

## РАСШИРЕНИЕ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

В. В. Соколовский

(Москва)

Настоящая работа посвящена задаче о расширении кругового отверстия в бесконечной жестко-пластической пластинке с учетом ее утолщения вблизи контура. Эта задача была поставлена и решена Д. Тейлором и Р. Хиллом [1] при условии пластичности Х. Треска.

Разберем задачу о расширении кругового отверстия, применяя известное условие пластичности

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 3k^2$$

а также соответствующие зависимости между компонентами напряжения и компонентами скорости деформации.

Здесь нужно различать три кольцевые зоны, а именно: пластическую зону  $a \leq r \leq b$  с переменной толщиной пластинки  $h$ , пластическую зону  $b \leq r \leq c$  с постоянной толщиной пластинки  $h_0$  и жесткую зону  $c \leq r \leq \infty$  с постоянной толщиной  $h_0$ , которые показаны на фиг. 1.

Дифференциальное уравнение равновесия пластинки толщины  $h$ , как известно, имеет вид

$$\frac{\partial (h\sigma_r)}{\partial r} + \frac{h(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0$$

Обычная зависимость между компонентами напряжения и компонентами скорости деформации

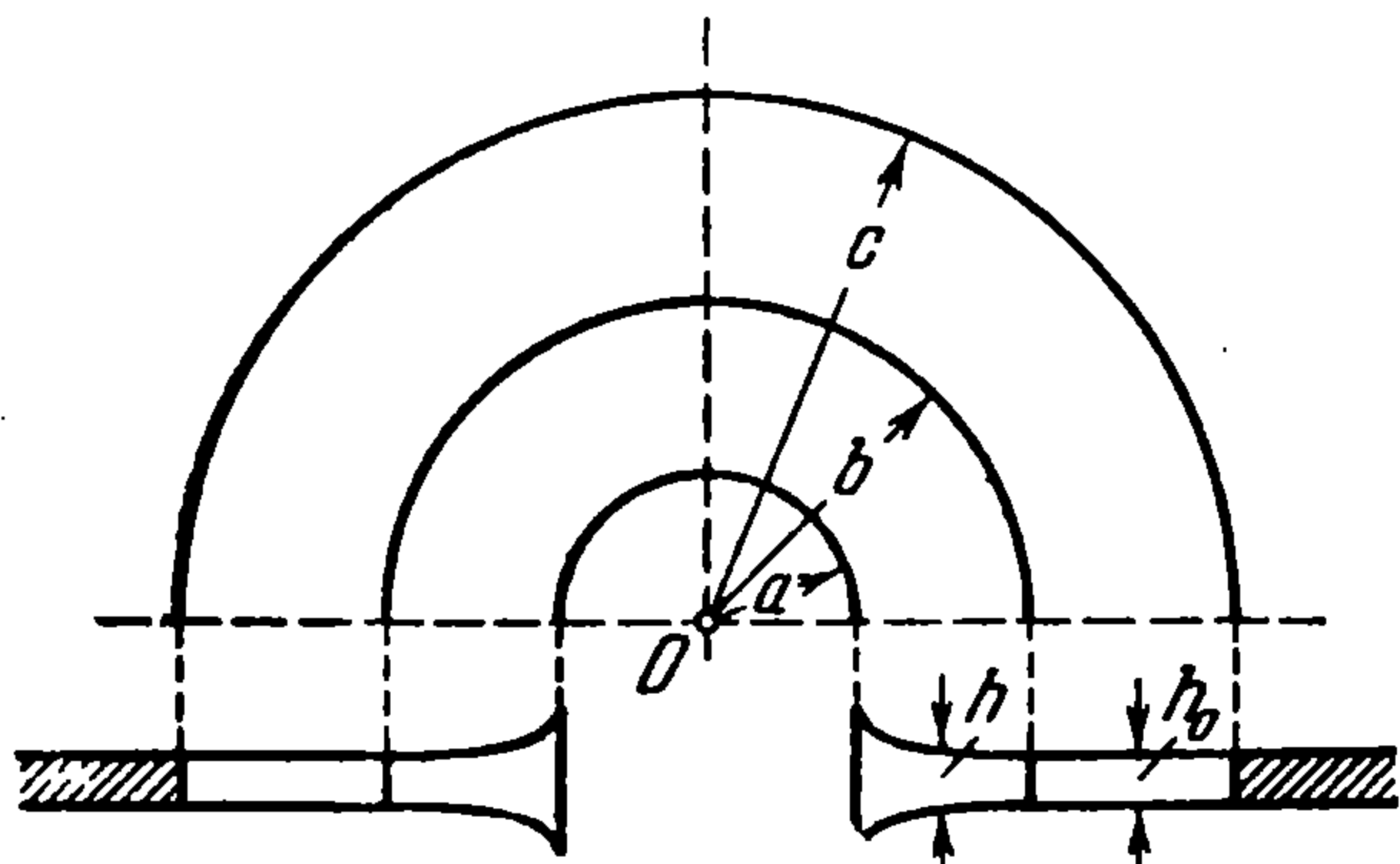
$$\frac{\epsilon_r}{2\sigma_r - \sigma_\theta} = \frac{\epsilon_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r}$$

