Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

В. М. Даревский

(Москва)

Анализируется вопрос о возможных упрощениях так называемых соотношений упругости в теории тонких оболочек. Существовало мнение, что простейший вариант таких соотношений (часто называемый первым приближением теории Лява) может привести только к такой погрешности, которая является величиной $O\,(h/R)$ (h и R — толщина и наименьший из главных радиусов кривизны оболочки). В связи с этим было высказано соображение [1] о том, что простейшие соотношения упругости для сдвигающих усилий и крутящих моментов могут приводить к более существенной ошибке. В работе [2] на примере геликоидальной оболочки выявлены существенные дефекты решения, полученного на основании простейших соотношений упругости [1]. Эти дефекты, по-видимому, связаны с упрощением соотношений упругости для сдвигающих усилий и крутящих моментов. Простейшие соотношения упругости для нормальных усилий и изгибающих моментов не подвергались критике; казалось, что они не должны приводить к существенной погрешности.

В данной работе устанавливается, что это не совсем так. Предварительно показывается, как получить полные соотношения упругости на основе широко известных результатов Лява, и выводится дополнительное (к шестому уравнению равновесия) алгебраическое уравнение, связывающее сдвигающие усилия и крутящие моменты. Затем выясняется, какие упрощения полных соотношений упругости допустимы для цилиндрической оболочки. На примере этой оболочки обнаруживается, что учет в соотношениях упругости для нормальных усилий и изгибающих моментов обычно игнорируемых величин может существенно отразиться на решении некоторых задач.

Проведенное исследование приводит к соотношениям упругости для произвольной оболочки, которые по существу не отличаются от соотношений, полученных в [3].

1. Обратимся к линейной теории тонких оболочек постоянной толщины в изложении А. Лява [4]. При этом сохраним часть обозначений, принятых в [4], а другую часть изменим для удобства. Ниже в первой и третьей строках указаны обозначения Лява, а во второй и четвертой — соответствующие обозначения, принятые в данной работе.

$$2h;\quad \alpha,\ \beta;\quad A,\ B;\quad u,\ v,\ w;\quad \tilde{\omega},\ \tau;\quad e_{xx},\ e_{yy},\ e_{xy};\quad \sigma$$
$$h;\quad \alpha_1,\ \alpha_2;\quad A_1,\ A_2;\quad u_1,\ u_2,\ u_3;\quad \omega,\ \tau_*;\quad e_1,\ e_2,\ e_{12};\quad \nu$$
$$X_x,\ Y_y,\ X_y;\quad S_1,\quad S_2,\quad G_i,\quad H_1,\ H_2;\quad X',\ Y',\ Z',\ L',\ M'$$
$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_{12};\quad T_{12},\ -T_{21},\ M_i,\ -M_{12},\ M_{21};\quad P_1,\ P_2,\ P_3,\ \widetilde{M}_1,\ \widetilde{M}_2$$

Точные (в рамках линейной теории) значения компонентов деформации в любой точке оболочки определяются приведенными в [4] формулами (30), гл. XXIV. Первая гипотеза Кирхгофа — Лява должна формулироваться так: в трех из только что упомянутых формул, именно в формулах для e_1, e_2, e_{12}, можно пренебречь членами с ξ, η, ζ, т. е.

[1] С работой [2] автору удалось ознакомиться, после того как излагаемая работа была подготовлена к печати.

при определении e_1, e_2, e_{12} можно считать, что отрезок нормали к срединной поверхности оболочки, заключенный между ее внешними поверхностями, остается в процессе деформации прямолинейным, нормальным к срединной поверхности и не изменяет своей длины. На основании этой гипотезы имеем:

$$e_i = \frac{\varepsilon_i - z\varkappa_i}{1 - z / R_i} \tag{1.1}$$

$$e_{12} = \frac{\omega}{1 - z / R_2} - \tau_* z \left(\frac{1}{1 - z / R_1} + \frac{1}{1 - z / R_2}\right) + \frac{z}{1 - z / R_2}\left(\frac{p_1'}{A_1} + \frac{q_2'}{A_2}\right)$$

где $i = 1, 2$, как и в дальнейшем. В последней формуле (см. [4], гл. XXIV, ф-лы (11))

$$\frac{p_1'}{A_1} + \frac{q_2'}{A_2} = \omega \frac{q_1'}{A_1} + \varepsilon_1 \frac{p_1'}{A_1} + \varepsilon_2 \frac{q_2'}{A_2}$$

Отсюда, пренебрегая величинами более высокого порядка малости, чем деформации срединной поверхности (см. [4], гл. XXIV, ф-лы (21), (26)), получаем

$$\frac{p_1'}{A_1} + \frac{q_2'}{A_2} = -\frac{\omega}{R_1}$$

и, следовательно,

$$e_{12} = \omega \frac{1 - z / R_1}{1 - z / R_2} - \tau_* z \left(\frac{1}{1 - z / R_1} + \frac{1}{1 - z / R_2}\right) \tag{1.2}$$

Величины ε_i, $\varkappa_i$, ω, τ_* определяются через компоненты перемещения u_1, u_2, u_3 в виде (см. [4], гл. XXIV, ф-лы (21), (26)):

$$\varepsilon_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{u_{3-i}}{A_i A_{3-i}}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_{3-i}} - \frac{u_3}{R_i} \tag{1.3}$$

$$\varkappa_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}\right) + \frac{1}{A_i A_{3-i}}\left(\frac{1}{A_{3-i}}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_{3-i}} + \frac{u_{3-i}}{R_{3-i}}\right)\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_{3-i}} \tag{1.4}$$

$$\omega = \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) \tag{1.5}$$

$$\tau_* = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2}\right) - \frac{1}{A_1^2 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 R_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \tag{1.6}$$

Введем величину $\tau^* = \tau_* + \omega / R_1$. Из равенств (1.5), (1.6) и одной из формул Кодаци

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{A_2}{R_2}\right) = \frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}$$

нетрудно установить, что

$$\tau^* = \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2 A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{A_2}{A_1 R_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2 R_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right)$$

В результате простых преобразований можно теперь представить правую часть формулы (1.2) в явно инвариантной относительно перестановки обозначений координатных линий форме

$$e_{12} = \omega\left(1 + \frac{z / R_1}{1 - z / R_1} + \frac{z / R_2}{1 - z / R_2}\right) - \tau^* z \left(\frac{1}{1 - z / R_1} + \frac{1}{1 - z / R_2}\right)$$

