

ОДНОРОДНОЕ ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ КОНУСАМИ

С. А. Бостанджиян
(Москва)

Задача об однородном винтовом движении в коническом сосуде конечных размеров исследовалась применительно к гидроциклонам [1]. При работе гидроциклонов у оси их образуется воздушный столб. Поэтому представляет интерес решение задачи вне области воздушного столба. Ниже рассматривается задача об однородном винтовом движении в двусвязной области между двумя коаксиальными конусами.

1. Будем считать, что жидкость идеальная, несжимаемая, поток между двумя коаксиальными конусами является однородным винтовым, симметричным относительно общей оси. Через кольцевую щель вдоль основания наружного конуса жидкость поступает в конус в количестве q единиц в секунду, а через общую вершину конусов и через кольцевую щель, окружающую ось, вытекает в количестве q_1 и q_2 единиц в секунду, соответственно. Длина образующей конусов равна R_0 , полные углы при вершине (фиг. 1) равны соответственно $2\theta_1$ и $2\theta_2$.

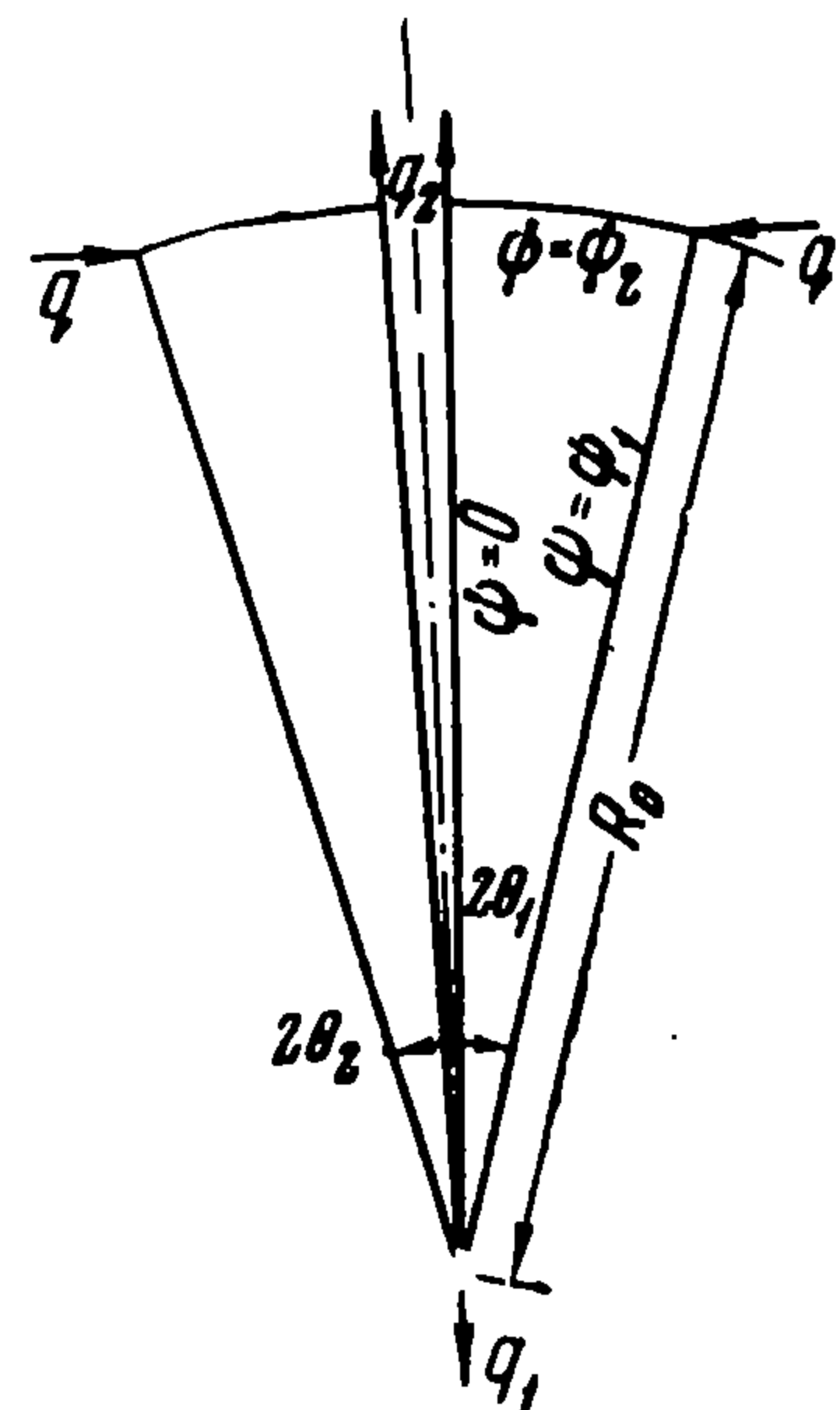
Задача сводится к решению неоднородного дифференциального уравнения [2].