сразу же дает

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r} \frac{v}{r}$$

Условие несжимаемости может быть представлено так:

$$\frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial c} + v \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0$$



Фиг. 1

причем параметр  $c$  определяет шкалу времени. Введем следующие обозначения

$$\alpha = a/c, \quad \beta = b/c, \quad \rho = r/c$$

и будем считать, что все искомые величины являются лишь функциями от  $\rho$ .

Рассмотрим сначала кольцевую зону  $\alpha \leq \rho \leq \beta$ , в которой толщина пластинки переменна, и исследуем основные уравнения, описывающие пластическое течение в этой зоне.

Дифференциальное уравнение равновесия должно быть переписано следующим образом:

$$\frac{d(h\sigma_r)}{d\rho} + \frac{h(\sigma_r - \sigma_\theta)}{\rho} = 0 \tag{1}$$

а условие пластичности может быть представлено так:

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 3k^2 \tag{2}$$

Уравнение, связывающее радиальную скорость с компонентами напряжения, принимает вид

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r} \frac{v}{\rho} \tag{3}$$

а условие несжимаемости будет

$$\frac{v - \rho \frac{dh}{d\rho}}{h} + \frac{dv}{d\rho} + \frac{v}{\rho} = 0 \tag{4}$$

Выразим компоненты напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  через новое переменное  $\varphi$  при помощи соотношений

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = -2k \sin \left( \varphi \pm \frac{\pi}{6} \right)$$

и введем обозначения

$$w = \frac{v}{\rho}, \quad \psi = \varphi + \frac{\pi}{6}$$

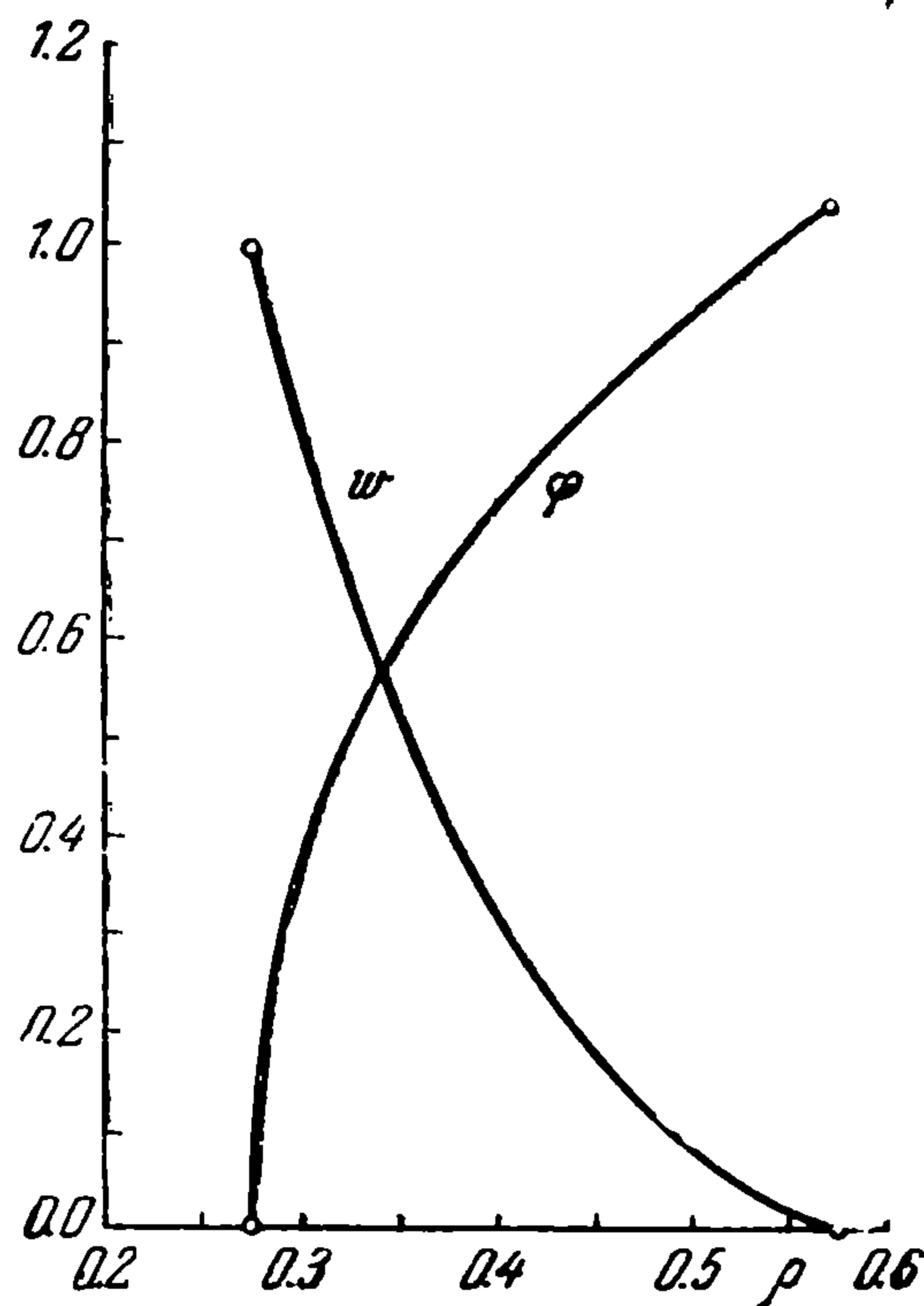
Уравнения (1) и (2) вместе с уравнениями (3) и (4) устанавливают, что