или в более удобной для дальнейшего и также явно инвариантной форме

$$e_{12} = \omega_1 \frac{1 - z/R_2}{1 - z/R_1} + \omega_2 \frac{1 - z/R_1}{1 - z/R_2} - \tau z \left(\frac{1}{1 - z/R_1} + \frac{1}{1 - z/R_2} \right) \tag{1.7}$$

где

$$\omega_1 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right), \quad \omega_2 = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right)$$
$$\tau = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) \tag{1.8}$$

причем, как это следует из формулы (5), $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

На основании второй гипотезы Кирхгофа — Лява, состоящей в том, что в любой точке оболочки напряжение σ_3 считается пренебрежимо малым[1] по сравнению с наибольшим из напряжений σ_1 и σ_2, и закона Гука имеем

$$\sigma_i = \frac{E}{1 - \nu^2} (e_i + \nu e_{3-i}), \qquad \sigma_{12} = \frac{E}{2(1 + \nu)} e_{12} \tag{1.9}$$

Подставляя в равенства (1.9) значения e_i и e_{12} из формул (1.1) и (1.7), получаем:

$$\sigma_i = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\varepsilon_i - z\varkappa_i}{1 - z/R_i} + \nu \frac{\varepsilon_{3-i} - z\varkappa_{3-i}}{1 - z/R_{3-i}} \right)$$
$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\omega_1 \frac{1 - z/R_2}{1 - z/R_1} + \omega_2 \frac{1 - z/R_1}{1 - z/R_2} - \tau z \left(\frac{1}{1 - z/R_1} + \frac{1}{1 - z/R_2} \right) \right] \tag{1.10}$$

Внутренние усилия и моменты определяются из равенств:

$$T_i = \int_{-1/2 h}^{1/2 h} \sigma_i \left(1 - \frac{z}{R_{3-i}} \right) dz, \qquad T_{i,3-i} = \int_{-1/2 h}^{1/2 h} \sigma_{i,3-i} \left(1 - \frac{z}{R_{3-i}} \right) dz$$
$$M_i = \int_{-1/2 h}^{1/2 h} \sigma_i \left(1 - \frac{z}{R_{3-i}} \right) z dz, \qquad M_{i,3-i} = \int_{-1/2 h}^{1/2 h} \sigma_{i,3-i} \left(1 - \frac{z}{R_{3-i}} \right) z dz \tag{1.11}$$

Вставляя сюда вместо σ_i и $\sigma_{i,3-i}$ правые части равенств (1.10), получаем

$$T_i = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left[\varepsilon_i + \nu \varepsilon_{3-i} - \frac{\gamma_i}{12\beta_i} (\chi_i - \chi_{3-i}) (\chi_i \varepsilon_i - h\varkappa_i) \right]$$

$$T_{i,3-i} = \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \left\{ \omega + \frac{\gamma_i}{12\beta_i} (\chi_i - \chi_{3-i}) \left[\tau h - \omega_i (\chi_i - \chi_{3-i}) \right] \right\} \tag{1.12}$$

$$M_i = - \frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)} \left[h (\varkappa_i + \nu \varkappa_{3-i}) + \frac{\gamma_i}{\beta_i} (\chi_i - \chi_{3-i}) \varepsilon_i - \right.$$
$$\left. - h \left(1 - \frac{\chi_{3-i}}{\chi_i} \right) \left(1 + \frac{\gamma_i}{\beta_i} \right) \varkappa_i \right]$$

$$M_{i,3-i} = - \frac{Eh^2}{24(1 + \nu)} \left\{ \left[2 - \left(1 - \frac{\chi_{3-i}}{\chi_i} \right) \left(1 + \frac{\gamma_i}{\beta_i} \right) \right] [h\tau - (\chi_i - \chi_{3-i}) \omega_i] + \chi_i \omega \right\}$$

---

[1] При этом, разумеется, исключается из рассмотрения случай, когда оболочка нагружена по обоим внешним поверхностям одинаково распределенными нормальными силами, которые, будучи отнесены к единице площади срединной поверхности, имеют одинаковую величину, но направлены в противоположные стороны.

где

$$\chi_i = \frac{h}{R_i}, \qquad \beta_i = \frac{h^2}{12R_i^2}, \qquad \gamma_i = 1 - \chi_i^{-1} \ln \frac{1 + {}^1\!/_2\chi_i}{1 - {}^1\!/_2\chi_i}$$

причем, если $R_i = \infty$ $(\chi_i = 0)$, то $\gamma_i / \beta_i = -1$. Так как

$$\gamma_i = -\beta_i - \frac{9}{5}\beta_i^2 - \ldots \tag{1.13}$$

и, следовательно,

$$\frac{\gamma_i}{\beta_i} = -1 + O(\beta_i), \qquad 1 + \gamma_i/\beta_i = -\frac{9}{5}\beta_i (1 + O(\beta_i))$$

то формулы (1.12) можно написать в виде:

$$T_i = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_i + \nu\varepsilon_{3-i} + \frac{1}{12}(\chi_i - \chi_{3-i})(1 + O(\beta_i))(\chi_i\varepsilon_i - h\varkappa_i)\right]$$

$$T_{i,3-i} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left\{\omega - \frac{1}{12}(\chi_i - \chi_{3-i})(1 + O(\beta_i))\,[\tau h - \omega_i(\chi_i - \chi_{3-i})]\right\}$$

$$M_i = -\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}\left[h(\varkappa_i + \nu\varkappa_{3-i}) - (\chi_i - \chi_{3-i})(1 + O(\beta_i))\,\varepsilon_i + \right.$$
$$\left. + \frac{9}{5}h\beta_i(1 + O(\beta_i))\left(1 - \frac{\chi_{3-i}}{\chi_i}\right)\varkappa_i\right] \tag{1.14}$$

$$M_{i,3-i} = -\frac{Eh^2}{24(1+\nu)}\left\{\left[2 + \frac{9}{5}\beta_i(1 + O(\beta_i)) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(1 - \frac{\chi_{3-i}}{\chi_i}\right)\right][h\tau - (\chi_i - \chi_{3-i})\,\omega_i] + \chi_i\omega\right\}$$

В формулах (1.12) для $T_{i,3-i}$, $M_{i,3-i}$ фигурирует величина $h\tau - (\chi_i - \chi_{3-i})\,\omega_i$, равная $h\tau^* - \chi_i\omega$. Поэтому величины $T_{i,3-i}$, $M_{i,3-i}$ являются линейными функциями двух величин ω и τ^*.

