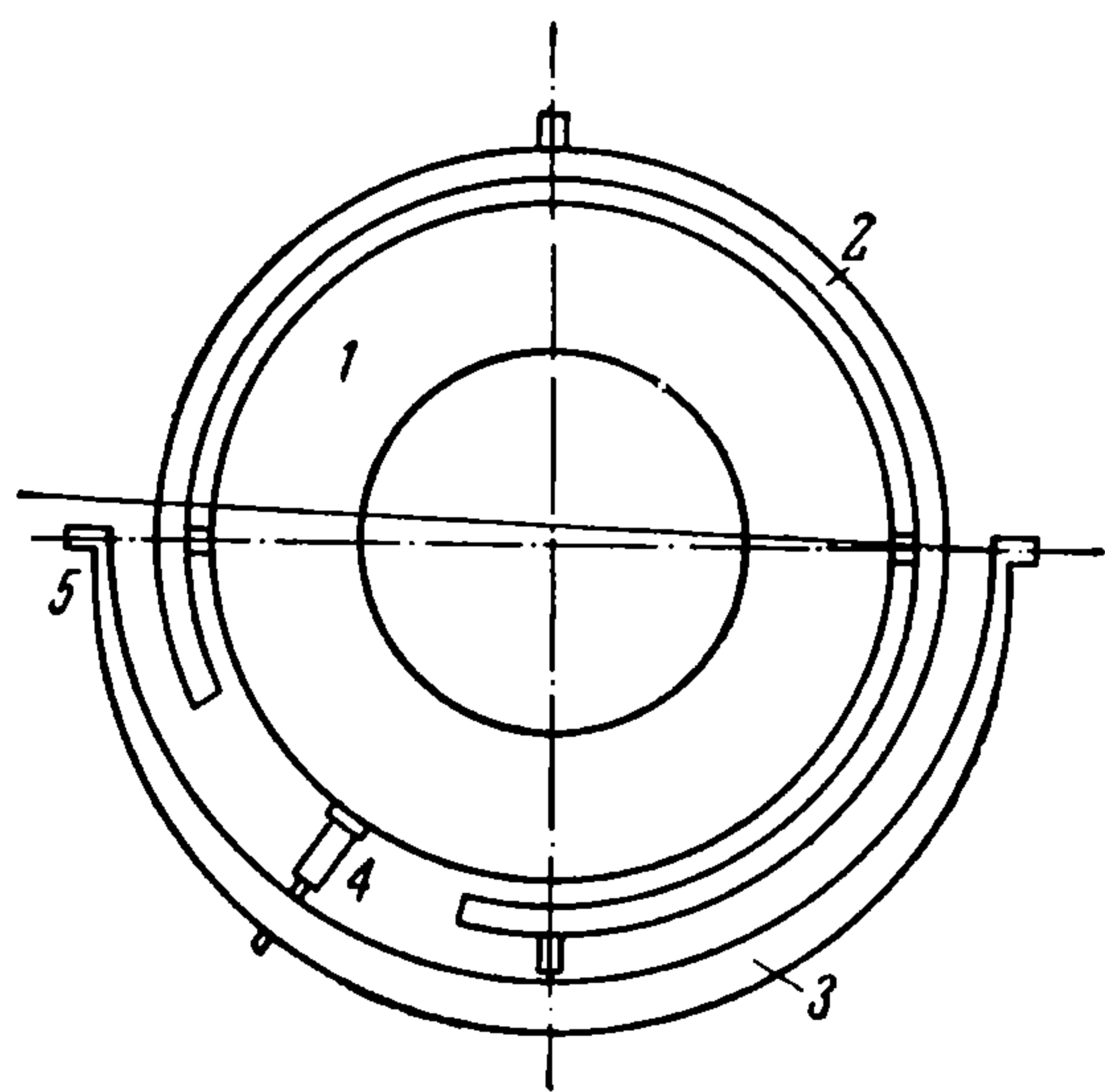
1. Б о с т а н д ж и я н С. А. Однородное винтовое движение в конусе. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1,
2. В а с и л ь е в О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат, М.—Л., 1958.
3. М у р а д я н Р. М. Асимптотические формулы для обобщенных функций Лежандра и Гегенбауэра. ДАН СССР, 1957, т. 115, № 5.

### НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГИРОСКОНИЧЕСКОГО КОМПАСА С ПЕРИОДОМ В СЕМНАДЦАТЬ ЧАСОВ

Е. Н. Токарь

(Москва)

Известно, что все существующие гироскопические компасы обладают двумя возможными положениями равновесия. Первому положению равновесия, если пренебречь скоростными девиациями и девиациями затухания, соответствует ориентация вектора кинетического момента гироскопической системы на север. Второму положению равновесия соответствует, в тех же предположениях, ориентация вектора кинетического момента на юг. Первое положение равновесия является основным рабочим положением гироскопического компаса. Это положение равновесия всегда устойчиво. Второе положение равновесия для всех существующих гироскопических компасов является неустойчивым.