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + k^2 \psi = -kC$$

($k, C = \text{const}$) (1.1)

в области $0 \leq r \leq R_0$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ при следующих граничных условиях:

$$\psi(r, \theta_1) = 0, \quad \psi(r, \theta_2) = \psi_1 = -\frac{q_1}{2\pi}, \quad \psi(R_0, \theta) = \psi_2 = \frac{q_2}{2\pi}$$



Фиг. 1

Вместо функции $\psi(r, \theta)$ введем новую функцию $u(r, \theta)$, связанную с первой

$$u(r, \theta) = \psi(r, \theta) - \psi_1 \left(\frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \right)$$
(1.3)

Уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + k^2 u = -kC + \frac{k^2 \psi_1 \sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} - \frac{\psi_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) \sin^2 \theta$$
(1.4)

Для функции $u(r, \theta)$ имеем такие граничные условия:

$$u(r, \theta_1) = 0, \quad u(r, \theta_2) = 0, \quad u(R_0, \theta) = \psi_2 - \psi_1 \left(\frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \right)$$
(1.5)

Функция $u(r, \theta)$ ищется в виде ряда

$$u(r, \theta) = M_1(r) L_1(\theta) + M_2(r) L_2(\theta) + \dots + M_n(r) L_n(\theta) + \dots$$
(1.6)

расположенного по собственным функциям $L_n(\theta)$

$$L_n(\theta) = \sin \theta [Q_{\nu_n}^1(\cos \theta_1) P_{\nu_n}^1(\cos \theta) - P_{\nu_n}^1(\cos \theta_1) Q_{\nu_n}^1(\cos \theta)]$$

Здесь $P_{\nu_n}^1(\cos \theta)$, $Q_{\nu_n}^1(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра.

Собственные числа ν_n определяются как корни трансцендентного уравнения

$$Q_{\nu}^1(\cos \theta_1) P_{\nu}^1(\cos \theta_2) - P_{\nu}^1(\cos \theta_1) Q_{\nu}^1(\cos \theta_2) = 0$$
(1.7)

Функция $M_n(r)$ определяется из дифференциального уравнения [1]

$$\frac{d^2 M_n}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{\nu_n(\nu_n + 1)}{r^2} \right] M_n = -\frac{1}{L_n^2} \left(kC + \psi_1 k^2 b_n - \frac{\psi_1 k^2 \sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} a_n \right) + \frac{\psi_1}{L_n^2} b_n \frac{2}{r^2}$$
(1.8)

Здесь

$$L_n^2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta) [L_n(\theta)]^2 d\theta, \quad a_n = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta) L_n(\theta) d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta \rho(\theta) L_n(\theta) d\theta \quad (1.9)$$

Через $\rho(\theta) = \csc \theta$ обозначена весовая функция. Функция $M_n(r)$ должна удовлетворять следующим условиям:

- 1) при $r \rightarrow 0$ функция $M_n(r)$ должна быть конечной величиной;
- 2) при $r = R_0$ согласно третьему условию (1.5) и обозначениям (1.9)

$$M_n(R_0) = \frac{a_n \psi_2}{L_n^2} + \frac{a_n \psi_1}{L_n^2} \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} - \frac{b_n \psi_1}{L_n^2} \quad (1.10)$$