Внутренние усилия и моменты связаны между собой условиями равновесия оболочки (см. [4], гл. XXIV, ф-лы (45) и (46)):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}A_{3-i}T_i + \frac{\partial}{\partial\alpha_{3-i}}A_iT_{3-i,i} + T_{i,3-i}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_{3-i}} - T_{3-i}\frac{\partial A_{3-i}}{\partial\alpha_i} - A_iA_{3-i}\left(\frac{N_i}{R_i} - P_i\right) = 0 \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2N_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1N_2 + A_1A_2\left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + P_3\right) = 0 \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}A_{3-i}M_i + \frac{\partial}{\partial\alpha_{3-i}}A_iM_{3-i,i} + M_{i,3-i}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_{3-i}} - M_{3-i}\frac{\partial A_{3-i}}{\partial\alpha_i} - A_iA_{3-i}(N_i - \widetilde{M}_i) = 0 \tag{1.17}$$

$$\frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} - T_{12} + T_{21} = 0 \tag{1.18}$$

Выполнение равенства (1.18) обеспечивается формулами (1.11). Если подставить в равенство (1.18) значения T_{12}, T_{21}, M_{12}, M_{21} из формул (1.11), то, как известно, оно обратится в тождество (то же самое, очевидно, будет иметь место, если воспользоваться формулами (1.12)). Другое алгебраическое равенство, связывающее величины T_{12}, T_{21}, M_{12}, M_{21}, должно следовать из того, что эти четыре величины являются линейными функциями двух величин ω и τ^*.

Два независимых алгебраических равенства, связывающих T_{12}, T_{21}, M_{12}, M_{21}, можно получить следующим образом. Заменим в формулах (1.12) для T_{12} и T_{21} величину ω суммой $\omega_1+\omega_2$ и будем их рассматривать как систему уравнений относительно ω_1 и ω_2 (легко видеть, что ее определитель положителен при $R_1\neq R_2$). Найдя из этой системы ω_1 и ω_2, поставим найденные для них выражения в формулы (1.12) для M_{12} и M_{21}. При этом сокращаются члены, содержащие τ, и получаются два искомых равенства

$$\left[1-\frac{\gamma_1}{\beta_1}+\frac{\chi_2}{\chi_1}\left(1+\frac{\gamma_1}{\beta_1}\right)-\frac{\gamma_1}{12\beta_1}\chi_1(\chi_1-\chi_2)\right]T_{21}-\left\{1-\frac{\gamma_1}{\beta_1}+\frac{\chi_2}{\chi_1}\left(1+\frac{\gamma_1}{\beta_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_2}{12\beta_2}\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1}\left[\chi_2^2+\frac{\gamma_1}{\beta_1}(\chi_1-\chi_2)^2\right]\right\}T_{12}=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\left[\frac{\gamma_1}{\beta_1}+\frac{\gamma_2}{\beta_2}-\frac{\gamma_1\gamma_2}{12\beta_1\beta_2}(\chi_1-\chi_2)^2\right]M_{12} \tag{1.19}$$

$$\left[1-\frac{\gamma_2}{\beta_2}+\frac{\chi_1}{\chi_2}\left(1+\frac{\gamma_2}{\beta_2}\right)-\frac{\gamma_2}{12\beta_2}\chi_2(\chi_2-\chi_1)\right]T_{12}-\left\{1-\frac{\gamma_2}{\beta_2}+\frac{\chi_1}{\chi_2}\left(1+\frac{\gamma_2}{\beta_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_1}{12\beta_1}\frac{\chi_2-\chi_1}{\chi_2}\left[\chi_1^2+\frac{\gamma_2}{\beta_2}(\chi_2-\chi_1)^2\right]\right\}T_{21}=\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\left[\frac{\gamma_1}{\beta_1}+\frac{\gamma_2}{\beta_2}-\frac{\gamma_1\gamma_2}{12\beta_1\beta_2}(\chi_2-\chi_1)^2\right]M_{21} \tag{1.20}$$

которые совпадают только в случае, когда $R_1=R_2$.

Если умножить равенство (1.19) на χ_2 и затем сложить его с равенством (1.20), умноженным на χ_1, то после сокращения на $\chi_2-\chi_1$ получим равенство (1.18). Складывая равенства (1.19), (1.20), получим после сокращения на $\chi_2-\chi_1$

$$\frac{h}{12}(\chi_1-\chi_2)\left[\frac{\gamma_1\gamma_2}{\beta_1\beta_2}(T_{12}+T_{21})-\frac{\chi_1\gamma_1}{\chi_2\beta_1}\left(1+\frac{\gamma_2}{\beta_2}\right)T_{21}-\frac{\chi_2\gamma_2}{\chi_1\beta_2}\left(1+\frac{\gamma_1}{\beta_1}\right)T_{12}\right]=$$
$$=\left[\frac{\gamma_1}{\beta_1}+\frac{\gamma_2}{\beta_2}-\frac{\gamma_1\gamma_2}{12\beta_1\beta_2}(\chi_1-\chi_2)^2\right](M_{21}-M_{12})-h\left[\frac{1}{\chi_1}\left(1+\frac{\gamma_1}{\beta_1}\right)+\frac{1}{\chi_2}\left(1+\frac{\gamma_2}{\beta_2}\right)\right](T_{21}-T_{12}) \tag{1.21}$$

Это равенство выполняется и в случае $R_1=R_2$, в чем можно убедиться непосредственно, используя соответствующие формулы (1.12). Если в равенстве (1.21) заменить $T_{21}-T_{12}$, согласно (1.18), выражением $M_{21}R_2^{-1}-M_{12}R_1^{-1}$ и ограничиться лишь главными членами (это равносильно замене в (1.21) величин γ_1/β_1, γ_2/β_2 числом -1, а множителя при $M_{21}-M_{12}$ числом -2; см. стр. 522), то вместо точного равенства (1.21) получим приближенное равенство[1]

$$M_{21}-M_{12}\approx\frac{h^2}{24}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)(T_{12}+T_{21}) \tag{1.22}$$

Таким образом, в качестве двух независимых алгебраических равенств, связывающих всегда величины T_{12}, T_{21}, M_{12}, M_{21}, можно рассматривать равенство (1.18) и равенство (1.21) (или приближенное равенство (1.22)). Из равенств (1.21) и (1.18), так же, как и из формул (1.12), следует, что каждой омбилической точке срединной поверхности оболочки соответствуют равные значения величин M_{12}, M_{21} и величин T_{12}, T_{21}, ($M_{12}=M_{21}$, $T_{12}=T_{21}$).

