Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК В НАПРЯЖЕНИЯХ

Т. Т. Хачатурян
(Ереван)

Теория оболочек развивается в направлении разработки приближенных способов расчета, приспособленных к определенным типам задач, встречающихся в тех или иных отраслях техники. При этом уделяется особое внимание также вопросу о представлении методов расчета в наглядном и обозримом виде, чтобы проектировщики могли свободно ориентироваться в выборе предложенных приближенных способов расчета. Имея в виду это обстоятельство, нетрудно заметить, что обычные уравнения общей теории оболочек, содержащие не сопоставимые одну с другой величины T_1, T_2, S, M_1, M_2, H, не удобны для построения приближенных теорий, так как упрощения названных уравнений путем отбрасывания тех или иных членов сравнительно с другими членами очень часто имеют умозрительный характер, понятный только узкому кругу специалистов. Положение дела с построением приближенных теорий значительно улучшается, если в качестве основных искомых величин будем пользоваться не усилиями и моментами, а более унифицированными величинами, например напряжениями в крайних слоях толщины оболочки. Ниже предлагается вариант представления общих уравнений теории оболочек в названных напряжениях. Показывается, что как вывод основных уравнений, так и изложения ряда известных теоретических результатов при этом становятся более наглядными и легко обозримыми. При составлении уравнений пользуемся общепринятыми обозначениями для расчетных величин, принятых в работах [1, 2, 3, 4, 5]. Учет малых величин производим последовательно во всех уравнениях с точностью $1 + \lambda + \lambda^2 = 1 + \lambda$, где λ — отношение полутолщины оболочки к ее радиусу кривизны.

1. Статические уравнения. Направим координатные оси α, β и z по линиям главных кривизн и по внешней нормали срединной поверхности и, принимая линейный закон распределения основных напряжений по толщине оболочки, имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 + m_1 \frac{z}{h}, \qquad \sigma_\beta = \sigma_2 + m_2 \frac{z}{h}, \qquad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{12} + m_{12} \frac{z}{h} \tag{1.1}$$

где σ_1, σ_2 и σ_{12} — нормальные и касательное напряжения в точке срединной поверхности, m_1, m_2 и m_{12} — нормальные и касательное напряжения в крайних точках $z = \pm h$, вызванные соответственно изгибом и кручением. Полные напряжения в этих крайних точках будут

$$\begin{aligned} &\sigma_\alpha^+ = \sigma_1 + m_1, \qquad \sigma_\beta^+ = \sigma_2 + m_2, \qquad \sigma_{\alpha\beta}^+ = \sigma_{12} + m_{12} \\ &\sigma_\alpha^- = \sigma_1 - m_1, \qquad \sigma_\beta^- = \sigma_2 - m_2, \qquad \sigma_{\alpha\beta}^- + \sigma_{12} - m_{12} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Внеся (1.1) в выражения для усилий и моментов, получим

$$\begin{aligned} T_1 &= \int \sigma_\alpha (1 + k_2 z)\, dz, \qquad & M_1 &= \int z\sigma_\alpha (1 + k_2 z)\, dz \\ T_2 &= \int \sigma_\beta (1 + k_1 z)\, dz, \qquad & M_2 &= \int z\sigma_\beta (1 + k_1 z)\, dz \\ S_1 &= \int \sigma_{\alpha\beta} (1 + k_2 z)\, dz, \qquad & H_1 &= \int z\sigma_{\alpha\beta} (1 + k_2 z)\, dz \\ S_2 &= \int \sigma_{\alpha\beta} (1 + k_1 z)\, dz, \qquad & H_2 &= \int z\sigma_{\alpha\beta} (1 + k_1 z)\, dz \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$T_1 = 2h[\sigma_1 + \tfrac{1}{3} m_1\lambda_2], \qquad M_1 = \tfrac{2}{3} h^2 [m_1 + \sigma_1\lambda_2] \qquad \left(\lambda_1 = \frac{h}{R_1} = hk_1\right)$$
$$T_2 = 2h[\sigma_2 + \tfrac{1}{3} m_2\lambda_1], \qquad M_2 = \tfrac{2}{3} h^2 [m_2 + \sigma_2\lambda_1] \qquad \left(\lambda_2 = \frac{h}{R_2} = hk_2\right) \tag{1.4}$$
$$S_1 = 2h[\sigma_{12} + \tfrac{1}{3} m_{12}\lambda_2], \qquad H_1 = \tfrac{2}{3} h^2 [m_{12} + \sigma_{12}\lambda_2]$$
$$S_2 = 2h[\sigma_{12} + \tfrac{1}{3} m_{12}\lambda_1], \qquad H_2 = \tfrac{2}{3} h^2 [m_{12} + \sigma_{12}\lambda_1]$$