$$\rho \frac{d\varphi}{d\rho} = - \frac{\sqrt{3} w - 2 \cos \varphi \cos \psi}{2 (w - 1) \cos^2 \psi} \quad (5)$$

$$\rho \frac{dw}{d\rho} = - \frac{\sqrt{3} \cos \varphi}{\cos \psi} w$$

а также, что

$$\frac{\rho}{h} \frac{dh}{d\rho} = \frac{w \sin \varphi}{(w - 1) \cos \psi} \quad (6)$$



Фиг. 2

Уравнения (5), после исключения  $w$ , дают одно дифференциальное уравнение второго порядка, которое путем замены переменных

$$\rho \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\operatorname{tg}^2 \psi (\sin \psi)^2}{\omega (\sin \varphi)^2} \exp(\sqrt{3} \varphi), \quad \Phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \right)^3 \exp(-\sqrt{3} \varphi)$$

может быть сведено к уравнению Н. Абеля. Окончательно будем иметь

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\sin^3 \varphi \sin^3 \psi} \Phi^2 \omega^2 + \frac{2 (1 + \cos^2 \varphi) \cos^2 \psi - \cos \varphi \sin \psi}{\sin^2 \varphi \sin^2 \psi} \Phi \omega$$

В окрестности точек  $\rho = \alpha$  и  $\rho = \beta$  можно вывести приближенные интегралы уравнений (5) и (6). Вблизи точки  $\rho = \alpha$ ,  $\varphi = 0$  нетрудно получить

$$\varphi = C \xi^{1/3}, \quad w = 1 - 2\xi, \quad \frac{h}{h_0} = D (1 - \sqrt{3} C \xi^{1/3}) \quad (7)$$

а вблизи точки  $\rho = \beta$ ,  $\varphi = \pi/3$  легко найти

$$\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \eta + \frac{1}{4} \eta^2 \right), \quad w = -\frac{1}{2} \eta + \frac{11}{8} \eta^2, \quad \frac{h}{h_0} = 1 - \frac{1}{2} \eta + \frac{5}{8} \eta^2 \quad (8)$$

Здесь

$$\xi = \frac{\rho}{\alpha} - 1, \quad \eta = \frac{\rho}{\beta} - 1$$

Дифференциальные уравнения (5) и (6) дают возможность построить функции  $\varphi$ ,  $w$  и  $h$  внутри интервала  $\alpha \leq \rho \leq \beta$ , а приближенные интегралы (7) и (8) позволяют получить те же функции  $\varphi$ ,  $w$  и  $h$  вблизи точек  $\rho = \alpha$  и  $\rho = \beta$ .