Фиг. 1

Ниже показывается, что при изменении параметров гироскопического компаса, соответствующем значительному увеличению его собственного периода колебаний, у прибора могут быть обнаружены в общем случае четыре положения равновесия.

У гироскопического компаса, используемого в земных условиях, это явление наблюдается при значениях собственного периода колебаний около основного (северного) положения равновесия, превышающих 17 часов.

Рассмотрим одпороторную модель гироскопического компаса, близкую по типу к первым гироскопам Сперри (сходные свойства можно обнаружить, приняв за основу некоторые другие модели гироскопического компаса). На фиг. 1 позиция 1 — кожух гироскопа, несущий в себе вращающийся ротор, 2 — наружная рамка карданова подвеса, 3 — коррекционный маятник.

Моменты, возникающие при отклонениях маятника от вертикали, передаются гироскопу посредством эксцентрично установленного штифта 4.

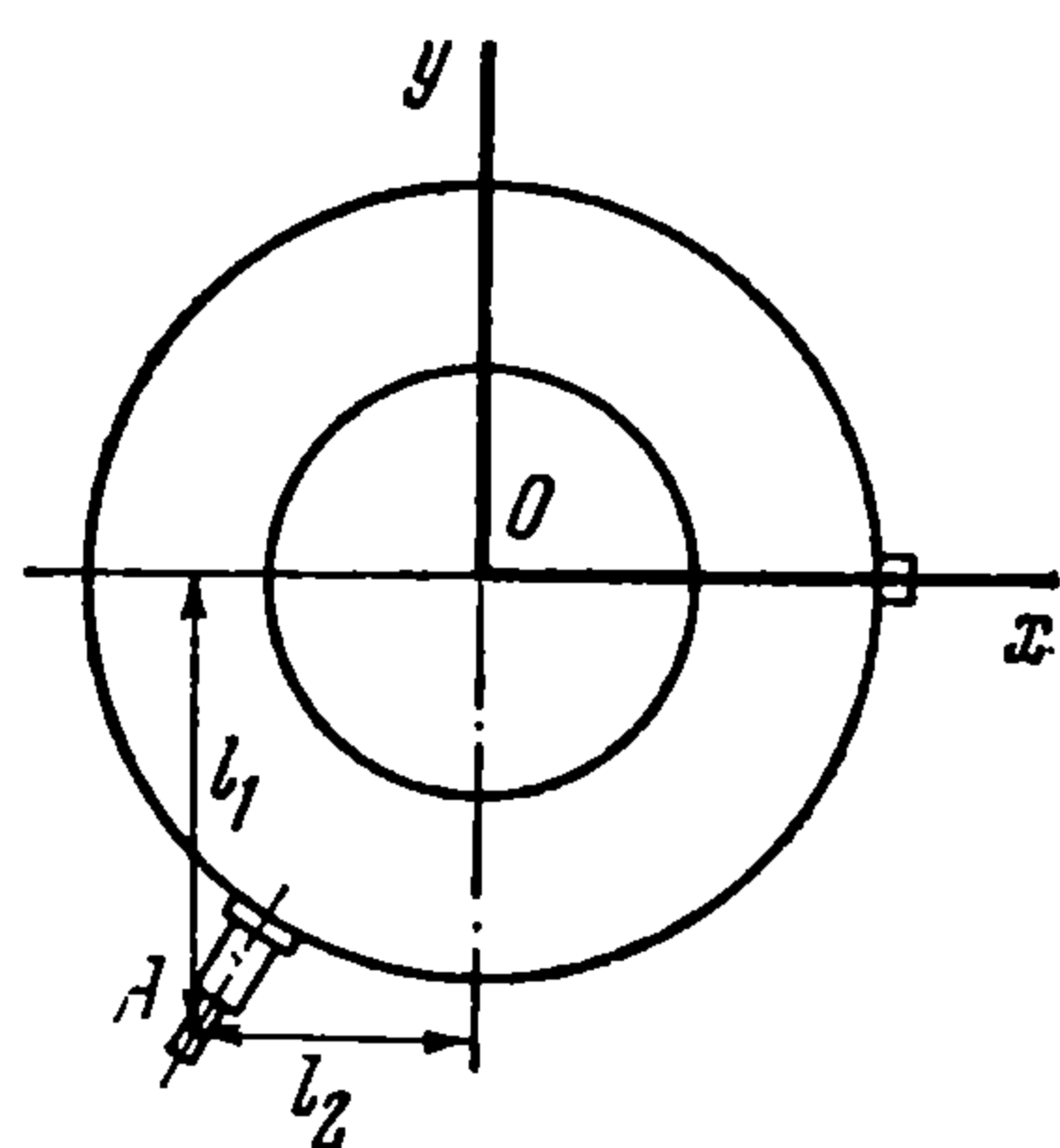
Предполагается, что маятник установлен на собственном подвесе, снабженном следящей системой. Следящая система совмещает ось подвеса маятника 5 с осью подвеса кожуха гироскопа в наружной рамке.