Подставим (1.4) в известные уравнения равновесия элемента оболочки

$$\frac{1}{A}\frac{\partial T_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial S_2}{\partial\beta} + \frac{T_1 - T_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{S_1 + S_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} + k_1 N_1 + q_1 = 0$$
$$\frac{1}{A}\frac{\partial S_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial T_2}{\partial\beta} + \frac{T_2 - T_1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{S_1 + S_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + k_2 N_2 + q_2 = 0 \tag{1.5}$$
$$\frac{1}{A}\frac{\partial N_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial N_2}{\partial\beta} + \frac{N_1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{N_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} - k_1 T_1 - k_2 T_2 + q_3 = 0$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial H_2}{\partial\beta} + \frac{M_1 - M_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{H_1 + H_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} = N_1$$
$$\frac{1}{A}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial M_2}{\partial\beta} + \frac{M_2 - M_1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{H_1 + H_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} = N_2 \tag{1.6}$$
$$S_1 - S_2 + k_1 H_1 - k_2 H_2 = 0$$

Легко убедиться, что последнее шестое уравнение тождественно удовлетворяется. Остальные уравнения после исключения поперечных сил будут содержать только напряжения σ_i, m_i. Для сокращения записи введем следующий символ:

$$L_1(x, y) = \frac{1}{A}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{y}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}, \qquad L_2(x, y) = \frac{1}{B}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{y}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} \tag{1.7}$$

При $x = L_1(\Phi, 0)$, $y = L_2(\Phi, 0)$ имеем

$$L_1(x, y) + L_2(y, x) = \nabla^2\Phi, \qquad L_1(y, -x) = L_2(x, -y) \tag{1.8}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа в криволинейных координатах. Уравнения (1.5) принимают вид

$$L_1(\sigma_1, 2\sigma_{12}) + L_2(\sigma_{12}, \sigma_1 - \sigma_2) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} L_1(m_1, 2m_{12}) +$$
$$+ \frac{2\lambda_1}{3} L_2(m_{12}, m_1 - m_2) + \frac{q_1}{2h} = 0$$
$$L_2(\sigma_2, 2\sigma_{12}) + L_1(\sigma_{12}, \sigma_2 - \sigma_1) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} L_2(m_2, 2m_{12}) + \tag{1.9}$$
$$+ \frac{2\lambda_2}{3} L_1(m_{12}, m_1 - m_2) + \frac{q_2}{2h} = 0$$
$$\frac{h}{3}[L_1(n_1, n_2) + L_2(n_2, n_1)] - \frac{\sigma_1}{R_1} - \frac{\sigma_2}{R_2} + \frac{q_3}{2h} = 0 \qquad \left(n_1 = \frac{3}{2h^2} N_1, \quad n_2 = \frac{3}{2h^2} N_2\right)$$

Для величин n_1, n_2 из (1.6) получаем выражения (1.10)

$$n_1 = L_1(m_1, 2m_{12}) + L_2(m_{12}, m_1 - m_2) + \lambda_2 L_1(\sigma_1, 2\sigma_{12}) + \lambda_1 L_2(\sigma_{12}, \sigma_1 - \sigma_2)$$
$$n_2 = L_2(m_2, 2m_{12}) + L_1(m_{12}, m_2 - m_1) + \lambda_1 L_2(\sigma_2, 2\sigma_{12}) + \lambda_2 L_1(\sigma_{12}, \sigma_2 - \sigma_1)$$