Интегральные кривые функций  $\varphi$  и  $w$  изображены на фиг. 2. Значения  $\alpha$  и  $C$ ,  $D$  будут  $\alpha = 0.276$ ,  $C = 0.78$ ,  $D = 3.61$ , а значение  $h$  в точке  $\rho = \alpha$  таково:  $h = 3.61 h_0$ .

Следует, конечно, иметь в виду, что вблизи контура отверстия, где толщина  $h$  изменяется весьма резко, изложенная теория не может претендовать на большую точность.

Обратимся теперь к кольцевой зоне  $\beta \leq \rho \leq 1$ , в которой толщина пластинки постоянна. Очевидно, что здесь имеет место известное решение, удовлетворяющее условию  $\sigma_r + \sigma_\theta = 0$  или  $\varphi = 0$  при  $\rho = 1$ , а именно

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} \exp \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \varphi \right), \quad w = v = 0, \quad h = h_0$$

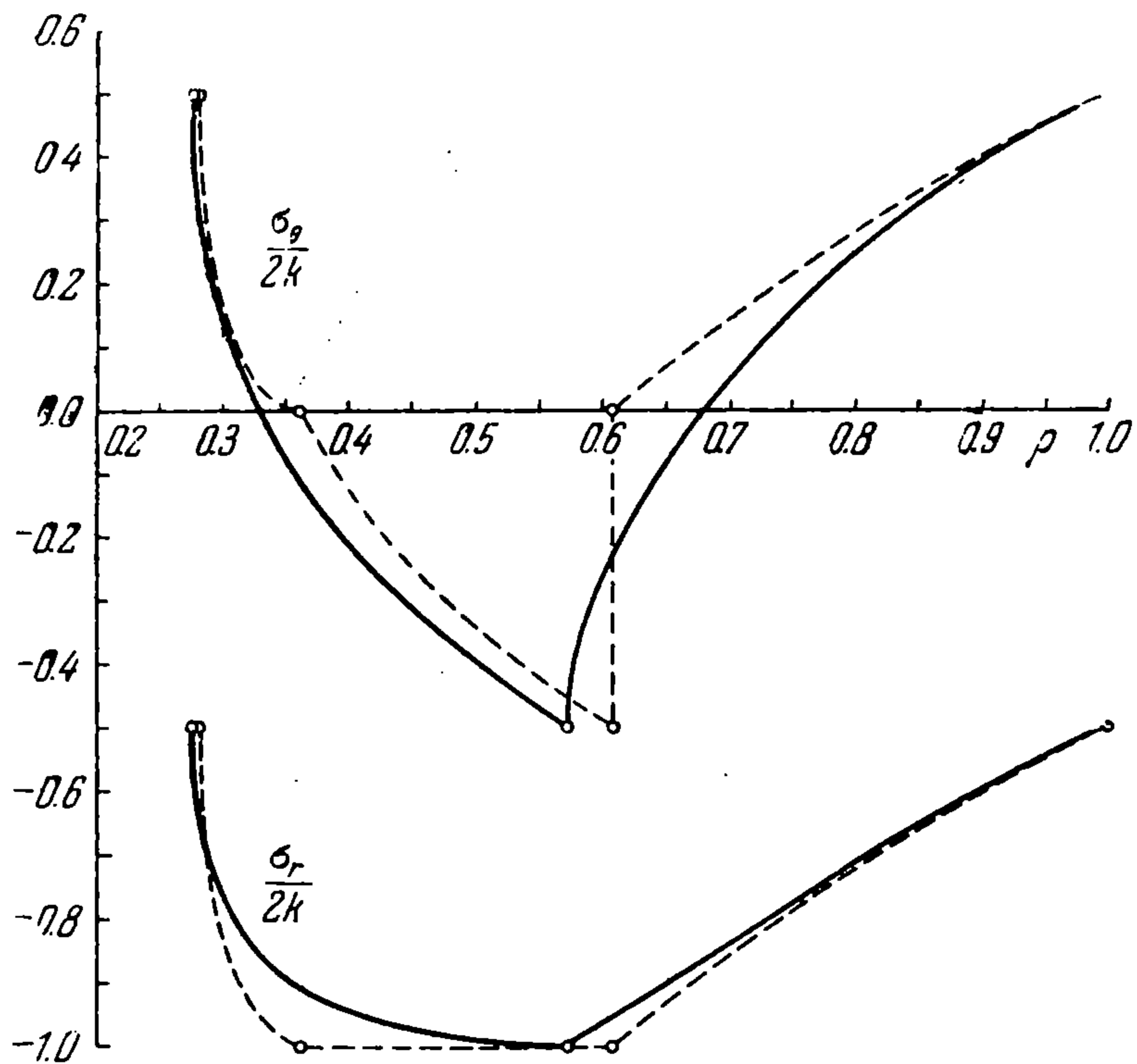
причем  $\varphi$  изменяется в интервале  $0 \leq \varphi \leq \pi/3$ .