Итак, если исходить из гипотез Кирхгофа — Лява, то компоненты e_1, e_2, e_{12} деформации оболочки определяются величинами ε_1, ε_2, ω_1, ω_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ, которые выражаются через перемещения u_1, u_2, u_3 по формулам (1.3), (1.4), (1.8). При этом внутренние усилия (кроме N_1 и N_2) и моменты связаны с величинами ε_1, ε_2, . . ., τ формулами (1.12), а между собой — пятью дифференциальными уравнениями (1.15)—(1.17) и двумя алгебраическими (1.18) и (1.21) (или приближенным уравнением (1.22)).

---

[1] Оно отличается от «дополнительного» уравнения, приведенного в [1]. Равенство (1.22) выполняется точно, если в соответствующих формулах (1.12) ограничиться главными членами, т. е. принять:

$$2(1+\nu)T_{i,3-i}=Eh\left[\omega-{}^1/_{12}(\chi_i-\chi_{3-i})h\tau\right]$$

$$24(1+\nu)M_{i,3-i}=-Eh^2\left[2h\tau+\chi_i\omega_{3-i}-(\chi_i-2\chi_{3-i})\omega_i\right]$$

Возникает важный вопрос о возможности упрощения соотношений упругости (1.12). Все существующие варианты теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява, обусловлены выбором тех или иных упрощенных соотношений упругости. Строгое решение этого вопроса требует оценки относительного расхождения между решениями (т. е. значениями перемещений и напряжений) любой краевой задачи теории оболочек, основанными на соотношениях (1.12) и упрощенных соотношениях упругости. Неясно, как можно сделать такую оценку для оболочки произвольной формы. Однако некоторые выводы можно сделать, обратившись к цилиндрической оболочке.

2. Для цилиндрической оболочки равенства (1.15)—(1.17) без нагрузочных членов, соотношения упругости (1.12) и формулы (1.3), (1.4), (1.18) приводят к системе из трех дифференциальных уравнений:

$$L_{j1}u_1 + L_{j2}u_2 + L_{j3}u_3 = 0 \quad (j=1,2,3) \tag{2.1}$$

где L_{jk} (j, $k = 1, 2, 3$) — следующие операторы, образующие симметричную матрицу,

$$L_{11} = 2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + (1-\nu)(1-\gamma)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \qquad L_{12} = (1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\varphi}$$

$$L_{13} = -2\nu\frac{\partial}{\partial\xi} + 2\beta\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + (1-\nu)\gamma\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\varphi^2}, \qquad L_{21} = (1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\varphi}$$

$$L_{22} = 2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + (1-\nu)(1+3\beta)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}, \qquad L_{23} = -2\frac{\partial}{\partial\varphi} + (3-\nu)\beta\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} \tag{2.2}$$

$$L_{31} = -2\nu\frac{\partial}{\partial\xi} + 2\beta\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + (1-\nu)\gamma\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\varphi^2}, \qquad L_{32} = -2\frac{\partial}{\partial\varphi} + (3-\nu)\beta\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\,\partial\varphi}$$

$$L_{33} = 2(1-\gamma) - 4\gamma\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + 2\beta\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + [(3+\nu)\beta - (1-\nu)\gamma]\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} - 2\gamma\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}$$

($R\xi$ и $R\varphi$ — координаты в осевом и окружном направлениях; $\beta = \beta_2$, $\gamma = \gamma_2$).

Пусть D — определитель с элементами L_{jk}, а Λ_{jk} — соответствующий элементу L_{jk} минор. Общее решение[1] системы (2.1) может быть определено равенствами

$$u_1 = \Lambda_{31}\Phi, \qquad u_2 = -\Lambda_{32}\Phi, \qquad u_3 = \Lambda_{33}\Phi$$

где Φ — общее решение уравнения $D\Phi = 0$. В развернутом виде это уравнение, если его сократить на $4(1-\nu)\beta$ и отбросить в коэффициентах слагаемые $o(\beta)$, записывается так:

$$\begin{aligned} L_1\Phi = {} & (1+3\beta)\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^8} + \left(4 + \frac{11-3\nu}{2}\beta\right)\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^6\,\partial\varphi^2} + 3[2+(2-\nu)\beta]\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^4\partial\varphi^4} + \\ & + \left(4 + \frac{7-3\nu}{2}\beta\right)\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^6} + (1+\beta)\frac{\partial^8\Phi}{\partial\varphi^8} + 2\nu(1+3\beta)\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^6} + \\ & + 3[2+(1-\nu)(2+\nu)\beta]\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^2} + [2(4-\nu) + (7-5\nu)\beta]\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^4} + \\ & + 2(1+\beta)\frac{\partial^6\Phi}{\partial\varphi^6} + \beta^{-1}[1-\nu^2 + (4-3\nu^2)\beta]\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} + \\ & + \left[2(2-\nu) + \frac{7(1-\nu)}{2}\beta\right]\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2} + (1+\beta)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\varphi^4} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

[1] За исключением чистого растяжения и кручения, которые здесь не рассматриваются.

Без слагаемых $O(\beta)$ в коэффициентах выражение $L_1\Phi$ имеет вид

$$L_1\Phi = \Delta^4\Phi + 2\nu\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^6} + 6\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^4\partial\varphi^2} + 2(4-\nu)\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^4} + 2\frac{\partial^6\Phi}{\partial\varphi^6} +$$
$$+ (1-\nu^2)\beta^{-1}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} + 2(2-\nu)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial\varphi^4} \qquad (2.4)$$
$$(\Delta = \partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\varphi^2)$$

То же самое уравнение (2.3) получается, если в соотношениях упругости (1.12) положить, пренебрегая малыми величинами (см. (1.13)), $\gamma_i/\beta_i = -1$ (что эквивалентно отбрасыванию в формулах (1.14) величин $O(\beta_i)$ и последних членов в квадратных скобках в выражениях для M_i и $M_{i,\,3-i}$), т. е. если заменить формулы (1.12) следующими:

$$T_i = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_i + \nu\varepsilon_{3-i} + \frac{1}{12}(\chi_i - \chi_{3-i})(\chi_i\varepsilon_i - h\varkappa_i)\right]$$
$$T_{i,\,3-i} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\omega + \frac{1}{12}(\chi_i - \chi_{3-i})^2\omega_i - \frac{1}{12}(\chi_i - \chi_{3-i})h\tau\right] \qquad (2.5)$$
$$M_i = -\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}\left[h(\varkappa_i + \nu\varkappa_{3-i}) - (\chi_i - \chi_{3-i})\varepsilon_i\right]$$
$$M_{i,\,3-i} = -\frac{Eh^2}{24(1+\nu)}\left[2h\tau + \chi_i\omega_{3-i} - (\chi_i - 2\chi_{3-i})\omega_i\right]$$