Введем безразмерные величины $\rho = r/R_0$, $x = kR_0$ и $\gamma = \psi_2/\psi_1$ и напишем окончательное выражение для функции тока

$$\frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[a_n \gamma + a_n \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} - b_n + \right. \right.$$

$$\left. + \left(b_n - a_n \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \right) \sqrt{x} s_{1/2, \mu_n}(x) - 2b_n \sqrt{x} s_{-3/2, \mu_n}(x) \right] \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(x\rho)}{J_{\mu_n}(x)} -$$

$$\left. - \left(b_n - a_n \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \right) \sqrt{x\rho} s_{1/2, \mu_n}(x\rho) + 2b_n \sqrt{x\rho} s_{-3/2, \mu_n}(x\rho) \right\} \frac{L_n(\theta)}{L_n^2} +$$

$$+ \frac{C}{k\psi_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sqrt{x} s_{1/2, \mu_n}(x) \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(x\rho)}{J_{\mu_n}(x)} - \sqrt{x\rho} s_{1/2, \mu_n}(x\rho) \right] \frac{L_n(\theta)}{L_n^2} \quad (1.11)$$

Здесь $s_{1/2, \mu_n}(x)$ и $s_{-3/2, \mu_n}(x)$ — функция Ломмеля ($\mu_n = \nu_n + 1/2$).

Из (1.11) можно получить решение более частных задач. Так, $\gamma = 0$ соответствует случаю отсутствия кольцевой щели вдоль основания внутреннего конуса, а $\gamma = 1$ — случаю отсутствия кольцевой щели вдоль основания внешнего конуса и подачи жидкости через кольцевую щель малого конуса.

Вычисления значительно упрощаются, если воспользоваться асимптотическими формулами для присоединенных функций Лежандра, выведенными в работе [3]

$$P_\nu^m(\cos \theta) = \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^m \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^{1/2} J_{-m} \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) \theta \right]$$

$$Q_\nu^m(\cos \theta) = -\frac{\pi}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^m \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^{1/2} N_{-m} \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \quad (1.12)$$

которые дают хороший результат уже при $\nu = 10$.

Для практически интересных случаев $\theta_2 = 15^\circ \div 20^\circ$ наименьший корень уравнения (1.7) превышает 10, следовательно, можно пользоваться формулами (1.12).

Уравнение (1.7) примет вид

$$J_1(kx) N_1(x) - J_1(x) N_1(kx) = 0 \quad \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} = k, \quad \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \theta_1 = x \right) \quad (1.13)$$

Если x_n есть n -й корень уравнения (1.13), то соответствующий корень уравнения (1.7) найдется из соотношения

$$\nu_n + \frac{1}{2} = \frac{x_n}{\theta_1}$$

Вычисляя L_n^2 , a_n , b_n по формулам (1.9) и используя (1.12), перепишем формулу (1.11) в виде, более удобном для числовых расчетов

$$\begin{aligned} \frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = & \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\alpha_n \gamma + \alpha_n \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} - \beta_n + \right. \right. \\ & + \left. \left(\beta_n - \alpha_n \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \right) \sqrt{\kappa s_{1/2, \mu_n}}(\kappa) - 2\beta_n \sqrt{\kappa s_{-3/2, \mu_n}}(\kappa) \right] \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa \rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} - \\ & - \left(\beta_n - \alpha_n \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \right) \sqrt{\kappa \rho s_{1/2, \mu_n}}(\kappa \rho) + 2\beta_n \sqrt{\kappa \rho s_{-3/2, \mu_n}}(\kappa \rho) \left. \right\} \times \\ & \times \frac{\sqrt{\theta} \sin \theta Z_1(\mu_n \theta)}{[\mu_n \theta_2 Z_0(\mu_n \theta_2)]^2 - (2/\pi)^2} + \frac{C}{k\psi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \times \\ & \times \left[\sqrt{s_{1/2, \mu_n}}(\kappa) \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa \rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} - \sqrt{\kappa \rho s_{1/2, \mu_n}}(\kappa \rho) \right] \frac{\sqrt{\theta} \sin \theta Z_1(\mu_n \theta)}{[\mu_n \theta_2 Z_0(\mu_n \theta_2)]^2 - (2/\pi)^2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Z_1(\mu_n \theta) &= J_1(\mu_n \theta_1) N_1(\mu_n \theta) - N_1(\mu_n \theta_1) J_1(\mu_n \theta) \\ Z_0(\mu_n \theta_2) &= J_1(\mu_n \theta_1) N_0(\mu_n \theta_2) - N_1(\mu_n \theta_1) J_0(\mu_n \theta_2) \\ \alpha_n &= \frac{4}{\pi \sqrt{\theta_1} \sin \theta_1} - 2\mu_n \left(\frac{\theta_2}{\sin \theta_2} \right)^{1/2} Z_0(\mu_n \theta_2) \\ \beta_n &= \frac{2}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \frac{\mu_n (\mu_n - 1) (\mu_n + 1/2)}{\mu_n^2 - 9/4} \times \\ & \times \{ \sqrt{\theta_2 \sin \theta_2} [J_1(\mu_n \theta_1) N_1((\mu_n - 1) \theta_2) - N_1(\mu_n \theta_1) J_1((\mu_n - 1) \theta_2)] - \\ & - \sqrt{\theta_1 \sin \theta_1} [J_1(\mu_n \theta_1) N_1((\mu_n - 1) \theta_1) - N_1(\mu_n \theta_1) J_1((\mu_n - 1) \theta_1)] \} \end{aligned}$$