Значение  $\rho = \beta$ , отвечающее  $\varphi = \pi/3$ , равно

$$\beta = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) = 0.571$$

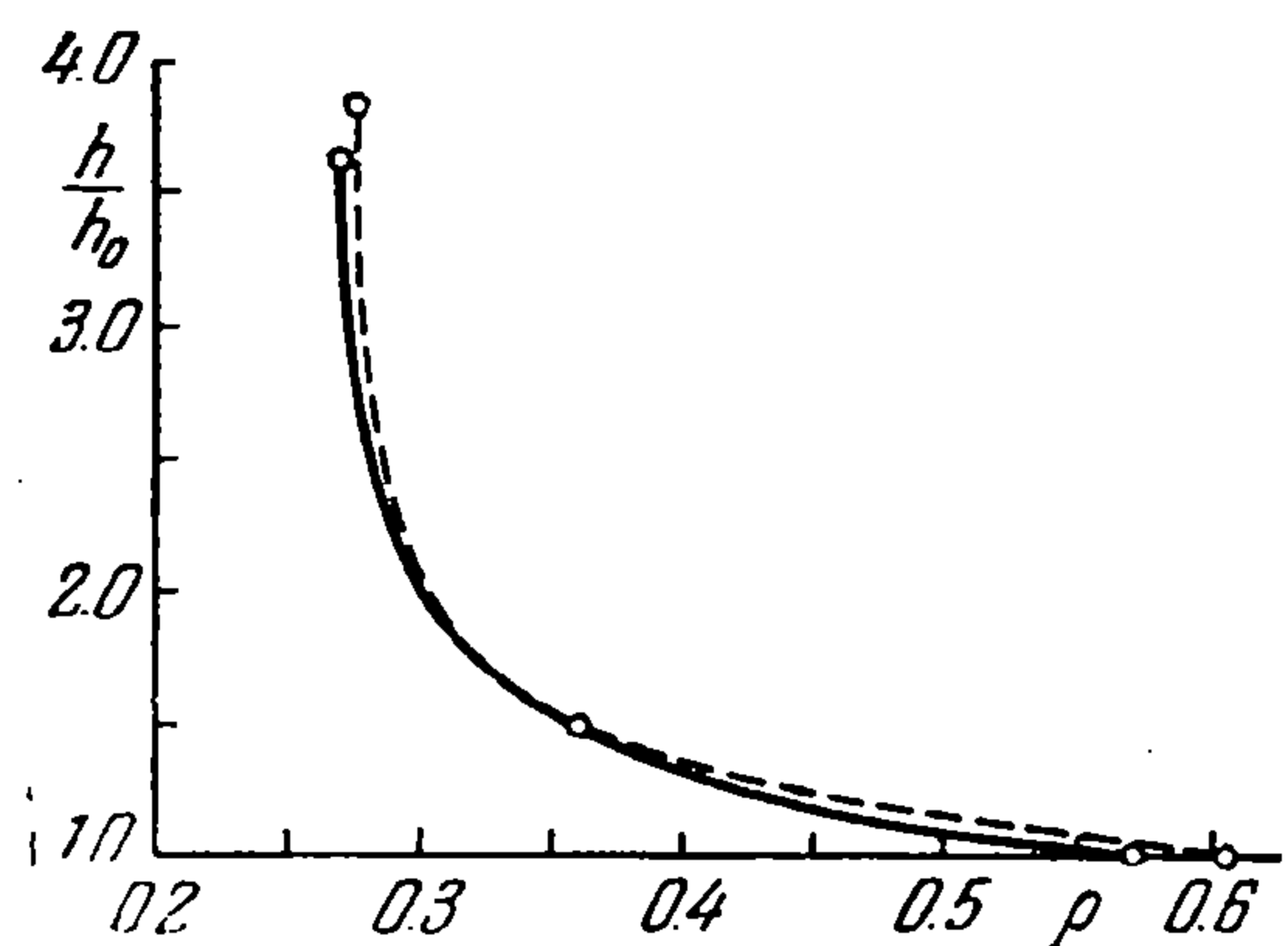
Результаты вычислений, проведенных путем приближенного интегрирования уравнений (5) и (6), помещены в табл. 1. Они относятся ко всей кольцевой зоне  $\alpha \leq \rho \leq \beta$ , в которой толщина пластинки переменна.

