Таблица 2

ρ	$-\sigma_r/2k$	$\sigma_\theta/2k$	v	h/h_0
0.280	0.500	0.500	0.280	3.84
0.290	0.772	0.228	0.268	2.39
0.300	0.855	0.145	0.254	2.06
0.310	0.910	0.090	0.240	1.87
0.320	0.948	0.052	0.227	1.73
0.330	0.973	0.027	0.214	1.64
0.340	0.988	0.012	0.202	1.56
0.350	0.997	0.003	0.191	1.50
0.360	1.000	0.000	0.181	1.46
0.361	1.000	0.000	0.180	1.45

толщиной h вместе с уравнением (4) дают

$$\frac{dh}{d\rho}+\frac{h}{\rho}=0, \qquad \frac{v-\rho}{h}\frac{dh}{d\rho}+\frac{dv}{d\rho}+\frac{v}{\rho}=0$$

Учитывая условие $v=0$, $h=h_0$ при $\rho=\beta$, можно найти

$$v=\beta-\rho, \qquad h=h_0\frac{\beta}{\rho}$$

Легко видеть, что

$$0\leqslant\varepsilon_\theta\leqslant-\varepsilon_r \quad \text{или} \quad 0\leqslant\beta/\rho-1\leqslant1$$

так, что

$$\beta/2\leqslant\rho\leqslant\beta$$

Сравнение этого решения с предыдущими решениями устанавливает весьма резкое расхождение компонент напряжения σ_r и σ_θ, а также значительное расхождение скоростей v и толщин h.

Поступила 27 XI 1960 Институт механики Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

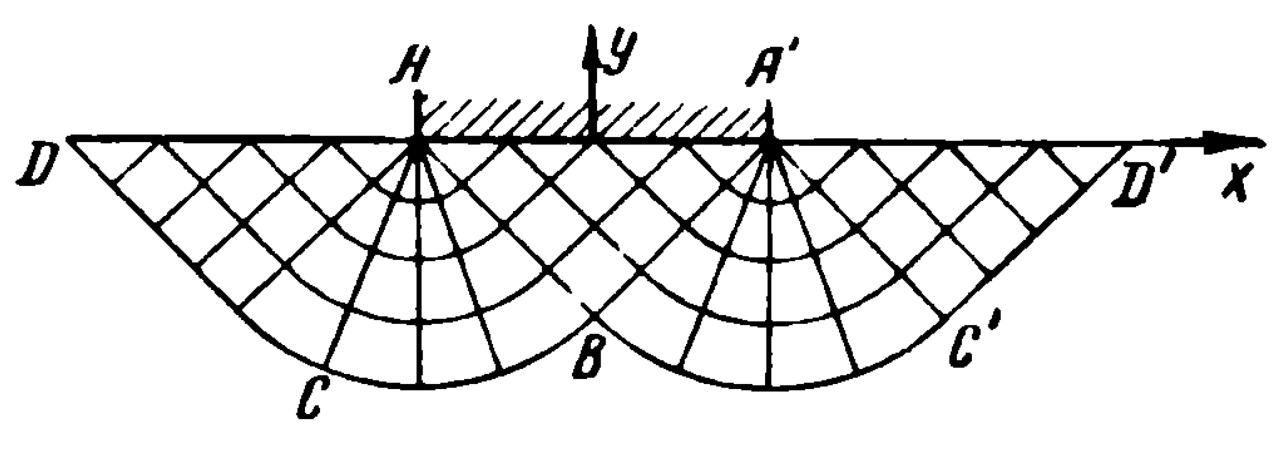
1. Hill R. Plastic distortion of non-uniform sheets. The philosophical magazine, 1949, Vol. 40, No 309.
2. Prager W. On the use of singular yield conditions and associated flow rules. Journal of applied mechanics, 1953, Vol. 20, No 3.

О ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ ВДАВЛИВАНИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА В ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Г. И. Быковцев

(Воронеж)

Задача о вдавливании плоского штампа в пластическое полупространство впервые была рассмотрена Прандтлем [1]; Хилл построил второе решение этой задачи 2]; позднее Прагер [3] указал на возможности построения решений, являющихся комбинацией решений Хилла и Прандтля. Ниже рассмотрены другие возможности построения поля скоростей перемещений.



Фиг. 1

В треугольнике ABA' (фиг. 1) характеристики прямолинейные, и соотношения Гейрингер [4] принимают вид:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha}=0, \qquad \frac{\partial v_\beta}{\partial\beta}=0$$

Отсюда

$$v_\alpha=f(\beta), \qquad v_\beta=\varphi(\alpha)$$

где v_α — составляющая скорости вдоль линий $\beta=\text{const}$, а v_β — составляющая скорости вдоль линий $\alpha=\text{const}$.

В области $ABCD$ составляющая скорости $v_\beta = 0$, а составляющая v_α остается постоянной вдоль линий $\alpha = \text{const}$, при этом уравнения Гейрингер выполняются тождественно. Аналогично строится решение в области $A'B'C'D'$.