Составим уравнения движения прибора. Расположение оси гироскопа в пространстве будем считать произвольным. Введем две координатные системы с общим началом отсчета в точке  $O$  — центре тяжести ротора гироскопа.

Система  $x_0y_0z_0$  представляет собой географически ориентированный трехгранник на земной поверхности (фиг. 2).

Ось  $z_0$  предполагаем горизонтальной и направленной на север; ось  $y_0$  расположена вертикально и направлена от центра Земли. Если ограничиться рассмотрением работы прибора на неподвижном основании, угловая скорость трехгранника  $x_0y_0z_0$  относительно инерциального пространства будет совпадать с угловой скоростью суточного вращения Земли  $\omega_*$ . Разложив угловую скорость  $\omega_*$  на местную горизонтальную ( $\omega'_*$ ) и вертикальную ( $\omega''_*$ ) составляющие, получим первую составляющую направленной по оси  $z_0$ , а вторую — по оси  $y_0$ .

Система координат  $xuz$  связана с кожухом гироскопа; ось  $x$  совмещена с осью подвеса кожуха гироскопа в наружной рамке; ось  $z$  направлена по вектору собственного кинетического момента гироскопа. Будем предполагать ось наружной рамки подвеса гироскопа стабилизированной по направлению местной вертикали, т. е. по направлению оси  $y_0$ . Ось  $x$  в этом предположении будет все время находиться в плоскости  $x_0z_0$ .



Фиг. 3

Расположение системы  $xuz$  относительно системы  $x_0y_0z_0$  зададим при помощи координатных углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Угол  $\alpha$  отсчитывается как угол поворота наружной рамки относительно своей оси подвеса. Угол  $\beta$  отсчитывается как угол поворота кожуха гироскопа относительно наружной рамки. Отсчет углов  $\alpha$  и  $\beta$  ведется от положения гироскопа, при котором ось  $z$  совпадает с осью  $z_0$ . Направление отсчета углов  $\alpha$  и  $\beta$  ясно из фиг. 2. Подсчитывая абсолютную угловую скорость трехгранника  $xuz$ , получим

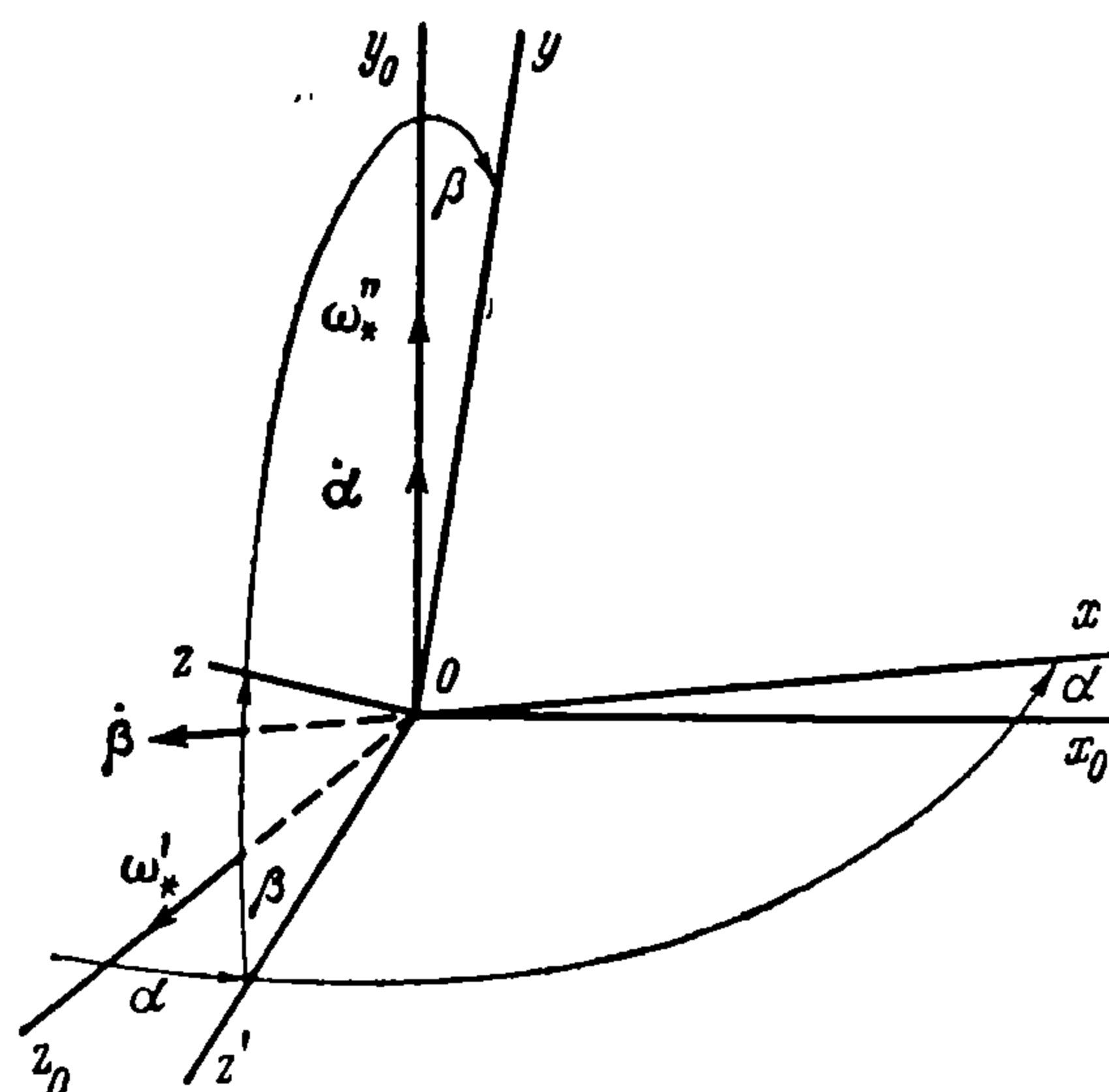
$$\omega = \omega'_* + \omega''_* + \dot{\alpha} + \dot{\beta}$$