Графики компонент напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в зависимости от  $\rho$  изображены сплош-



Фиг. 3

ными линиями на фиг. 3, а график толщины  $h$  показан сплошной линией на фиг. 4. Обе компоненты  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  во всем интервале  $\alpha \leq \rho \leq 1$  непрерывны.



Фиг. 4

Разберем для сравнения ту же задачу о расширении кругового отверстия, используя условия пластичности

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \quad \sigma_r \sigma_\theta \leq 0, \quad \sigma_r = -2k, \quad \sigma_r \sigma_\theta \geq 0$$

а также обычные зависимости между компонентами напряжения и компонентами скорости деформации, как это было сделано Р. Хиллом.

Рассмотрим сначала кольцевую зону  $\alpha \leq \rho \leq \beta$ , в которой толщина пластинки переменна, и изучим основные уравнения, описывающие пластическое течение в той части зоны, где  $\sigma_r = -2k$ .

Уравнение (1) и условие пластичности  $\sigma_r = -2k$  вместе с уравнениями (3) и (4) устанавливают, что

$$\rho \frac{dw}{d\rho} = \frac{3(1-\sigma)}{2\sigma-1} w, \quad w = \frac{(2\sigma-1)(\sigma-1)}{2(\sigma^2-\sigma+1)}, \quad \sigma = -\frac{\sigma_\theta}{2k} \quad (9)$$

также, что

$$\frac{\rho}{h} \frac{dh}{d\rho} = \sigma - 1 \quad (10)$$

Уравнения (9), после исключения  $w$  дают простое уравнение

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{(2\sigma-1)(\sigma-1)}{\sigma^2-\sigma+1} \right] = -\frac{3(\sigma-1)^2}{\sigma^2-\sigma+1}$$

которое может быть проинтегрировано в замкнутой форме. Учитывая условие  $\sigma = 1/2$  при  $\rho = \beta$ , найдем

$$\rho = \beta \frac{\sqrt{\sigma^2-\sigma+1}}{\sqrt{3}(1-\sigma)} \exp \left[ \frac{1-2\sigma}{3(1-\sigma)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1-2\sigma}{\sqrt{3}} \right] \quad (11)$$

а затем получим

$$w = \frac{(2\sigma-1)(\sigma-1)}{2(\sigma^2-\sigma+1)}, \quad h = \frac{h_0}{[2(1-\sigma)]^{1/3}} \exp \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1-2\sigma}{\sqrt{3}} \right] \quad (12)$$