На линии AA' зададим одну из компонент скоростей, например v_α, по произвольному закону. Предполагая, что штамп движется вниз как жесткое целое, положим:

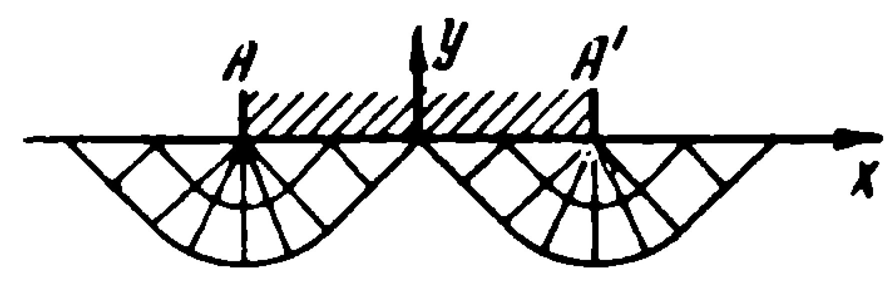
$$v_y = -1 \quad \text{на } AA' \tag{1.1}$$

Теперь из (1.1) на AA' определится вторая составляющая скорости $v_\beta = \sqrt{2} \times \times (1 - v_\alpha)$. Тем самым значения компонент скоростей v_α и v_β будут полностью определены в пластической области.

Решение Хилла (фиг. 2) соответствует следующему распределению скоростей вдоль AA'

$$v_\alpha = \sqrt{2}, \qquad v_\beta = 0 \quad \text{при } x < 0$$

$$v_\alpha = 0, \qquad v_\beta = \sqrt{2} \quad \text{при } x > 0$$



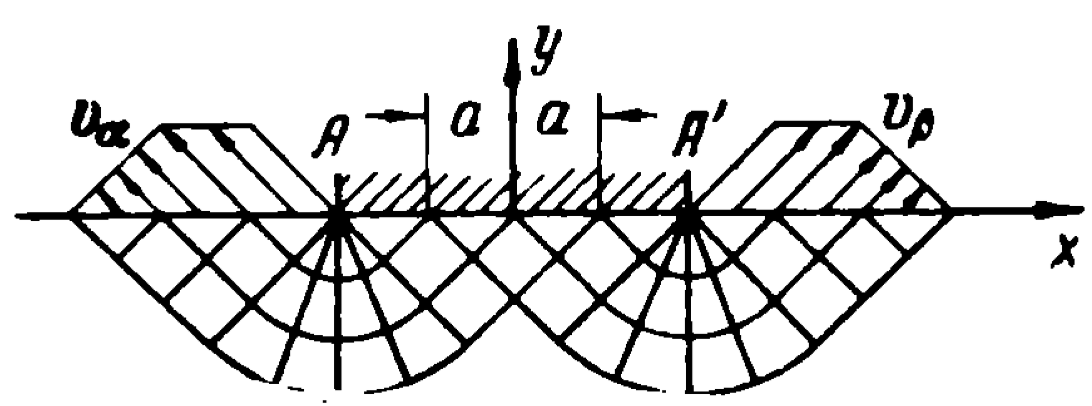
Фиг. 2

В точке $x = 0$ скорости не определены. В решении Прандтля вдоль AA'

$$v_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad v_\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Все ранее построенные решения отличаются друг от друга предположениями о расположении границы между жесткой и пластической областями. Однако за исключением решения Хилла поля скоростей не определяются предположением о границе жесткой и пластической области.

Возможность такого построения для наглядности продемонстрируем на комбинированном решении, которое получим при следующем распределении скоростей на границе AA' (фиг. 3).



Фиг. 3

$$v_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad v_\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{при } -a \leqslant x \leqslant a$$

$$v_\alpha = \sqrt{2}, \qquad v_\beta = 0 \qquad \text{при } x < -a$$

$$v_\alpha = 0, \qquad v_\beta = \sqrt{2} \qquad \text{при } x > a$$

Возможны и другие решения. Возможное распределение скоростей в пластической области получим, например, положив на AA'

$$v_\alpha = \frac{\sqrt{2}\,(a-x)}{2a}, \qquad v_\beta = \frac{\sqrt{2}\,(a+x)}{2a} \qquad \text{при } -a \leqslant x \leqslant a$$

$$v_\alpha = \sqrt{2}, \quad v_\beta = 0 \quad \text{при } x < -a, \qquad v_\alpha = 0, \quad v_\beta = \sqrt{2} \quad \text{при } x > a$$

В решении Хилла область многозначности поля скоростей стянута в точку $x = 0$ (см. фиг. 2).

Отметим, что при бесконечно малом искривлении свободной границы построение решения Прандтля невозможно. Действительно, возмущения сетки линий скольжения в треугольнике ABA' тогда будут определяться, с одной стороны, возмущениями линии AD, с другой — возмущениями $A'D'$. Вообще говоря, возмущения характеристик в треугольнике ABA' будут различны, и построение единой сетки невозможно. Решение Хилла можно построить при любых возмущениях границы.

Поступила 26 XII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. P r a n d t l L. Über die Harte plastischer Körper. Gotinger Nachr., math. - phys. Kl. 1920.
2. H i l l R. Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, 1950. Русск. перевод, Гостехтеоретиздат, 1956.
3. P r a g e r W., H o d g e. P h. G. Theory of Perfectly Plastic Solids, N. Y. — London, 1951. Русск. перевод, ИИЛ, 1956.
4. G e i r i n g e r H. Fondements mathématiques de la theorie des corps plastiques isotropes. Mem. Sci. math., Paris, 1937.