$$\omega_x = \omega'_* \sin \alpha - \dot{\beta}, \quad \omega_y = \omega''_* \cos \beta - \omega'_* \cos \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} \cos \beta$$

Примем режим работы гироскопа стационарным

$$M_{z\Sigma} = 0, \quad \Gamma = \text{const} \quad (1)$$

Здесь  $M_{z\Sigma}$  — проекция на ось  $z$  главного момента внешних сил, действующих на гироскоп;  $\Gamma$  — собственный кинетический момент гироскопа.



Фиг. 2

Предположив работу следящей системы, совмещающей ось подвеса коррекционного маятника с осью подвеса кожуха гироскопа, идеальной, вычислим проекции на оси трехгранника  $xyz$  момента маятника. Получим

$$M_x = pl \sin \beta, \quad M_y = -pl \frac{l_2}{l_1} \sin \beta, \quad M_z = 0 \quad (2)$$

Здесь  $p$  — вес маятника,  $l$  — расстояние от оси подвеса до центра тяжести маятника. Смысл величин  $l_1$  и  $l_2$  ясен из фиг. 3.

Моментами трения в осях подвеса гироскопа и маятника пренебрежем. В области конечных значений угла  $\beta$ , которая рассматривается здесь, существенное значение может приобрести момент реакции, воспринимаемый наружной рамкой гироскопа ( $M_r$ ). Для рассматриваемой модели гироскопического компаса этот момент равен нулю при любых значениях  $\beta$ , за исключением  $\beta = \pm \pi/2$ .

Действительно, допустим, что  $M_r \neq 0$ . При отсутствии трения в осях подвеса гироскопа вектор момента  $M_r$  должен быть перпендикулярен плоскости наружной рамки. Для всех значений угла  $\beta$ , за исключением  $\beta = +\pi/2$  и  $\beta = -\pi/2$ , этот момент будет иметь конечную составляющую вдоль оси  $z$ . При учете (2) последнее противоречит условию (1). Отсюда следует, что  $M_r = 0$  для всех значений  $\beta$ , за исключением  $\beta = +\pi/2$  и  $\beta = -\pi/2$ .

Уравнения движения гироскопа в проекциях на оси трехгранника  $xyz$

$$\Gamma \omega_*'' \cos \beta - \Gamma \omega_*' \cos \alpha \sin \beta + \Gamma \dot{\alpha} \cos \beta = k \sin \beta \quad (3)$$

$$\Gamma \omega_*' \sin \alpha + \Gamma \dot{\beta} = -h \sin \beta$$

Здесь  $k = pl$ ,  $h = pll_2/l_1$ . Определим возможные положения равновесия гироскопа. Полагая  $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ , получим

$$(\Gamma \omega_*' \cos \alpha_0 + k) \sin \beta_0 - \Gamma \omega_*'' \cos \beta_0 = 0, \quad \Gamma \omega_*' \sin \alpha_0 + h \sin \beta_0 = 0 \quad (4)$$

Здесь  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  — значения углов  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующие какому-либо положению равновесия.

Рассмотрим сначала положения равновесия прибора, соответствующие ориентации вектора кинетического момента гироскопа приблизительно на север и на юг. Вблизи северного положения равновесия углы  $\alpha$  и  $\beta$  можно считать малыми.

Получим

$$(\Gamma \omega_*' + k) \beta_0 - \Gamma \omega_*'' = 0, \quad \Gamma \omega_*' \alpha_0 + h \beta_0 = 0$$

Отсюда

$$\alpha_0 = -\frac{h}{\Gamma \omega_*' + k} \frac{\omega_*''}{\omega_*'}, \quad \beta_0 = \frac{\Gamma \omega_*''}{\Gamma \omega_*' + k} \quad (5)$$

Соотношения (5) дают величину нормального угла возвышения оси гироскопа над плоскостью горизонта и величину девиации затухания. Заметим, что полученные значения  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  не будут оставаться малыми при вариации параметров прибора в широких пределах, в частности при значительном уменьшении параметра  $k$ , которое рассматривается ниже. Линеаризация уравнений (4) может оказаться в этом случае незаконной. В дальнейшем, рассматривая малые значения  $k$ , будем предполагать выполненным неравенство  $\omega_*'' \ll \omega_*'$ , что соответствует работе прибора в низких широтах. При соблюдении данного неравенства линеаризация уравнений (4) вблизи северного положения равновесия будет возможной при любых значениях  $k$ .