Таблица 1

$\rho$	$\varphi$	$w$	$-\sigma_r / 2k$	$\sigma_\theta / 2k$	$v$	$h/h_0$
0.276	0.000	1.000	0.500	0.500	0.276	3.61
0.280	0.188	0.970	0.653	0.329	0.272	2.67
0.290	0.309	0.871	0.739	0.213	0.253	2.26
0.300	0.384	0.820	0.788	0.140	0.246	2.04
0.310	0.442	0.752	0.822	0.081	0.233	1.89
0.320	0.491	0.688	0.849	0.033	0.220	1.77
0.330	0.534	0.629	0.871	-0.010	0.208	1.67
0.340	0.572	0.574	0.889	-0.048	0.195	1.59
0.350	0.606	0.524	0.904	-0.082	0.183	1.53
0.360	0.638	0.477	0.917	-0.114	0.172	1.47
0.370	0.667	0.433	0.929	-0.143	0.160	1.42
0.380	0.695	0.392	0.938	-0.170	0.149	1.37
0.390	0.721	0.355	0.947	-0.196	0.138	1.33
0.400	0.745	0.319	0.955	-0.220	0.128	1.30
0.410	0.768	0.287	0.961	-0.242	0.118	1.26
0.420	0.791	0.257	0.967	-0.264	0.108	1.24
0.430	0.812	0.229	0.972	-0.284	0.098	1.21
0.440	0.832	0.203	0.977	-0.303	0.089	1.18
0.450	0.851	0.179	0.981	-0.322	0.080	1.16
0.460	0.870	0.157	0.984	-0.340	0.072	1.14
0.470	0.888	0.136	0.987	-0.357	0.064	1.12
0.480	0.906	0.117	0.990	-0.373	0.056	1.10
0.490	0.923	0.100	0.992	-0.389	0.049	1.09
0.500	0.940	0.084	0.994	-0.405	0.042	1.07
0.510	0.958	0.068	0.996	-0.420	0.035	1.06
0.520	0.972	0.055	0.997	-0.433	0.029	1.05
0.530	0.986	0.043	0.998	-0.446	0.023	1.04
0.540	1.001	0.031	0.999	-0.459	0.017	1.03
0.550	1.016	0.020	1.000	-0.472	0.011	1.02
0.560	1.031	0.010	1.000	-0.486	0.006	1.01
0.570	1.046	0.001	1.000	-0.499	0.001	1.00
0.571	1.047	0.000	1.000	-0.500	0.000	1.00

Это решение справедливо, пока  $\sigma \geq 0$  или пока

$$\rho \geq \frac{\beta}{\sqrt{3}} \exp \left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) \right] = 0.3613$$

Обратимся теперь к кольцевой зоне  $\beta \leq \rho \leq 1$ , в которой толщина пластинки постоянна. Ясно, что здесь справедливо известное решение, удовлетворяющее условию  $\sigma_r + \sigma_\theta = 0$  при  $\rho = 1$ , а именно

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = 2k \left( \ln \rho \mp \frac{1}{2} \right), \quad w = v = 0, \quad h = h_0$$

Значение  $\rho = \beta$ , отвечающее  $\sigma_r = -2k$ ,  $\sigma_\theta = 0$ , равно

$$\beta = \exp \left( -\frac{1}{2} \right) = 0.607$$

Результаты вычислений, проведенных Р. Хиллом, помещены в табл. 2. Они относятся не ко всей кольцевой зоне  $\alpha \leq \rho \leq \beta$ , в которой толщина пластинки переменна, а лишь к той ее части, где  $\sigma_\theta - \sigma_r = 2k$ .

Графики компонент напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в зависимости от  $\rho$  изображены пунктирными линиями на фиг. 3, а график толщины  $h$  показан пунктирной линией на фиг. 4. Компонента  $\sigma_r$  непрерывна во всем интервале  $\alpha \leq \rho \leq 1$ , а компонента  $\sigma_\theta$  разрывна в точке  $\rho = \beta$ .

Сравнение сплошных и пунктирных линий на фиг. 3 и 4 показывает значительное расхождение компонент напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , а также некоторое расхождение толщин  $h$ .

В заключение напомним решение той же задачи при помощи условий пластичности Х. Треска и ассоциированного закона течения, полученное В. Прагером [2].

Уравнение (1) и условие  $\sigma_r = -2k$ ,  $\sigma_\theta = 0$  в пластической зоне с переменной

Таблица 2

$\rho$	$-\sigma_r / 2k$	$\sigma_\theta / 2k$	$v$	$h/h_0$
0.280	0.500	0.500	0.280	3.84
0.290	0.772	0.228	0.268	2.39
0.300	0.855	0.145	0.254	2.06
0.310	0.910	0.090	0.240	1.87
0.320	0.948	0.052	0.227	1.73
0.330	0.973	0.027	0.214	1.64
0.340	0.988	0.012	0.202	1.56
0.350	0.997	0.003	0.191	1.50
0.360	1.000	0.000	0.181	1.46
0.361	1.000	0.000	0.180	1.45

толщиной  $h$  вместе с уравнением (4) дают

$$\frac{dh}{d\rho} + \frac{h}{\rho} = 0, \quad \frac{v - \rho \frac{dh}{d\rho}}{h} + \frac{dv}{d\rho} + \frac{v}{\rho} = 0$$

Учитывая условие  $v = 0$ ,  $h = h_0$  при  $\rho = \beta$ , можно найти

$$v = \beta - \rho, \quad h = h_0 \frac{\beta}{\rho}$$

Легко видеть, что

$$0 \leq \varepsilon_\theta \leq -\varepsilon_r \quad \text{или} \quad 0 \leq \beta/\rho - 1 \leq 1$$

так, что

$$\beta/2 \leq \rho \leq \beta$$

Сравнение этого решения с предыдущими решениями устанавливает весьма резкое расхождение компонент напряжения  $\varepsilon_r$  и  $\sigma_\theta$ , а также значительное расхождение скоростей  $v$  и толщин  $h$ .