Эти формулы по существу не отличаются от соответствующих формул, полученных в [3]. Формулы (2.5) для $T_{i,\,3-i}$ и $M_{i,\,3-i}$ могут быть написаны в виде:

$$T_{i,\,3-i} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\omega - \frac{1}{12}(\chi_i - \chi_{3-i})(h\tau^* - \chi_i\omega)\right]$$
$$M_{i,\,3-i} = -\frac{Eh^3}{24(1+\nu)}(2h\tau^* - \chi_i\omega)$$

При наличии соотношений (2.5) справедливы точное равенство (1.18) и приближенное равенство (1.22). Точно, вместо (1.22), выполняется следующее равенство:

$$\left[1 + \frac{h^2}{24}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)^2\right](M_{21} - M_{12}) = \frac{h^2}{24}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)(T_{12} + T_{21})$$

(оно получается из (1.21), если положить $\gamma_i/\beta_i = -1$). Изменение операторов L_{jk}, которое происходит при замене соотношений (1.12) формулами (2.5), заключается лишь в том, что величина γ заменяется на $-\beta$ (это не нарушает симметрию матрицы $\|L_{jk}\|$), т. е. некоторые коэффициенты операторов L_{jk} остаются без изменения, а другие коэффициенты изменяются на величину $o(\beta)$, пренебрежимо малую по сравнению со значениями этих коэффициентов. То же самое происходит с операторами, при помощи которых определяются перемещения и внутренние силовые факторы через функцию Φ, а следовательно, такого же рода незначительные изменения происходят в граничных условиях, выраженных через функцию Φ. Принимая все это во внимание и исходя из того, что указанные малые изменения коэффициентов (на величины $o(\beta)$) в уравнении для Φ и в граничных условиях, выраженных через Φ, приводят лишь к пренебрежимо малому изменению самой функции Φ, заключаем, что для цилиндрической оболочки без существенной погрешности всегда можно заменить соотношения упругости (1.12) упрощенными соотношениями (2.5).

Дальнейшие упрощения соотношений (2.5) для цилиндрической оболочки могут в особых случаях привести к существенным погрешностям в решении, как это будет показано ниже.

3. Отбрасывание каких-либо «второстепенных» членов в формулах (2.5) для $T_{i,\,3-i}$ и $M_{i,\,3-i}$ (имеются в виду вторые и третьи члены в квадратных скобках этих формул) приводит к нарушению шестого уравнения равновесия или к появлению напряжений при смещении оболочки как твердого тела. Естественно, что эти дефекты могут привести к существенным ошибкам, как это отмечалось в [1]. Поэтому рассмотрим более тонкий вопрос о возможности упрощения формул (2.5) для T_i и M_i. Обратимся к следующим соотношениям упругости, которые отличаются от (2.5) лишь формулами для T_i и M_i

$$
\begin{aligned}
T_i &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_i + \nu\varepsilon_{3-i}) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
M_i &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\varkappa_i + \nu\varkappa_{3-i})
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Если принять эти соотношения, то в равенствах (2.2), помимо замены γ всюду величиной $-\beta$ (которая отличается от γ на $o(\beta)$), произойдет изменение некоторых коэффициентов у нескольких операторов L_{jk} на величину $O(\beta)$ (такого рода изменения могут существенно отразиться на значении Φ, см. стр. 531).

Именно, будем иметь:

$$
L_{13} = -2\nu\frac{\partial}{\partial\xi} - (1-\nu)\beta\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\varphi^2}, \quad L_{22} = 2(1+\beta)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + (1-\nu)(1+3\beta)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}
$$

$$
L_{23} = -2\frac{\partial}{\partial\varphi} + (3-\nu)\beta\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\,\partial\varphi} + 2\beta\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}, \quad L_{31} = -2\nu\frac{\partial}{\partial\xi} - (1-\nu)\beta\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\varphi^2}
$$

$$
L_{32} = -2\frac{\partial}{\partial\varphi} + (3-\nu)\beta\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\,\partial\varphi} + 2\beta\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}
$$

$$
L_{33} = 2 + 2\beta\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 4\beta\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} + 2\beta\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}
$$

(матрица $\| L_{jk} \|$ остается симметричной).

Тогда вместо равенств (2.3), (2.6) получатся следующие:

$$
\begin{aligned}
L_2\Phi = {} & (1+3\beta)\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^8} + \left[4+\frac{3}{2}(1+\nu)\beta\right]\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^6\partial\varphi^2} + [6+3(1-\nu)\beta]\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^4\partial\varphi^4} + \\
& + \left[4+\frac{3}{2}(1-\nu)\beta\right]\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^6} + (1+\beta)\frac{\partial^8\Phi}{\partial\varphi^8} + [6-3\nu(1-\nu)\beta]\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^4\partial\varphi^2} + \\
& + [8+3(1-\nu)\beta]\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^4} + 2(1+\beta)\frac{\partial^6\Phi}{\partial\varphi^6} + \beta^{-1}(1-\nu^2)(1+3\beta)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} + \\
& + \left[4+\frac{3}{2}(1-\nu)\beta\right]\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} + (1+\beta)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\varphi^4} = 0
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
L_2\Phi = {} & \Delta^4\Phi + 6\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^4\partial\varphi^2} + 8\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^4} + 2\frac{\partial^6\Phi}{\partial\varphi^6} + \\
& + (1-\nu^2)\beta^{-1}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} + 4\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial\varphi^4}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

В случае, когда на оболочку действует нормальное давление $q = q(\xi, \varphi)$, вместо уравнений (2.3), (3.2) будем соответственно иметь

$$L_1\Phi = 6(1+\nu) R^4 q / h^3 E \tag{3.4}$$

$$L_2\Phi = 6(1+\nu) R^4 q / h^3 E \tag{3.5}$$

Если выбрать q и граничные условия для оболочки таким образом, чтобы при соответствующем этому выбору решении уравнения (3.4) в нем исчезал бы член с большим параметром β^{-1}, то естественно ожидать, что существенное различие в некоторых членах с шестыми и четвертыми производными у уравнений (3.4), (3.5) (см. также (2.4), (3.2)) заметно отразится на их решениях. Имея это в виду, положим

$$q = 3q_0(3\xi^2 - 6 - \nu)\cos 2\varphi \tag{3.6}$$

Тогда частное решение уравнения (3.4) будет

$$\Phi = \frac{3}{8}(1+\nu)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\left[\frac{\xi^2}{1+\beta} - \frac{1+3\nu}{4}\frac{\beta}{(1+\beta)^2}\right]\cos 2\varphi \approx$$

$$\approx \frac{3}{8}(1+\nu)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\xi^2 \cos 2\varphi - \frac{3}{8}(1+\nu)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\beta\left(\xi^2 + \frac{1+3\nu}{4}\right)\cos 2\varphi \tag{3.7}$$