При помощи формулы (1.14) были проделаны расчеты при следующих данных:

$$\theta_1 = 1.5^\circ, \quad \theta_2 = 15^\circ, \quad \kappa = 4, \quad C/k\psi_1 = -15, \quad \gamma = -2$$

Для оценки влияния воздушного столба были проделаны аналогичные расчеты для сплошного конуса при $\theta_0 = 15^\circ$ при тех же значениях параметров κ , $C/k\psi_1, \gamma$.

Результаты расчетов показывают, что наличие воздушного столба очень незначительно влияет на расположение линий тока, поэтому при определении кинематической картины движения жидкости внутри гидроциклона влиянием воздушного столба можно пренебречь.

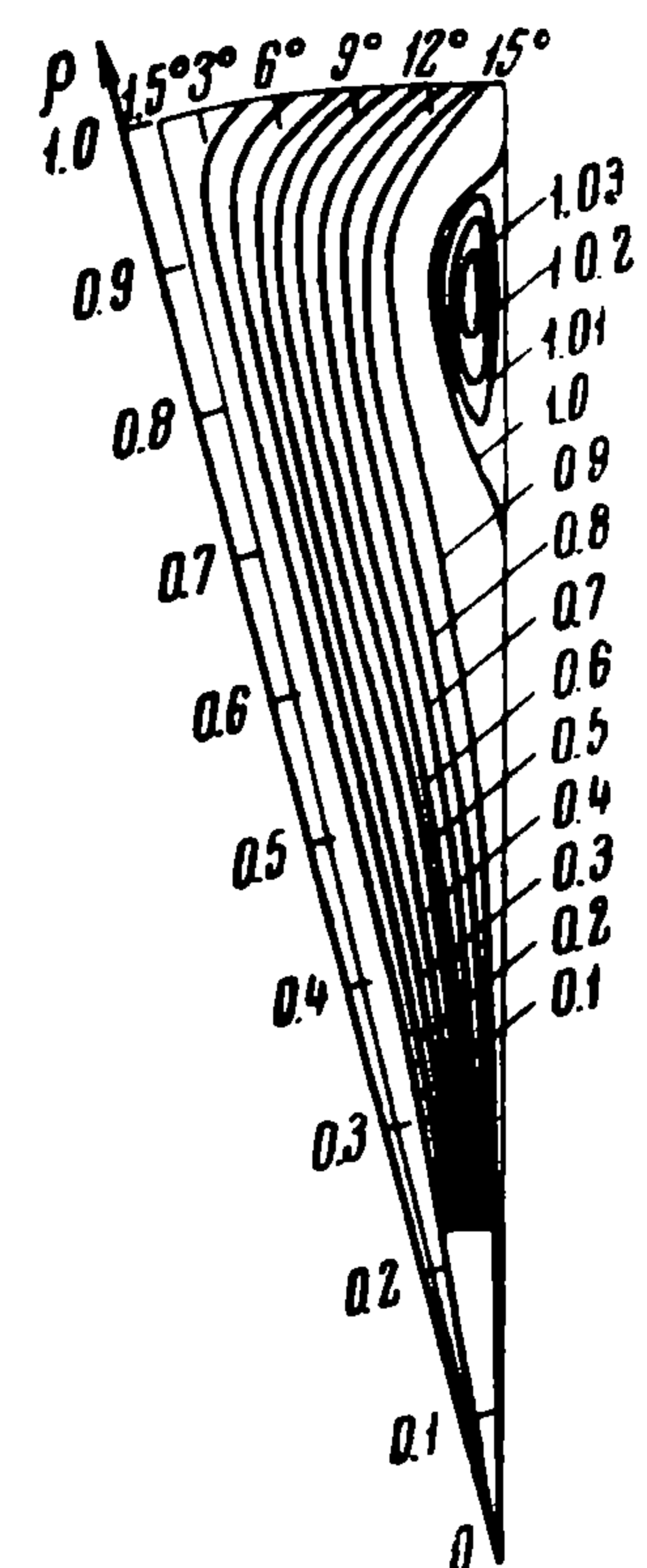
2. Пусть теперь твердая сферическая поверхность отсутствует, а ψ_2 есть заданная функция от θ . Вместо третьего условия (1.3) будем иметь $\psi(R_0, \theta) = f(\theta)$. Функция $f(\theta)$ должна быть такова, что при $\theta = \theta_1$ она обращается в нуль, а при $\theta = \theta_2$ равна ψ_1 .