Коэффициенты n_1 и n_2 играют вспомогательную роль, и они из дальнейшего рассмотрения выпадают, как только внесем (1.6) в (1.5). При этом легко заметить, что в правых частях (1.10) члены, содержащие λ_1 и λ_2, будут излишними, поэтому для этих величин можем пользоваться формулами

$$
\begin{aligned}
n_1 &= L_1(m_1,\ 2m_{12}) + L_2(m_{12},\ m_1 - m_2) \\
n_2 &= L_2(m_2,\ 2m_{12}) + L_1(m_{12},\ m_2 - m_1)
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Уравнения (1.9) и (1.11) будут первой группой основных уравнений теории оболочек.

2. Геометрические уравнения. Зависимости между относительными деформациями и компонентами перемещения произвольной точки могут быть представлены так

$$
e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{1+k_1 z}\left[\frac{\partial U_\alpha}{A\partial\alpha} + \frac{U_\beta}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} + k_1 U_z\right], \quad e_{\beta\beta} = \frac{1}{1+k_2 z}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial U_\beta}{\partial\beta} + \frac{U_\alpha}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + k_2 U_z\right]
$$

$$
e_{\alpha\beta} = \frac{1}{1+k_1 z}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial U_\beta}{\partial\alpha} - \frac{U_\alpha}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right] + \frac{1}{1+k_2 z}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial U_\alpha}{\partial\beta} - \frac{U_\beta}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right] \tag{2.1}
$$

$$
e_{\alpha z} = \frac{1}{1+k_1 z}\left[(1+k_1 z)\frac{\partial U_\alpha}{\partial z} - k_1 U_\alpha + \frac{1}{A}\frac{\partial U_z}{\partial\alpha}\right]
$$

$$
e_{\beta z} = \frac{1}{1+k_2 z}\left[(1+k_2 z)\frac{\partial U_\beta}{\partial z} - k_2 U_\beta + \frac{1}{B}\frac{\partial U_z}{\partial\beta}\right], \qquad e_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}
$$

Пользуясь гипотезами Кирхгоффа — Лява $e_{zz} = e_{\alpha z} = e_{\beta z} = 0$, из последних трех уравнений (2.1) получаем

$$
U_\alpha = u + z f_1, \qquad U = v + z f_2, \qquad U_z = w \tag{2.2}
$$

где u, v, w — перемещения точки срединной поверхности

$$
f_1 = k_1 u - \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}, \qquad f_2 = k_2 v - \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} \tag{2.3}
$$

Подставляя (2.2) в первые три уравнения (2.1), представим их в виде

$$
e_{\alpha\alpha} = \varepsilon_1 + z\varkappa_1, \qquad e_{\beta\beta} = \varepsilon_2 + z\varkappa_2, \qquad e_{\alpha\beta} = \omega + 2z\tau \tag{2.4}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = L_1(u,\ v) + k_1 w, \qquad \varkappa_1 = L_1(f_1,\ f_2) - k_1\varepsilon_1 \\
&\varepsilon_2 = L_2(v,\ u) + k_2 w, \qquad \varkappa_2 = L_2(f_2,\ f_1) - k_2\varepsilon_2 \\
&\omega = L_2(u - v) + L_1(v,\ -u) \\
&2\tau = L_1(f_2,\ -f_1) + L_2(f_1,\ -f_2) - k_1 L_1(v,\ -u) - k_2 L_2(u,\ -v)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

будут компонентами деформации срединной поверхности. (2.5) представляют вторую группу основных уравнений теории оболочек. Заметим, что выражения для ε_1, ε_2 и ω не связаны с гипотезами Кирхгоффа — Лява, они непосредственно следуют из (2.1) и будут точными.