Линеаризируя сходным образом уравнения движения (3), найдем

$$\Gamma \dot{\alpha} - (\Gamma \omega_*' + k) \beta + \Gamma \omega_*'' = 0, \quad \Gamma \dot{\beta} + \Gamma \omega_*' \alpha + h \beta = 0$$

Перейдем к уравнениям относительно возмущений

$$\Gamma \Delta \dot{\alpha} - (\Gamma \omega_*' + k) \Delta \beta = 0, \quad \Gamma \Delta \dot{\beta} + \Gamma \omega_*' \Delta \alpha + h \Delta \beta = 0 \quad (6)$$

Здесь  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$  и  $\Delta\beta = \beta - \beta_0$  — возмущения координатных углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Характеристическое уравнение системы (6)

$$p^2 + \frac{h}{\Gamma} p + \frac{(\Gamma\omega_*' + k)\omega_*'}{\Gamma} = 0 \quad (7)$$

показывает, что северное положение равновесия оси гироскопического компаса является асимптотически устойчивым при любых положительных значениях параметров  $h$ ,  $k$  и  $\Gamma$ .

Обращаясь к южному положению равновесия, сделаем замену  $\alpha' = \pi - \alpha$ . Полагая углы  $\alpha'$  и  $\beta$  малыми, получим

$$\Gamma\dot{\alpha}' + (k - \Gamma\omega_*')\beta - \Gamma\omega_*'' = 0, \quad \Gamma\dot{\beta} + h\beta + \Gamma\omega_*'\alpha' = 0$$

Для положения равновесия

$$\alpha_0' = -\frac{h}{k - \Gamma\omega_*'} \frac{\omega_*''}{\omega_*'}, \quad \beta_0 = \frac{\Gamma\omega_*''}{k - \Gamma\omega_*'} \quad (8)$$

Уравнения возмущений имеем в виде

$$\Gamma\dot{\Delta\alpha}' + (k - \Gamma\omega_*')\Delta\beta = 0, \quad \Gamma\dot{\Delta\beta} + h\Delta\beta + \Gamma\omega_*'\Delta\alpha' = 0$$

Характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{h}{\Gamma} p - \frac{\omega_*'(k - \Gamma\omega_*')}{\Gamma} = 0$$

показывает, что рассматриваемое положение равновесия неустойчиво только при  $k \geq \Gamma\omega_*'$ . При  $k < \Gamma\omega_*'$  положение равновесия (8) становится устойчивым. Кинетическая ось гироскопического компаса приобретает способность стабилизироваться в южном положении.

Рассматривая уравнение (7) и полагая в нем коэффициент  $h$ , определяющий демпфирование колебаний, малым, вычислим собственный период колебаний прибора вблизи главного (северного) положения равновесия по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Gamma\omega_*' + k)\omega_*'/\Gamma}}$$

Полагая  $k = \Gamma\omega_*'$ , найдем значение собственного периода колебаний прибора вблизи северного положения равновесия, начиная с которого южное положение равновесия становится устойчивым

$$T' = \sqrt{2} \frac{\pi}{\omega_*'}$$

В качестве примера рассмотрим работу прибора на экваторе Земли. Полагая  $\omega_*' = \omega = 7.27 \cdot 10^{-5}$  сек<sup>-1</sup>, получим для  $T'$  значение

$$T' = 16 \text{ час } 58.3 \text{ мин } \approx 17 \text{ час}$$

Рассмотрим уравнения (4). Исключив из них угол  $\alpha$ , придем к соотношению  $(k^2 + h^2 - \Gamma^2\omega_*'^2)u^4 - 2\Gamma\omega_*''ku^3 + (k^2 + \Gamma^2\omega_*''^2 - \Gamma^2\omega_*'^2)u^2 - 2\Gamma\omega_*''ku + \Gamma^2\omega_*''^2 = 0$

$$(u = \text{tg } \beta) \quad (9)$$

Это уравнение, вообще говоря, может иметь четыре действительных корня. Следовательно, в общем случае можно ожидать, что ось гироскопического компаса будет иметь четыре положения равновесия в пространстве. В качестве примера снова рассмотрим работу гироскопического компаса на экваторе. В этом случае  $\omega_*'' = 0$ ,  $\omega_*' = \omega$ . Уравнение (9) примет вид

$$(k^2 + h^2 - \Gamma^2\omega_*'^2)u^4 + (k^2 - \Gamma^2\omega_*'^2)u^2 = 0 \quad (u = \text{tg } \beta) \quad (10)$$

