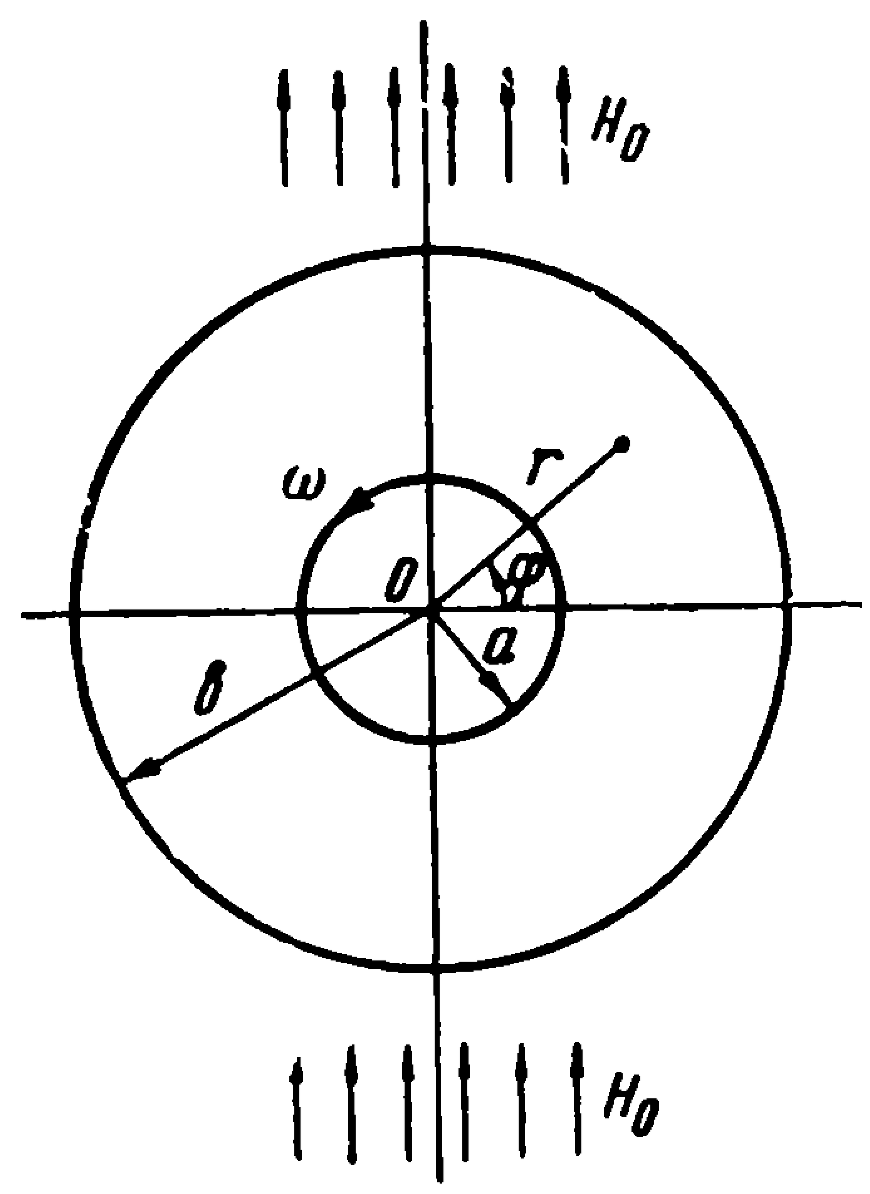
О ВРАЩЕНИИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Я. С. Уфлянд
(Ленинград)

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим установившееся движение вязкой проводящей несжимаемой жидкости в пространстве, заключенном между двумя бесконечными цилиндрами радиусов a и b $(a<b)$.

Предположим, что непроводящий внутренний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω, а внешний цилиндр неподвижен, причем имеется внешнее однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, перпендикулярное оси цилиндров (фиг. 1).