(в правой части формулы (3.7) малый член с множителем β получился за счет малых слагаемых в коэффициентах оператора L_1 из формулы (2.3); причина, по которой сохраняются указанные малые величины, объяснена в сноске[1]. Частному решению (3.7) соответствуют следующие перемещения и внутренние силовые факторы:

$$u_1 = 6(1-\nu^2)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\xi\cos 2\varphi, \qquad u_2 = 6(1-\nu^2)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\left(\xi^2 - 1 - \frac{\nu}{2}\right)\sin 2\varphi$$

$$u_3 = 12(1-\nu^2)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}(\xi^2 - 1)\cos 2\varphi \tag{3.8}$$

$$T_1 = \left[6(1-\nu^2)\frac{R^2}{h^2} + \frac{1}{2}(1-\nu)(7+\nu)\right]Rq_0\cos 2\varphi$$

$$T_{12} = -3(1-\nu)Rq_0\xi\sin 2\varphi, \qquad M_1 = -R^2 q_0\left[{}^5/_2 - \nu(3\xi^2 - 3 + {}^1/_2\nu)\right]\cos 2\varphi$$

$$M_{12} = 3(1-\nu)R^2 q_0\xi\sin 2\varphi, \qquad N_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi}\right) = 6Rq_0\xi\cos 2\varphi$$

$$T_2 = Rq_0(3\xi^2 - 6 + \nu)\cos 2\varphi, \qquad T_{21} = 0 \tag{3.9}$$

$$M_2 = -R^2 q_0(3 + 2\nu - 3\xi^2)\cos 2\varphi, \qquad M_{21} = 3(1-\nu)R^2 q_0\xi\sin 2\varphi$$

$$N_2 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \xi}\right) = Rq_0(9 + \nu - 6\xi^2)\sin 2\varphi$$

В формулах (3.8), (3.9), за исключением формулы для T_1, не указаны малые члены, которые по сравнению с приведенными столь же малы, как h^2 / R^2 по сравнению с 1. Но при выводе этих формул учитывались малые члены, когда главные взаимно уничтожались[1]. Малый

[1] Если при определении ω и $\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1$ ограничиться в операторах Λ_{jk} членами, которые обычно являются главными, и учесть в формуле (3.7) только главный член, то получим $\omega = 0$, $\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 = 0$. Учет малого члена в формуле (3.7) существенно сказывается на значении T_2. Равенство (3.9) для T_2 получено с учетом этого члена. Хотя величина T_2 оказывается пренебрежимо малой по сравнению с T_1, но изменение значения T_2 влечет невыполнение уравнений равновесия. Поэтому, во избежание возможных недоразумений, здесь сохранены малые величины в равенствах (2.3), (3.2), (3.7) и ниже в равенстве для Φ_1.

член в формуле для T_1 приведен потому, что он является величиной такого же порядка, как остальные усилия.

На краях оболочки (при $\xi = \pm\rho = \pm l/2R$, l — длина оболочки) из (3.9) получаем:

$$\begin{aligned} T_1 &= [6(1-\nu^2)R^2/h^2 + {}^1/_2(1-\nu)(7+\nu)]\,Rq_0\cos 2\varphi \\ T_{12} - M_{12}/R &= \mp 6(1-\nu)\,Rq_0\rho\sin 2\varphi \\ M_1 &= -R^2q_0\,[{}^5/_2 - \nu(3\rho^2 - 3 + {}^1/_2\nu)]\cos 2\varphi \\ N_1 + (1/R)(\partial M_{12}/\partial\varphi) &= \pm 12(1-\nu)\,Rq_0\rho\cos 2\varphi \end{aligned} \tag{3.10}$$

Следовательно, если исходить из соотношений упругости (2.5), то для цилиндрической оболочки, нагруженной давлением (3.6), при граничных условиях (3.10) получаем перемещения (3.8) и внутренние усилия и моменты (3.9). При этом напряженное состояние оболочки практически определяется усилием T_1, т. е. напряжения, соответствующие усилиям T_{12}, N_1, T_2, T_{21}, N_2 и моментам M_1, M_{12}, M_2, M_{21}, пренебрежимо малы по сравнению с напряжением, соответствующим T_1. Это напряжение $\sigma_1 = Eh(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)/(1-\nu^2) \approx T_1/h$.

Попутно укажем, как выражаются для произвольной оболочки напряжения σ_1, σ_2, σ_{12} через усилия T_i, $T_{i,\,3-i}$ и моменты M_i, $M_{i,\,3-i}$, если эти усилия и моменты определяются по формулам (2.5). Из первой формулы (1.10) и первого и третьего соотношений (2.5) (если с помощью этих соотношений выразить ε_i, $\varkappa_i$ через T_i, M_i) при $z = \pm h/2$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_i = \frac{T_i}{h} \pm \frac{6M_i}{h^2} + \frac{T_i}{h}\,[o(\chi_i) + O(\chi_{3-i})] + \frac{T_{3-i}}{h}\,[o(\chi_{3-i}) + O(\chi_i\chi_{3-i})] + {} \\ + \frac{M_i}{h^2}\,[O(\chi_i) + O(\chi_{3-i})] + \frac{M_{3-i}}{h^2}\,[O(\chi_i) + O(\chi_{3-i})] \end{aligned}$$

Поэтому, если T_i и M_i определены по формулам (2.5), то с пренебрежимо малой ошибкой по сравнению с наибольшим из напряжений σ_1, σ_2 (при фиксированных α_1, α_2 и $z = \pm h/2$) можно эти напряжения вычислить по обычной формуле

$$\sigma_i = T_i/h \pm 6M_i/h^2$$

Далее, поскольку $z/R_i \ll 1$ можно заменить формулу (1.10) приближенным равенством

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\omega - 2z\tau + \left(\frac{z}{R_1} - \frac{z}{R_2}\right)(\omega_1 - \omega_2)\right]$$

(последний член в квадратных скобках сохраняется на случай, если $\omega = 0$, т. е. $\omega_1 = -\omega_2$). Отсюда для $z = \pm h/2$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\omega \pm \frac{1}{2}\,[(\chi_1 - \chi_2)(\omega_1 - \omega_2) - 2h\tau]\right\}$$