Решая уравнение (10), находим

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0$$

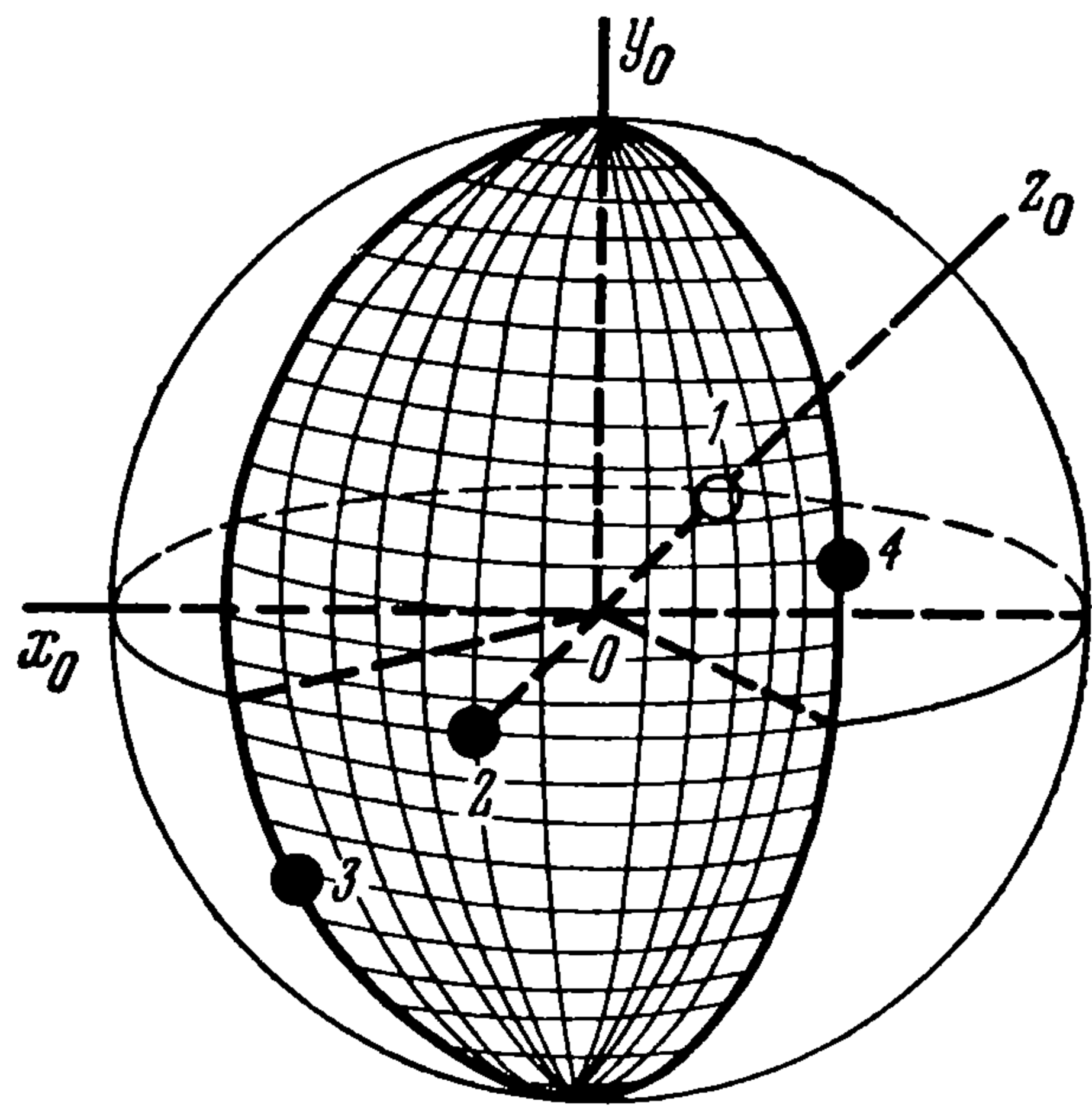
$$u_3 = \sqrt{\frac{k^2 - \Gamma^2 \omega_*^2}{k^2 + h^2 - \Gamma^2 \omega_*^2}}, \quad u_4 = -u_3 = -\sqrt{\frac{k^2 - \Gamma^2 \omega_*^2}{k^2 + h^2 - \Gamma^2 \omega_*^2}}$$

Используя эти соотношения, можно получить следующие четыре решения системы (4)

$$\alpha_{01} = 0, \quad \alpha_{02} = \pi, \quad \alpha_{03} = \arccos\left(-\frac{k}{\Gamma\omega_*}\right), \quad \alpha_{04} = -\arccos\left(-\frac{k}{\Gamma\omega_*}\right)$$

$$\beta_{01} = 0, \quad \beta_{02} = 0, \quad \beta_{03} = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{\Gamma^2\omega_*^2 - k^2}}{h}\right), \quad \beta_{04} = \arcsin\frac{\sqrt{\Gamma^2\omega_*^2 - k^2}}{h}$$

Положения равновесия, соответствующие первым двум решениям, были рассмотрены выше. Положение равновесия  $(\alpha_{01}, \beta_{01})$  является основным (северным) положением равновесия гироскопического компаса и всегда устойчиво. Положение равновесия  $(\alpha_{02}, \beta_{02})$  соответствует южному положению равновесия оси гироскопа. Оно неустойчиво при  $k \geq \Gamma\omega_*$  и устойчиво при  $k < \Gamma\omega_*$ .