При указанных условиях в жидкости возникают электрические поля и токи, направленные по оси системы, а также пондеромоторные силы, действующие в плоскости, перпендикулярной оси. Наряду с этим, токи создают индуцированное магнитное поле в той же плоскости. Таким образом, в рассматриваемой задаче неизвестными величинами являются составляющие векторов скорости $\mathbf{v}(r, \varphi)$ и магнитного поля $\mathbf{H}(r,\varphi)$, расположенных в плоскости, перпендикулярной оси z (r, φ, z — цилиндрические координаты)



Фиг. 1

Заметим, что из уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \tag{1.1}$$

сразу вытекает, что $E = E_z = \text{const}$. В дальнейшем принимается $E_0 = 0$, что позволяет понизить порядок уравнений магнитной гидродинамики [1] и привести их к виду

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{H}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.2}$$

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \eta\Delta\mathbf{v} - \nabla p + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{H}, \qquad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}$$

где σ — проводимость жидкости, η — коэффициент вязкости, ρ — плотность, c — скорость света, $\mathbf{j}$ — вектор плотности электрического тока, p — давление.

Введем безразмерные величины

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{H_0}, \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \qquad q = \frac{p}{p_0}, \qquad v_0 = \omega a, \qquad p = \rho v_0^2 \tag{1.3}$$

$$R = \frac{\rho}{\eta}v_0 a, \qquad R_m = \frac{4\pi\sigma}{c^2}v_0 a, \qquad M = \frac{H_0 a}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$$

Здесь R — число Рейнольдса, R_m — магнитное число Рейнольдса, M — число Гартмана. Используя соотношение

$$\mathbf{j}\times\mathbf{H} = \frac{\sigma}{c}[(\mathbf{vH})\mathbf{H} - H^2\mathbf{v}]$$

уравнения (1.2) можно привести к виду

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{h} = R_m\mathbf{u}\times\mathbf{h}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{h} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \\ \Delta\mathbf{u} = R[(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla q] + M^2[h^2\mathbf{u} - (\mathbf{uh})\mathbf{h}]\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь дифференциальные операции производятся по безразмерной переменной $x = r/a$, меняющейся в пределах $1 \leqslant x \leqslant \lambda = b/a$.

Система (1.4) содержит четыре неизвестные функции $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$, $h_r(r, \varphi)$, $h_\varphi(r, \varphi)$ и требует для своей разрешимости восьми граничных условий.

Четыре условия, связанные с прилипанием жидкости к стенкам, очевидны и имеют вид

$$u_r|_{x=1} = u_r|_{x=\lambda} = u_\varphi|_{x=\lambda} = 0, \qquad u_\varphi|_{x=1} = 1 \tag{1.5}$$

Для получения остальных краевых условий следует разрешить уравнения электродинамики

$$\operatorname{rot}\mathbf{h} = \operatorname{div}\mathbf{h} = 0 \tag{1.6}$$

в областях $x<1$ и $x>\lambda$ и поставить условия непрерывности

$$h_r=h_r^{(a)},\qquad h_\varphi=h_\varphi^{(a)}\quad \text{при } x=1,\quad h_r=h_r^{(b)},\qquad h_\varphi=h_\varphi^{(b)}\quad \text{при } x=\lambda \tag{1.7}$$

Здесь $h^{(a)}$ и $h^{(b)}$ — магнитные поля в областях $r<a$ и $r>b$ соответственно. Наконец, необходимо потребовать, чтобы вектор $h^{(a)}$ оставался ограниченным при $r\to 0$, а вектор $\mathbf{h}^{(b)}$ при $r\to\infty$ имел составляющие $h_r^{(b)}=\sin\varphi$, $h_\varphi^{(b)}=\cos\varphi$, соответствующие заданному однородному полю.

2. Приближенное решение при малых числах Рейнольдса и Гартмана. Будем предполагать, что параметры R, R_m, M^2—малые величины одного и того же порядка. Это будет иметь место, например, в случае очень вязкой, но слабо проводящей жидкости, и достаточно сильного поля H_0. Положим

$$R_m=\varepsilon,\qquad R=\alpha\varepsilon,\qquad M^2=\beta\varepsilon \tag{2.1}$$

где ε — малая величина, α и β — конечные величины.