Из этого равенства и равенств

$$\begin{aligned} T_{12} + T_{21} &= \frac{Eh}{1+\nu}\left[1 + \frac{1}{24}(\chi_1 - \chi_2)^2\right]\omega \approx \frac{Eh}{1+\nu}\,\omega \\ \chi_1 M_{12} - \chi_2 M_{21} &= \frac{Eh^2}{24(1+\nu)}(\chi_1 - \chi_2)\,[(\chi_1 - \chi_2)(\omega_1 - \omega_2) - 2h\tau] \end{aligned}$$

которые получаются на основании второй и четвертой формул (2.5), следует, что при $z = \pm h/2$

$$\sigma_{12} = \frac{T_{12} + T_{21}}{2h} \pm \frac{6}{h^2}\,\frac{M_{12}R_1^{-1} - M_{21}R_2^{-1}}{R_1^{-1} - R_2^{-1}}$$

(при $T_{12} = T_{21}$, $M_{12} = M_{21}$ эта формула обращается в обычную формулу для σ_{12}).

Обратимся теперь к соотношениям (3.1) и уравнению (3.5), где q определяется формулой (3.6). Частное решение уравнения (3.5) будет

$$\Phi_1 = \frac{3}{8}(1+\nu)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\left\{\frac{\xi^2}{1+\beta} - \left[\frac{\nu}{3} + \frac{5}{12}(3+\nu)\beta\right]\frac{1}{(1+\beta)^2}\right\}\cos 2\varphi \approx$$

$$\approx \frac{3}{8}(1+\nu)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\left(\xi^2 - \frac{\nu}{3}\right)\cos 2\varphi - \frac{3}{8}(1+\nu)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\beta\left(\xi^2 + \frac{5-\nu}{4}\right)\cos 2\varphi$$

Функции Φ_1 соответствуют величины

$$u_1 = 6(1-\nu^2)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\xi\cos 2\varphi, \qquad u_2 = 6(1-\nu^2)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\left(\xi^2 - 1 - \frac{5}{6}\nu\right)\sin 2\varphi$$

$$u_3 = 12(1-\nu^2)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\left(\xi^2 - 1 - \frac{\nu}{3}\right)\cos 2\varphi \qquad (3.11)$$

$$T_1 = \left[6(1-\nu^2)\frac{R^2}{h^2} + \frac{1}{2}(1-\nu)(7+\nu) + \nu(3\xi^2 - \nu)\right]Rq_0\cos 2\varphi$$

$$T_{12} = -3Rq_0\xi\sin 2\varphi$$

$$M_1 = -R^2 q_0\left[2 - \nu\left(3\xi^2 - 3 - \frac{\nu}{2}\right)\right]\cos 2\varphi, \qquad M_{12} = 3(1-\nu)R^2 q_0\xi\sin 2\varphi$$

$$N_1 = 6Rq_0\xi\cos 2\varphi \qquad (3.1)$$

$$T_2 = (3\xi^2 - 6 - \nu)Rq_0\cos 2\varphi, \qquad T_{21} = -3\nu\xi Rq_0\sin 2\varphi$$

$$M_2 = -R^2 q_0(3 + {}^5/_2\nu - 3\xi^2)\cos 2\varphi, \qquad M_{21} = 3(1-\nu)R^2 q_0\xi\sin 2\varphi$$

$$N_2 = (9 + 2\nu - 6\xi^2)Rq_0\sin 2\varphi$$

В формулах (3.11), (3.12) отсутствуют члены такого же порядка, как и в формулах (3.8), (3.9). Величины u_1, M_{12}, N_1, T_2, M_{21} и главная часть T_1 не изменились. При $\xi = \pm\rho$ по-прежнему будем иметь четвертое равенство (3.10), а остальные равенства (3.10) заменяются следующими:

$$T_1 = \left[6(1-\nu^2)\frac{R^2}{h^2} + \frac{1}{2}(1-\nu)(7+\nu) + \nu(3\rho^2 - \nu)\right]Rq_0\cos 2\varphi$$

$$T_{12} - \frac{M_{12}}{R} = \mp 3(2-\nu)Rq_0\rho\sin 2\varphi, \qquad M_1 = -R^2 q_0\left[2 - \nu\left(3\rho^2 - 3 - \frac{\nu}{2}\right)\right]\cos 2\varphi$$

Для того чтобы получить такое решение уравнения (3.5), которому по формулам (3.1) соответствуют T_1, T_{12}, N_1, M_1, M_{12}, удовлетворяющие всем условиям (3.10), прибавим к Φ_1 соответственно подобранное решение Φ_0 однородного уравнения (3.2). Функцию Φ_0 можно написать в виде

$$\Phi_0 = (A_1\operatorname{ch}k\xi\cos k\xi + B_1\operatorname{sh}k\xi\sin k\xi + A_2\operatorname{ch}k_1\xi\cos k_2\xi +$$
$$+ B_2\operatorname{sh}k_1\xi\sin k_2\xi)\cos 2\varphi \qquad (3.13)$$

Здесь [1]

$$k \approx \varkappa, \qquad k_1 \approx (\sqrt{3}/\varkappa)(1 + 3/2\varkappa^2), \qquad k_2 \approx (\sqrt{3}/\varkappa)(1 - 3/2\varkappa^2)$$
$$(\varkappa^4 = 3(1-\nu^2)R^2/h^2)$$

а константы A_1, A_2, B_1, B_2 должны быть подобраны так, чтобы соот-

[1] Малые слагаемые, которыми различаются k_1 и k_2, сохраняются потому, что они существенно влияют на величину некоторых производных от $\operatorname{ch}k_1\xi\cos k_2\xi$ и $\operatorname{ch}k_1\xi\sin k_2\xi$, используемых при составлении уравнений (3.15). Например, $(\operatorname{ch}k_1\xi\cos k_2\xi)' = k_1\operatorname{sh}k_1\xi\cos k_2\xi - k_2\operatorname{ch}k_1\xi\sin k_2\xi \approx 6\varkappa^{-4}\xi(3-\xi^2)$, а если положить $k_1 = k_2 = k_0 = \sqrt{3}/\varkappa$, то $(\operatorname{ch}k_0\xi\cos k_0\xi)' = k_0(\operatorname{sh}k_0\xi\cos k_0\xi - \operatorname{ch}k_0\xi\sin k_0\xi) \approx -6\varkappa^{-4}\xi^3$.