Третьей группой основных уравнений будут уравнения совместности деформации срединной поверхности, данные А. Л. Гольденвейзером. Если вместо условных компонентов деформации изгиба и кручения, которыми пользуется А. Л. Гольденвейзер, будем пользоватся истинными компонентами (2.5), то уравнения совместности получим в таком виде:

$$
L_1(\varkappa_2, -2\tau) - L_2(\tau, \varkappa_1 - \varkappa_2) - (k_1 + k_2) L_1(\varepsilon_2, -\omega) + 2k_1 L_2\left(\tfrac{1}{2}\omega, \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) = 0
$$

$$
L_2(\varkappa_1, -2\tau) - L_1(\tau, \varkappa_2 - \varkappa_1) - (k_1 + k_2) L_2(\varepsilon_1, -\omega) + 2k_2 L_1\left(\tfrac{1}{2}\omega, \varepsilon_2 - \varepsilon_1\right) = 0
$$

$$
L_1(\gamma_1,\ \gamma_2) + L_2(\gamma_2,\ \gamma_1) + k_2\varkappa_1 + k_1\varkappa_2 = 0 \tag{2.6}
$$

Здесь (2.7)

$$
\gamma_1 = L_1(\varepsilon_2, -\omega) - L_2\left(\tfrac{1}{2}\omega,\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right), \qquad \gamma_2 = L_2(\varepsilon_1, -\omega) - L_1\left(\tfrac{1}{2}\omega, \varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)
$$

Уравнения (2.6) отличаются от соответствующих уравнений А. Л. Гольденвейзера наличием в первых двух уравнениях некоторых дополнительных членов, содержащих кривизны k_1 и k_2. Третье уравнение остается без изменений, так как здесь вносимая поправка будет порядка λ^2 сравнительно с единицей.

3. Уравнения упругости. Пренебрегая напряжением σ_z сравнительно с основными напряжениями σ_α и σ_β, из законов Гука имеем

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \mu\sigma_\beta), \qquad e_{\beta\beta} = \frac{1}{E}(\sigma_\beta - \mu\sigma_\alpha), \qquad e_{\alpha\beta} = \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

Внеся (1.1) в (3.1) и представляя деформации в виде (2.4), получим соотношения упругости в теории оболочек в таком простейшем виде

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), & \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), & \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\omega \\ m_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2), & m_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1), & m_{12} &= \frac{Eh}{1+\mu}\tau \end{aligned} \tag{3.2}$$

Формулы (3.2) будут четвертой группой основных уравнений общей теории оболочек.

Подчеркнутые уравнения — (1.9), (2.5), (2.6) и (3.2) — представляют полную систему основных уравнений общей теории оболочек, которые при известных граничных условиях на контуре оболочки позволяют решить конкретные задачи.

4. Введение вспомогательных функций. А. И. Лурье и А. Л. Гольденвейзер показали, что если оболочка нагружена только по краям, т. е. $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, то можно удовлетворить уравнения равновесия, выразив все усилия и моменты через четыре вспомогательные функции. Аналогичные рассуждения, которые сводятся к сопоставлению уравнений (1.9) и (2.6), здесь показывают, что введение четвертой функции излишне; соотношения названных авторов можно представить через три функции таким образом

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= h\varkappa_2(a, b, c), & \sigma_2 &= h\varkappa_1(a, b, c), & \sigma_{12} &= -h\tau(a, b, c) \\ m_1 &= -3\varepsilon_2(a, b, c), & m_2 &= -3\varepsilon_1(a, b, c), & m_{12} &= \frac{3}{2}\omega(a, b, c) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь a, b, c — вспомогательные функции координат α и β, которые должны быть проставлены в (2.5) — (2.3) вместо u, v, w. Все усилия и моменты могут быть определены из (4.1) на основании (1.4).