Будем разыскивать вектора $\mathbf{h}$ и $\mathbf{u}$, а также величину q в виде разложений

$$\mathbf{h}=\mathbf{h}_0+\varepsilon\mathbf{h}_1+\ldots,\qquad \mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\varepsilon\mathbf{u}_1+\ldots,\qquad q=q_0+\varepsilon q_1+\ldots \tag{2.2}$$

Очевидно, что нулевое приближение для магнитного поля будет

$$h_{0r}\equiv\sin\varphi,\qquad h_{0\varphi}=\cos\varphi \tag{2.3}$$

во всем пространстве. Далее, из уравнений

$$(\Delta_0\mathbf{u})_r=\Delta u_{0r}-\frac{u_{0r}}{x^2}-\frac{2}{x^2}\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial\varphi}=0,\quad (\Delta\mathbf{u}_0)_\varphi=\Delta u_{0\varphi}-\frac{u_{0\varphi}}{x^2}+\frac{2}{x^2}\frac{\partial u_{0r}}{\partial\varphi}=0 \tag{2.4}$$

вытекает нулевое приближение для скорости

$$u_{0r}\equiv 0,\qquad u_{0\varphi}=\frac{\lambda^2-x^2}{x(\lambda^2-1)} \tag{2.5}$$

удовлетворяющее всем граничным условиям и соответствующее чисто гидродинамическому режиму. Переходим к нахождению следующего приближения.

Чтобы определить в первом приближении влияние потока на магнитное поле, надо решить уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}_1=\mathbf{u}_0\times\mathbf{h}_0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{h}_1=0 \tag{2.6}$$

или в проекциях

$$\frac{\partial}{\partial x}(xh_{1r})+\frac{\partial h_{1\varphi}}{\partial\varphi}=0,\qquad \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(xh_{1\varphi})-\frac{1}{x}\frac{\partial h_{1r}}{\partial\varphi}=\frac{x^2-\lambda^2}{x(\lambda^2-1)}\sin\varphi \tag{2.7}$$

Полагая

$$h_{1r}=A(x)\frac{\cos\varphi}{1-\lambda^2},\qquad h_{1\varphi}=B(x)\frac{\sin\varphi}{1-\lambda^2} \tag{2.8}$$

находим из (2.7)

$$A(x)=\frac{x^2}{8}-\frac{\lambda^2}{2}\ln x+\frac{C}{x^2}+D,\qquad B(x)=-\frac{3x^2}{8}+\frac{\lambda^2}{2}\ln x+\frac{C}{x^2}-D \tag{2.9}$$

Для определения постоянных C и D используем решения однородной системы (2.7) в областях $x<1$ и $x>\lambda$

$$h_{1r}^{(a)}=D^{(a)}\frac{\cos\varphi}{1-\lambda^2},\quad h_{1\varphi}^{(a)}=-D^{(a)}\frac{\sin\varphi}{1-\lambda^2},\qquad h_{1r}^{(b)}=\frac{C^{(b)}}{x^2}\frac{\cos\varphi}{1-\lambda^2},\quad h_{1\varphi}^{(b)}=\frac{C^{(b)}}{x^2}\frac{\sin\varphi}{1-\lambda^2}$$

и найдем C, D, $C^{(b)}$ и $D^{(a)}$ из условий сопряжения (1.7). (2.10)

В результате вычислений получим

$$A(x)=\frac{1}{8}\left[x^2+\frac{1-2\lambda^2}{x^2}\right]+\frac{\lambda^2}{2}\ln\frac{\lambda}{x},\quad B(x)=-\frac{1}{8}\left[3x^2+\frac{2\lambda^2-1}{x^2}\right]+\frac{\lambda^2}{2}\left(1-\ln\frac{\lambda}{x}\right) \tag{2.11}$$

чем и характеризуется первое приближение для магнитного поля.

Обратимся теперь к определению в первом приближении влияния магнитного поля на движение жидкости.