В дальнейшем изменится только величина $M_n(R_0)$

$$\begin{aligned} M_n(R_0) &= \frac{d_n}{L_n^2} + \frac{a_n}{L_n^2} \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \psi_1 - \frac{b_n}{L_n^2} \psi_1 \\ & \left(d_n = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) \rho(\theta) L_n(\theta) d\theta \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решим задачу в частном случае, когда при $r = R_0$ радиальная составляющая скорости постоянная. Нетрудно показать, что в этом случае

$$f(\theta) = \psi_1 \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta}{\cos \theta_1 - \cos \theta_2} \quad (2.2)$$



Фиг. 2

Выишем окончательное выражение для функции тока

$$\begin{aligned} \frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = & \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\gamma_n - \beta_n + \left(\beta_n - \alpha_n \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \right) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \sqrt{\kappa s_{1/2, \mu_n}}(\kappa) - 2\beta_n \sqrt{\kappa s_{-3/2, \mu_n}}(\kappa) \right] \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa \rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} - \left(\beta_n - \alpha_n \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} \right) \times \right. \\ & \left. \left. \times \sqrt{\kappa \rho s_{1/2, \mu_n}}(\kappa) + 2\beta_n \sqrt{\kappa \rho s_{-3/2, \mu_n}}(\kappa) \right\} \frac{\sqrt{\theta \sin \theta} Z_1(\mu_n \theta)}{[\mu_n \theta_2 Z_0(\mu_n \theta_2)]^2 - (2/\pi)^2} + \\ & + \frac{C}{k\psi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[\sqrt{\kappa s_{1/2, \mu_n}}(\kappa) \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa \rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} - \sqrt{\kappa \rho s_{1/2, \mu_n}}(\kappa) \right] \frac{\sqrt{\theta \sin \theta} Z_1(\mu_n \theta)}{[\mu_n \theta_2 Z_0(\mu_n \theta_2)]^2 - (2/\pi)^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где α_n и β_n — прежние, а

$$\gamma_n = \frac{4}{\pi} \frac{\sin \theta_1 \sqrt{\theta_1 \sin \theta_1}}{\theta_1 (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1)} - 2\mu_n \frac{\sin \theta_2 \sqrt{\theta_2 \sin \theta_2}}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1} Z_0(\mu_n \theta_2)$$

По формуле (2.3) были проделаны расчеты при $\theta_1 = 1.5^\circ$, $\theta_2 = 15^\circ$, $\kappa = 4$ и при различных значениях параметра $C/k\psi_1$. На фиг. 2 представлены линии тока при значении $C/k\psi_1 = 7$.

Поступила 25 II 1961 г.