Поступила 27 XI 1960

Институт механики Академии наук СССР

#### ЛИТЕРАТУРА

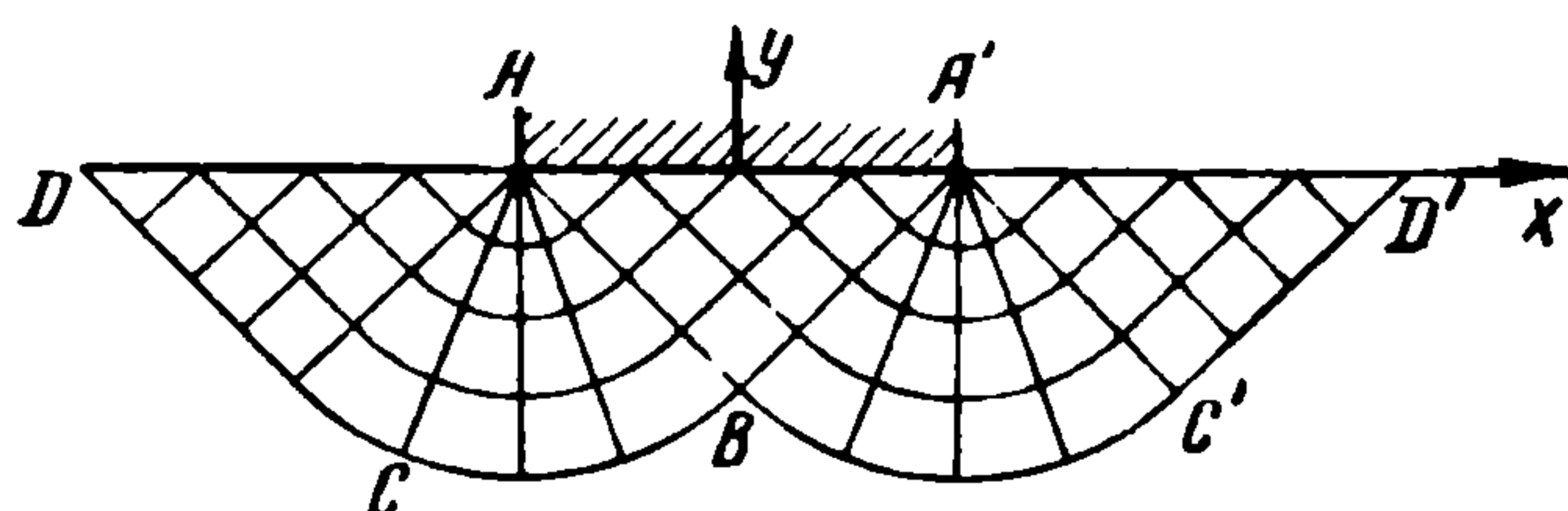
1. Hill R. Plastic distortion of non-uniform sheets. The philosophical magazine, 1949, Vol. 40, No 309.
2. Prager W. On the use of singular yield conditions and associated flow rules. Journal of applied mechanics, 1953, Vol. 20, No 3.

### О ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ ВДАВЛИВАНИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА В ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Г. И. Быковцев

(Воронеж)

Задача о вдавливании плоского штампа в пластическое полупространство впервые была рассмотрена Прандтлем [1]; Хилл построил второе решение этой задачи [2]; позднее Прагер [3] указал на возможности построения решений, являющихся комбинацией решений Хилла и Прандтля. Ниже рассмотрены другие возможности построения поля скоростей перемещений.



Фиг. 1

В треугольнике  $ABA'$  (фиг. 1) характеристики прямолинейные, и соотношения Гейрингер [4] принимают вид:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} = 0$$

Отсюда

$$v_\alpha = f(\beta), \quad v_\beta = \varphi(\alpha)$$

где  $v_\alpha$  — составляющая скорости вдоль линий  $\beta = \text{const}$ , а  $v_\beta$  — составляющая скорости вдоль линий  $\alpha = \text{const}$ .