Функции $u_{1r}(x, \varphi)$, $u_{1\varphi}(x, \varphi)$ и $q_0(x, \varphi)$ должны быть найдены из системы дифференциальных уравнений

$$\Delta u_{1r} - \frac{u_{1r}}{x^3} - \frac{2}{x^2}\frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial \varphi} = -\alpha\left(\frac{u_{0\varphi}^2}{x} - \frac{\partial q_0}{\partial x}\right) - \frac{\beta}{2}u_{0\varphi}\sin 2\varphi$$

$$\Delta u_{1\varphi} - \frac{u_{1\varphi}}{x^2} + \frac{2}{x^2}\frac{\partial u_{1r}}{\partial \varphi} = \frac{\alpha}{x}\frac{\partial q_0}{\partial \varphi} + \frac{3}{2}u_{0\varphi}(1 - \cos 2\varphi)\quad \frac{\partial}{\partial x}(x u_{1r}) + \frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \tag{2.12}$$

при граничных условиях

$$u_{1r} = u_{1\varphi} = 0 \qquad \text{при } x = 1 \text{ и } x = \lambda \tag{2.13}$$

Решение системы (2.12) будем искать в виде

$$u_{1r} = \beta R(x, \varphi), \quad u_{1\varphi} = \beta\psi(x) + \beta\Phi(x, \varphi), \quad q_0 = \chi(x) + \frac{\beta}{\alpha}f(x, \varphi) \tag{2.14}$$

Функции $\psi(x)$, $R(x, \varphi)$, $\Phi(x, \varphi)$ и $f(x, \varphi)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{x}(x\psi')' - \frac{\psi}{x^2} = \frac{u_{0\varphi}}{2} \tag{2.15}$$

$$\Delta R - \frac{R}{x^2} - \frac{2}{x^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{u_{0\varphi}}{2}\sin 2\varphi,$$

$$\Delta \Phi - \frac{\Phi}{x^2} + \frac{2}{x^2}\frac{\partial R}{\partial \varphi} = \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{u_{0\varphi}}{2}\cos 2\varphi, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(xR) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \tag{2.16}$$

Функции ψ, R и Φ должны обращаться в нуль при $x = 1$ и $\varkappa = \lambda$, а функция $\chi(x)$ определяется формулой:

$$\chi'(x) = \frac{u_{0\varphi}^2}{x} \tag{2.17}$$

и, очевидно, представляет собой часть давления, уравновешивающая центробежные силы, возникающие от скорости $u_{0\varphi}$.

Функция $\psi(x)$ находится без труда и имеет вид

$$\psi(x) = \frac{1}{16x(\lambda^2 - 1)^2}\{4\lambda^2[(\lambda^2 - 1)x^2\ln x - (x^2 - 1)\lambda^2\ln\lambda] + (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - x^2)(x^2 - 1)\} \tag{2.18}$$

Дифференцируя первое из уравнений (2.16) по φ, умножая второе уравнение (2.16) на x и дифференцируя по x, вычитая из первого результата второй и присоединяя последнее уравнение (2.16), получаем систему двух уравнений с неизвестными функциями R и Φ. Если положить

$$R = y(x)\sin 2\varphi, \qquad \Phi = Z(x)\cos 2\varphi \tag{2.19}$$

выделить частное решение получаемой при этом системы обыкновенных дифференциальных уравнений и исключить Z, то для функции $t = xy$ получается уравнение

$$x^3 t^{\mathrm{IV}} + 2x^2 t''' - 9xt'' + 9t' = 0 \tag{2.20}$$

с общим интегралом

$$t = Ax^2 + Bx^4 + \frac{C}{x^2} + D \tag{2.21}$$

Определение постоянных из граничных условий приводит после выкладок к следующим формулам:

$$y(x) = \frac{\lambda^2}{16x^3(\lambda^2 - 1)^4}\{2\lambda^2(x^2 - 1)^2[\lambda^2(\lambda^2 + 1) - 2x^2]\ln\lambda - 2x^4(\lambda^2 - 1)^3\ln x - (\lambda^2 - 1)(x^2 - 1)(\lambda^2 - x^2)[x^2(\lambda^2 + 1) - 2\lambda^2]\} \tag{2.22}$$

$$Z(x) = \frac{\lambda^2}{8x^3(\lambda^2 - 1)^4}\{\lambda^2(x^2 - 1)[\lambda^2(\lambda^2 + 1)(x^2 + 1) - 4x^4]\ln\lambda - x^4(\lambda^2 - 1)^3\ln x - (\lambda^2 - 1)(x^2 - 1)(\lambda^2 - x^2)[\lambda^2(x^2 + 1) + x^2]\} \tag{2.23}$$