5. Уравнения совместности в напряжениях. Внеся компоненты деформации из (3.2) в (2.6), получим уравнения совместности деформаций в напряжениях

$$\begin{gathered} L_1(m_1, 2m_{12}) + L_2(m_{12}, m_1 - m_2) - \frac{1}{1+\mu}L_1(m_1 + m_2, 0) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1+\mu}\times \\ \times L_1(\sigma_1 + \sigma_2, 0) - (\lambda_1 + \lambda_2)L_1(\sigma_1, 2\sigma_{12}) - 2\lambda_1 L_2(\sigma_{12}, \sigma_1 - \sigma_2) = 0 \end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\begin{gathered} L_2(m_2, 2m_{12}) + L_1(m_{12}, m_2 - m_1) - \frac{1}{1+\mu}L_2(m_1 + m_2, 0) + \\ + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1+\mu}L_2(\sigma_1 + \sigma_2, 0) - (\lambda_1 + \lambda_2)L_2(\sigma_2, 2\sigma_{12}) - 2\lambda_2 L_1(\sigma_{12}, \sigma_2 - \sigma_1) = 0 \\ L_1(p_1, p_2) + L_2(p_2, p_1) - \frac{m_1 - \mu m_2}{R_2 h(1+\mu)} - \frac{m_1 - \mu m_2}{R_1 h(1+\mu)} = 0 \end{gathered}$$

Здесь

$$p_1 = L_1(\sigma_1,\ 2\sigma_{12}) + L_2(\sigma_{12},\ \sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{1+\mu} L_1(\sigma_1 + \sigma_2,\ 0)$$
$$p_2 = L_2(\sigma_2,\ 2\sigma_{12}) + L_1(\sigma_{12},\ \sigma_2 - \sigma_1) - \frac{1}{1+\mu} L_2(\sigma_1 + \sigma_2,\ 0) \tag{5.2}$$

Уравнения (1.9) и (5.1) образуют систему из шести уравнений с таким же количеством неизвестных; они будут исходными уравнениями для решения задач в напряжениях.

6. Комплексные уравнения В. В. Новожилова при $\mu = 0$. При $\mu = 0$ подстановкой

$$t_1 = \sigma_1 - \frac{i}{\sqrt{3}} m_2, \qquad t_2 = \sigma_2 - \frac{i}{\sqrt{3}} m_1, \qquad t_{12} = \sigma_{12} + \frac{i}{\sqrt{3}} m_{12} \tag{6.1}$$

уравнения равновесия (1.9) и совместности деформаций (5.1) можно совместить в следующих трех комплексных уравнениях, содержащих комплексные напряжения t_1, t_2 и t_{12}

$$L_1(t_1,\ 2t_{12}) + \left(1 - i\frac{2\lambda_1}{\sqrt{3}}\right) L_2(t_{12},\ t_1 - t_2) + i\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{3}} L_1(t_2,\ -2t_{12}) + \frac{q_1}{2h} = 0$$
$$L_2(t_2,\ 2t_{12}) + \left(1 - i\frac{2\lambda_2}{\sqrt{3}}\right) L_1(t_{12},\ t_2 - t_1) + i\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{3}} L_2(t_1,\ -2t_{12}) + \frac{q_2}{2h} = 0 \tag{6.2}$$
$$\frac{i}{\sqrt{3}}[L_1(r_1,\ r_2) + L_2(r_2,\ r_1)] - \frac{t_1}{R_1 h} - \frac{t_2}{R_2 h} + \frac{q_3}{2h^2} = 0$$

где

$$r_1 = L_1(t_2,\ -2t_{12}) - L_2(t_{12},\ t_1 - t_2), \qquad r_2 = L_2(t_1,\ -2t_{12}) - L_1(t_{12},\ t_2 - t_1) \tag{6.3}$$

При $\mu \neq 0$ нельзя подобрать подстановки, аналогичные (6.1), приводящие уравнения (1.9) и (5.1) к трем комплексным уравнениям. Такую возможность можно создать упрощением этих уравнений лишь путем отбрасывания некоторых малых членов порядка λ при сохранении в уравнениях других малых членов того же порядка, однако такой прием следует признать непоследовательным.