Фиг. 4

Два новых положения равновесия, соответствующие решениям  $(\alpha_{03}, \beta_{03})$  и  $(\alpha_{04}, \beta_{04})$ , расположены на задней половине фазовой сферы  $(\alpha, \beta)$ , если смотреть на нее со стороны основного положения равновесия, т. е. со стороны оси  $z_0$  (фиг. 4). Положения равновесия  $(\alpha_{03}, \beta_{03})$  и  $(\alpha_{04}, \beta_{04})$  расположены симметрично относительно оси  $z_0$ . Эти положения равновесия возникают только при  $k < \Gamma\omega_*$ , т. е. одновременно с возникновением устойчивости положения равновесия  $(\alpha_{02}, \beta_{02})$ .

Исследуем устойчивость положений равновесия  $(\alpha_{03}, \beta_{03})$  и  $(\alpha_{04}, \beta_{04})$ . Раскладывая члены уравнений (3) в ряды вблизи произвольного положения равновесия  $(\alpha_0, \beta_0)$  с точностью до малых второго порядка, будем иметь

$$\Delta \dot{\alpha} = \omega_* \left[ \left( \cos \alpha_0 + \frac{k}{\Gamma\omega_*} \right) \operatorname{tg} \beta_0 - \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \beta_0 \Delta \alpha + \sec^2 \beta_0 \left( \cos \alpha_0 + \frac{k}{\Gamma\omega_*} \right) \Delta \beta \right]$$

$$\Delta \dot{\beta} = -\omega_* \left( \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \Delta \alpha + \frac{h}{\Gamma\omega_*} \sin \beta_0 + \frac{h}{\Gamma\omega_*} \cos \beta_0 \Delta \beta \right)$$

или, используя условия (4)

$$\Delta \dot{\alpha} + \omega_* \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \beta_0 \Delta \alpha - \omega_* \sec^2 \beta_0 \left( \cos \alpha_0 + \frac{k}{\Gamma\omega_*} \right) \Delta \beta = 0$$

$$\omega_* \cos \alpha_0 \Delta \alpha + \Delta \dot{\beta} + \frac{h}{\Gamma} \cos \beta_0 \Delta \beta = 0$$

Здесь  $\Delta \alpha = \alpha - \alpha_0$ ,  $\Delta \beta = \beta - \beta_0$  — малые отклонения углов  $\alpha$  и  $\beta$  от равновесных значений. Характеристическое уравнение системы возмущений:

$$p^2 + \left( \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \beta_0 + \frac{h}{\Gamma\omega_*} \cos \beta_0 \right) \omega_* p +$$

$$+ \left[ \frac{h}{\Gamma\omega_*} \sin \alpha_0 \sin \beta_0 + \sec^2 \beta_0 \cos \alpha_0 \left( \cos \alpha_0 + \frac{k}{\Gamma\omega_*} \right) \right] \omega_*^2 = 0 \quad (11)$$