ЛИТЕРАТУРА

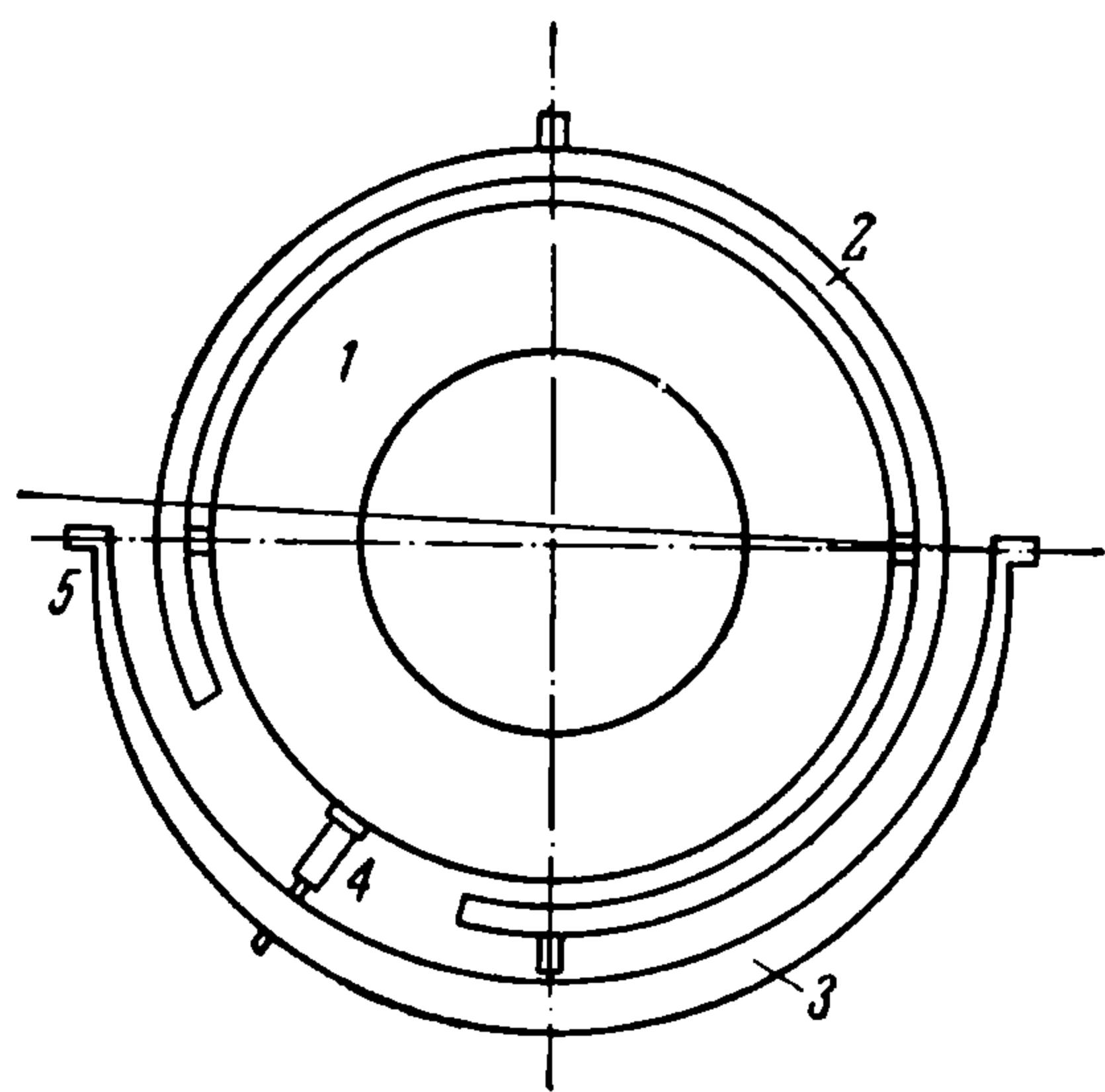
1. Б о с т а н д ж и я н С. А. Однородное винтовое движение в конусе. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1,
2. В а с и л ь е в О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат, М.—Л., 1958.
3. М у р а д я н Р. М. Асимптотические формулы для обобщенных функций Лежандра и Гегенбауэра. ДАН СССР, 1957, т. 115, № 5.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГИРОКОНИЧЕСКОГО КОМПАСА С ПЕРИОДОМ В СЕМНАДЦАТЬ ЧАСОВ

Е. Н. Токарь

(Москва)

Известно, что все существующие гироскопические компасы обладают двумя возможными положениями равновесия. Первому положению равновесия, если пренебречь скоростными девиациями и девиациями затухания, соответствует ориентация вектора кинетического момента гироскопической системы на север. Второму положению равновесия соответствует, в тех же предположениях, ориентация вектора кинетического момента на юг. Первое положение равновесия является основным рабочим положением гироскопа. Это положение равновесия всегда устойчиво. Второе положение равновесия для всех существующих гироскопических компасов является неустойчивым.



Фиг. 1

Ниже показывается, что при изменении параметров гироскопического компаса, соответствующем значительному увеличению его собственного периода колебаний, у прибора могут быть обнаружены в общем случае четыре положения равновесия.

У гироскопического компаса, используемого в земных условиях, это явление наблюдается при значениях собственного периода колебаний около основного (северного) положения равновесия, превышающих 17 часов.