7. Основные уравнения теории пластин. Полагая в уравнениях (1.9) и (5.1) $R_1 = \infty$, $R_2 = \infty$ и учитывая (1.12) и (5.2), получим основные уравнения теории пластин в криволинейных координатах

$$L_1(\sigma_1,\ 2\sigma_{12}) + L_2(\sigma_{12},\ \sigma_1 - \sigma_2) + \frac{q_1}{2h} = 0$$
$$L_2(\sigma_2,\ 2\sigma_{12}) + L_1(\sigma_{12},\ \sigma_2 - \sigma_1) + \frac{q_2}{2h} = 0 \tag{7.1}$$

$$\nabla^2(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1+\mu}{2h}[L_1(q_1,\ q_2) + L_2(q_2,\ q_1)] = 0 \tag{7.2}$$

$$\nabla^2(m_1 + m_2) + \frac{3(1+\mu)}{2h^2} q_3 = 0 \tag{7.3}$$

$$L_1(m_1,\ 2m_{12}) + L_2(m_{12},\ m_1 - m_2) - \frac{1}{1+\mu} L_1(m_1 + m_2,\ 0) = 0$$
$$L_2(m_2,\ 2m_{12}) + L_1(m_{12},\ m_2 - m_1) - \frac{1}{1+\mu} L_2(m_1 + m_2,\ 0) = 0 \tag{7.4}$$

Уравнения (7.1) и (7.2) описывают плосконапряженное состояние пластины, они образованы из двух уравнений равновесия и одного уравнения совместности деформации; уравнения (7.3) и (7.4) описывают изгиб пластинки, они состоят из одного уравнения равновесия и двух уравнений совместности.

При $q_1 = q_2 = 0$ введем функцию напряжения Эри $\Phi(\alpha\beta)$; обозначим

$$\varphi_1 = L_1(\Phi, 0), \qquad \varphi_2 = L_2(\Phi, 0) \tag{7.5}$$

тогда решение уравнений (7.1) можно принять в виде

$$\sigma_1 = L_2(\varphi_2, \varphi_1), \quad \sigma_2 = L_1(\varphi_1, \varphi_2), \quad \sigma_{12} = -L_1(\varphi_2, -\varphi_1) = -L_2(\varphi_1, -\varphi_2) \tag{7.6}$$

Уравнение (7.2) при этом приведется к бигармоническому уравнению плоской задачи

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0 \tag{7.7}$$

Аналогичным образом, введя другую функцию Ψ и обозначив

$$\psi_1 = L_1(\Psi, 0), \qquad \psi_2 = L_2(\Psi, 0) \tag{7.8}$$

уравнения (7.4) можем удовлетворить, полагая

$$m_1 = L_1(\psi_1, \psi_2) + \mu L_2(\psi_2, \psi_1), \quad m_2 = L_2(\psi_2, \psi_1) + \mu L_1(\psi_1, \psi_2) \tag{7.9}$$

$$m_{12} = (1-\mu) L_1(\psi_2, -\psi_1) = (1-\mu) L_2(\psi_1, -\psi_2)$$

Уравнение (7.3) при этом приведется к виду

$$\nabla^2\nabla^2\Psi = -\frac{3}{2h^2} q_3 \tag{7.10}$$

Сопоставив (7.9) с соотношениями упругости (3.2) и выражениями (2.3) для деформации изгиба и кручения, убедимся, что

$$\Psi = -\frac{Eh}{1-\mu^2} w \tag{7.11}$$

Поэтому вместо (7.10) будем иметь уравнение Софи-Жермен

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{q}{D} \tag{7.12}$$

Левые части уравнений (7.1)—(7.4) являются главными членами в уравнениях (1.9) и (5.1) общей теории оболочек. Это обстоятельство, а также дальнейшее преобразование этих уравнений по (7.5)—(7.12) учитывается при построении приближенных теорий расчета оболочек.