Остается из уравнений (2.16) определить составляющие $\partial f / \partial x$ и $x^{-1} \partial f / \partial \varphi$ градиента давления, чем и заканчивается решение задачи в первом приближении. (для давления при этом получается только нулевое приближение).

Аналогичным образом можно попытаться найти следующие приближения, однако, фактическое проведение выкладок оказывается достаточно сложным даже для второго приближения.

3. Вычисление вращающего момента. Используем полученные результаты для вычисления вращающего момента, который необходимо приложить к цилиндру, чтобы преодолеть силы вязкого трения и создать равномерное вращение.

Пользуясь выражением для напряжения трения F_a на поверхности вращающегося цилиндра

$$F_a = -\eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)_{r=a} \tag{3.1}$$

находим

$$\frac{F_a}{F_a^{(0)}} = 1 - \frac{M^2}{2\lambda^2} (\lambda^2 - 1) [\psi'(1) + Z'(1) \cos 2\varphi] \tag{3.2}$$

Здесь

$$F_a^{(0)} = \frac{\eta v_0}{a} \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1}, \qquad \psi'(1) = \frac{(3\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1) - 4\lambda^2 \ln \lambda}{8(\lambda^2 - 1)^2} \tag{3.3}$$

$$Z'(1) = \lambda^2 \frac{4\lambda^2(\lambda^2 + 2) \ln \lambda - (\lambda^2 - 1)(5\lambda^2 + 1)}{8(\lambda^2 - 1)^3}$$

причем $F_a^{(0)}$ есть напряжение трения при $r = a$ в соответствующей задаче обычной гидродинамики.

Можно показать, что для всех $\lambda > 1$ величина $\psi'(1) + z'(1) < 0$, причем $z'(1) > 0$. Таким образом, магнитогидродинамические эффекты в данной задаче всегда вызывают увеличение трения на вращающейся поверхности, как и должно быть, так как в рассмотренном случае отсутствует электрическое поле.

Пользуясь (3.2), получаем формулу для вращающего момента:

$$\frac{L_a}{L_a^{(0)}} = 1 + M^2 f_a(\lambda), \qquad L_a^{(0)} = 4\pi\eta v_0 a \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \tag{3.4}$$

причем функция

$$f_a(\lambda) = \frac{4\lambda^4 \ln \lambda - (3\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1)}{16\lambda^2(\lambda^2 - 1)} \tag{3.5}$$

для всех $\lambda > 1$ остается положительной.

Приводим также формулы для напряжения и момента трения на неподвижной поверхности $r = b$

$$\begin{gathered} \frac{F_b}{F_b^{(0)}} = 1 - \frac{M^2}{2} (\lambda^2 - 1) [\psi'(\lambda) + z'(\lambda) \cos 2\varphi], \qquad F_b^{(0)} = -\frac{\eta v_0}{a} \frac{2}{\lambda^2 - 1} \\ \frac{L_b}{L_b^{(0)}} = 1 - M^2 f_b(\lambda), \qquad f_b(\lambda) = \frac{\lambda^4 - 1 - 4\lambda^2 \ln \lambda}{16(\lambda^2 - 1)}, \qquad L_b^{(0)} = -L_a^{(0)} \end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь величины $z'(\lambda)$, $\psi'(\lambda) - z'(\lambda)$ и $f_b(\lambda)$ будут положительными при всех значениях $\lambda > 1$. Это означает, что на неподвижной поверхности наличие магнитного поля вызывает уменьшение трения.

В заключение автор благодарит Г. А. Любимова и М. И. Когана за ценные замечания, высказанные при рецензировании данной работы.

Поступила 15 X 1960

Физико-технический институт
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГТТИ, 1957.