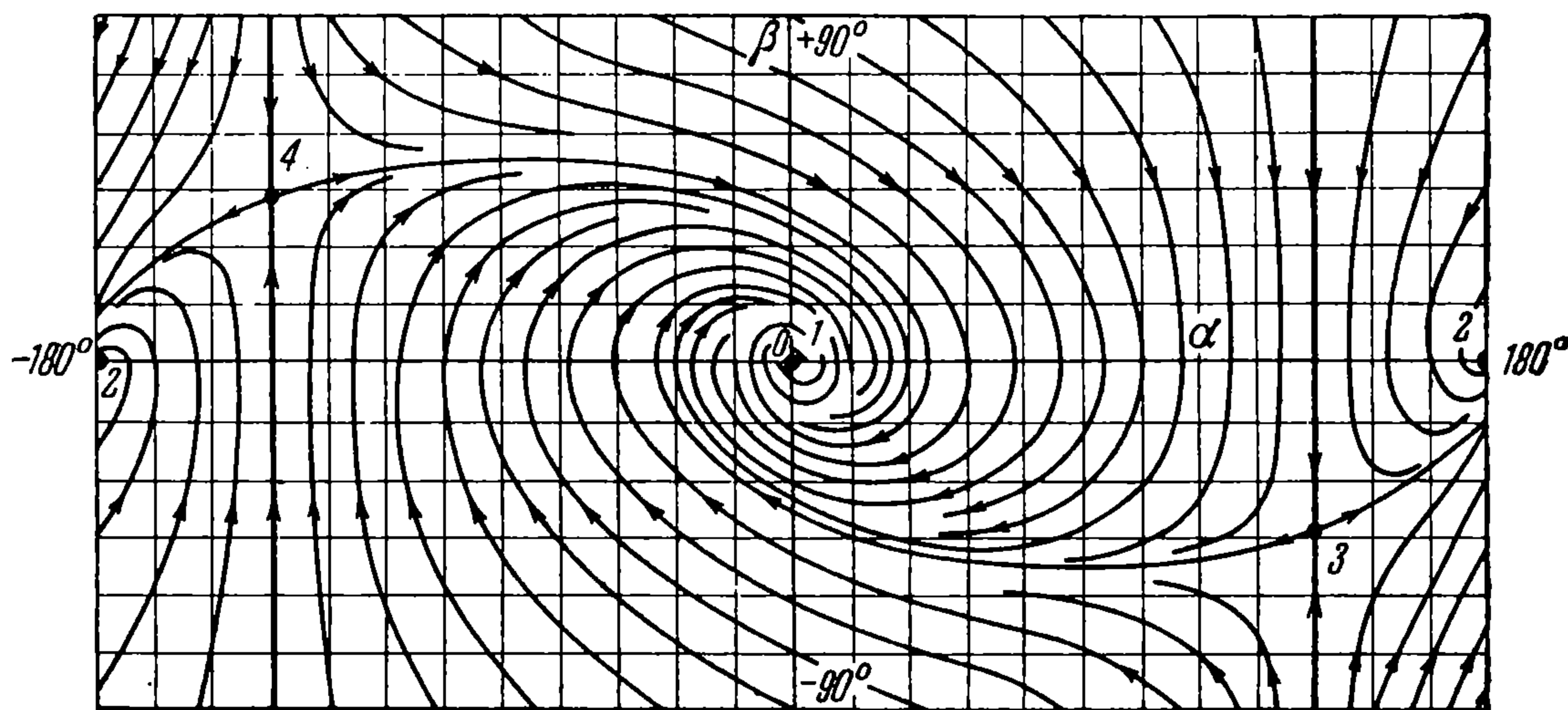
Подставляя в (11) значения тригонометрических функций, соответствующих положению равновесия  $(\alpha_{03}, \beta_{03})$ , получим

$$p^2 + \frac{2k^2 + h^2 - 2\Gamma^2\omega_*^2}{\sqrt{h^2 + k^2 - \Gamma^2\omega_*^2}} \omega_* p - (\Gamma^2\omega_*^2 - k^2) = 0 \quad (12)$$

Положение равновесия  $(\alpha_{03}, \beta_{03})$  существует только при  $\Gamma\omega_* > k$ . Следовательно, положение равновесия  $(\alpha_{03}, \beta_{03})$  в том случае, когда оно существует, неустойчиво. Так как свободный член характеристического уравнения (12) отрицателен, мы имеем в положении равновесия  $(\alpha_{03}, \beta_{03})$  особую точку типа седла. Аналогичный результат получается по отношению к положению равновесия  $(\alpha_{04}, \beta_{04})$ .

Таким образом, при достижении собственного периода колебаний вблизи основного (северного) положения равновесия, равного семнадцати часам, гироскопический компас рассмотренного типа, установленный на экваторе Земли, обнаруживает четыре различных положения равновесия. Два из них соответствуют ориентации кинетической оси гироскопа на север и на юг. Оба этих положения равновесия являются устойчивыми. Два других положения равновесия лежат на южной половине пространственной полусферы и представляют собой особые точки типа седла.

На фиг. 5 приведено примерное фазовое изображение гироскопического компаса на плоскости  $(\alpha, \beta)$ , соответствующее рассмотренному случаю. При построении фазовых траекторий неравенство  $k < \Gamma\omega_*$ , необходимое для существования положений равновесия  $(\alpha_{03}, \beta_{03})$  и  $(\alpha_{04}, \beta_{04})$ , считалось выполненным. На изображении показаны четыре поло-



Фиг. 5

жения равновесия прибора. Точки  $(+180.0)$  и  $(-180.0)$  на приведенном изображении как нетрудно видеть, соответствуют одному и тому же положению равновесия прибора  $(\alpha_{02}, \beta_{02})$  (южному положению равновесия). В данном случае это положение равновесия является устойчивым. Жирными линиями выделены сепаратрисы, отделяющие область устойчивости главного положения равновесия  $(\alpha_{01}, \beta_{01})$  от области устойчивости положения равновесия  $(\alpha_{02}, \beta_{02})$ . Обращаясь к уравнениям движения (3), нетрудно убедиться, что эти сепаратрисы на пространственной сфере  $\alpha, \beta$  являются дугами большого круга, соответствующими равенствам

$$\alpha = \arccos(-k/\Gamma\omega_*) \text{ и } \alpha = -\arccos(-k/\Gamma\omega_*)$$

На фиг. 4 сепаратрисы изображены жирными линиями, а область устойчивости положения равновесия  $(\alpha_{02}, \beta_{02})$  заштрихована.