8. Приближения теории для пологих оболочек. Рассмотрим напряженное состояние оболочки, когда напряжения от растяжения и от изгиба имеют одинаковый порядок величин: $\sigma_i \approx m_i$. Для этого случая, если отбросим во всех уравнениях (1.9) и (5.1) малые величины порядка λ сравнительно с единицей, получим следующие приближенные уравнения

$$\begin{gathered} L_1(\sigma_1, 2\sigma_{12}) + L_2(\sigma_{12}, \sigma_1 - \sigma_2) + \frac{q_1}{2h} = 0 \\ L_2(\sigma_2, 2\sigma_{12}) + L_1(\sigma_{12}, \sigma_2 - \sigma_1) + \frac{q_2}{2h} = 0 \end{gathered} \tag{8.1}$$

$$\nabla^2(m_1 + m_2) - \frac{3(1+\mu)}{h}\left(\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2}\right) + \frac{3(1+\mu)}{2h^2} q_3 = 0 \tag{8.2}$$

$$\begin{gathered} L_1(m_1, 2m_{12}) + L_2(m_{12}, m_1 - m_2) - \frac{1}{1+\mu} L_1(m_1 + m_2, 0) = 0 \\ L_2(m_2, 2m_{12}) + L_1(m_{12}, m_2 - m_1) - \frac{1}{1+\mu} L_2(m_1 + m_2, 0) = 0 \end{gathered} \tag{8.3}$$

$$\nabla^2(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{m_1 - \mu m_2}{R_2 h} + \frac{m_2 - \mu m_1}{R_1 h} + \frac{1+\mu}{2h}[L_1(q_1, q_2) + L_2(q_2, q_1)] = 0 \tag{8.4}$$

Нетрудно заметить, что (8.1)—(8.4) соответствуют уравнениям, которые приняты В. З. Власовым в теории пологих оболочек. Как известно, названные уравнения В. З. Власов получает, исходя из некоторых геометрических и статических допущений. Здесь же видно, что развитая В. З. Власовым теория есть математически последовательная теория с точностью $1 + \lambda \approx 1$ в тех случаях, когда напряжения от растяжения и от изгиба соизмеримы. Переход от уравнений (8.1)—(8.4) к уравнениям В. З. Власова осуществляется формальным использованием результатов предыдущего параграфа к данному случаю. Видно, что уравнения (8.1) и (8.3) по структуре совпадают с уравнениями (7.1) и (7.4), однако это не означает, что они тождественны. Дело в том, что при $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ подстановки (7.6) и (7.9) удовлетворяют уравнениям (7.1) и (7.4), следовательно, будут их интегралами. Этого нельзя сказать об уравнениях (8.1) и (8.3), так как при подстановках (7.6) и (7.9) в правых частях (8.1) и (8.3) в силу условия Гаусса получим отличные от нуля малые величины; например, для (8.1) получим

$$\begin{gathered} L_1(\sigma_1, 2\sigma_{12}) + L_2(\sigma_{12}, \sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} L_1(\Phi, 0) \\ L_2(\sigma_2, 2\sigma_{12}) + L_1(\sigma_{12}, \sigma_2 - \sigma_1) = -\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} L_2(\Phi, 0) \end{gathered} \tag{8.5}$$

Правые части (8.5) (также и уравнения, получаемые из (8.3)) сравнительно с членами взаимно сокращающимися в левой части малы, поэтому с достаточной точностью можем считать, что (7.6) и (7.9) будут интегралами также для уравнений (8.1) и (8.3).

Внеся (7.6) и (7.9) в уравнения (8.2) и (8.4), получим

$$\begin{gathered} \nabla^4\Psi - \frac{3}{h}\left[\frac{1}{R_1} L_2(\varphi_2, \varphi_1) + \frac{1}{R_2} L_1(\varphi_1, \varphi_2)\right] - \frac{3}{2h^2} q_3 = 0 \\ \nabla^4\Phi - \frac{1-\mu^2}{h}\left[\frac{1}{R_1} L_2(\psi_2, \psi_1) + \frac{1}{R^2} L_1(\psi_1, \psi_2)\right] = 0 \end{gathered} \tag{8.6}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями В. З. Власова, если в них заменим функцию Ψ через прогиб w по формуле (7.11). Такая замена равносильна отбрасыванию в выражениях (2.5) для компонентов деформации изгиба и кручения касательных перемещений u, v сравнительно с радиальным перемещением w, что согласуется с принятой точностью.

Поступила 14 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
2. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее применения в технике. Гостехиздат, 1949.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1951.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.