ветствующие Φ_0 величины T_1, T_{12}, N_1, M_1, M_{12} (обозначим их через T_1°, T_{12}°, ...) удовлетворяли при $\xi = \pm\rho$ условиям

$$\begin{aligned} &T_1^\circ = \nu(\nu - 3\rho^2) Rq_0 \cos 2\varphi, \qquad M_1^\circ = R^2 q_0 (\nu^2 - {}^1\!/_2) \cos 2\varphi \\ &T_{12}^\circ - M_{12}^\circ / R = \pm 3\nu R q_0 \rho \sin 2\varphi, \qquad N_1^\circ + (1/R)\, \partial M_{12}^\circ / \partial\varphi = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Пренебрегая величинами порядка h/R по сравнению с 1, можно, например, для T_1° и M_1° написать равенства

$$T_1^\circ = -2(1-\nu)\frac{Eh}{R}\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2}\,[(A_1 \operatorname{ch} k\xi \cos k\xi + B_1 \operatorname{sh} k\xi \sin k\xi + A_2 \operatorname{ch} k_1\xi \cos k_2\xi + B_2 \operatorname{sh} k_1\xi \sin k_2\xi) \cos 2\varphi]$$

$$\begin{aligned} M_1^\circ = -\frac{Eh^3}{6(1+\nu)R^2}\Big\{&\frac{\partial^6}{\partial\xi^6}\,[(A_1 \operatorname{ch} k\xi \cos k\xi + B_1 \operatorname{sh} k\xi \sin k\xi) \cos 2\varphi] + \\ &+ \nu\left(\frac{\partial^6}{\partial\varphi^6} + \frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\right)(A_2 \operatorname{ch} k_1\xi \cos k_2\xi \cos 2\varphi) + \left[\nu\left(\frac{\partial^6}{\partial\varphi^6} + \frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\right) + \right. \\ &\left. + (1+2\nu)\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\partial\varphi^4} + \nu(2+\nu)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2}\right](B_2 \operatorname{sh} k_1\xi \sin k_2\xi \cos 2\varphi)\Big\} \end{aligned}$$

и столь же простые выражения для T_{12}°, N_1°, M_{12}°. На основании этих выражений условия (3.14) приводятся к уравнениям:

$$\begin{aligned} b_1 A_1 - a_1 B_1 + a_2 A_2 - b_2 B_2 &= c_1 \varkappa^{-6} \\ b_1 A_1 - a_1 B_1 - a_2' A_2 - b_2' B_2 &= c_2 \varkappa^{-6} \\ b_1' A_1 - a_1' B_1 + a_3 A_2 - b_3 B_2 &= c_3 \varkappa^{-7} \\ b_1' A_1 - a_1' B_1 - a_3' A_2 - b_3' B_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

где [1]

$$\begin{gathered} a_1 = \operatorname{ch} k\rho \cos k\rho, \qquad a_1' = \operatorname{sh} k\rho \cos k\rho - \operatorname{ch} k\rho \sin k\rho \\ b_1 = \operatorname{sh} k\rho \sin k\rho, \qquad b_1' = \operatorname{ch} k\rho \sin k\rho + \operatorname{sh} k\rho \cos k\rho \\ a_2 \approx 9\varkappa^{-6}(\rho^2 - 1), \qquad b_2 \approx 3\varkappa^{-4}, \qquad a_2' \approx 6\nu\varkappa^{-6} \\ b_2' \approx 6\nu\varkappa^{-8}(3\rho^2 - 3 + {}^1\!/_2\nu - 2/\nu), \qquad a_3 \approx 18\varkappa^{-7}\rho \\ b_3 \approx 18\varkappa^{-9}\rho(6 - \rho^2 + 1 - {}^1\!/_2\nu), \qquad a_3' \approx 18\varkappa^{-11}\rho\,[2(2-\nu)(3-\rho^2) + 17 - 8\nu] \\ b_3' \approx 36(2-\nu)\varkappa^{-9}\rho, \qquad c_1 = {}^3\!/_{16}\nu(1+\nu)(3\rho^2 - \nu)(R^4 q_0 / h^3 E) \\ c_2 = {}^3\!/_4(1+\nu)({}^1\!/_2 - \nu^2)(R^4 q_0 / h^3 E), \qquad c_3 = {}^9\!/_8\nu(1+\nu)\rho(R^4 q_0 / h^3 E) \end{gathered}$$

Из (3.15), полагая $\varkappa^{-1} \ll \rho \ll \varkappa$ и пренебрегая величинами порядка h/R по сравнению с единицей, получаем:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{3}{4}\frac{q_0 R^4}{Eh^3}(1+\nu)(1-\nu^2)\varkappa^{-6}\frac{\operatorname{sh}\varkappa\rho\cos\varkappa\rho - \operatorname{ch}\varkappa\rho\sin\varkappa\rho}{\operatorname{sh}2\varkappa\rho + \sin 2\varkappa\rho} \\ B_1 &= -\frac{3}{4}\frac{q_0 R^4}{Eh^3}(1+\nu)(1-\nu^2)\varkappa^{-6}\frac{\operatorname{ch}\varkappa\rho\sin\varkappa\rho + \operatorname{sh}\varkappa\rho\cos\varkappa\rho}{\operatorname{sh}2\varkappa\rho + \sin 2\varkappa\rho} \\ A_2 &= \frac{1}{16}\frac{q_0 R^4}{Eh^3}\nu(1+\nu), \qquad B_2 = \frac{1}{8}\frac{q_0 R^4}{Eh^3}\varkappa^{-2}(1+\nu)\left(1 - \frac{3}{2}\nu - \frac{\nu^2}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Отметим попутно следующее. На основании (3.13), (3.16)

$$\Phi_0 \approx A_2 \operatorname{ch} k_1\xi \cos k_2\xi \cos 2\varphi \approx \frac{1}{16}\frac{q_0 R^4}{Eh^3}\nu(1+\nu)\cos 2\varphi$$

---

[1] Указанные коффициенты при A_2, B_2 получены при помощи таких приближенных равенств, как

$$a_2 = {}^1\!/_2\varkappa^{-2}\,[2k_1k_2 \operatorname{sh} k_1\rho \sin k_2\rho - (k_1^2 - k_2^2)\operatorname{ch} k_1\rho \cos k_2\rho] \approx 9\varkappa^{-6}(\rho^2 - 1)$$

Следовательно, главная часть функции $\Phi_0 + \Phi_1$, равная

$$\frac{3}{8}(1+\nu)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\left(\xi^2 - \frac{\nu}{6}\right)\cos 2\varphi$$

отличается от главной части функции Φ, определяемой формулой (3.7). Тем самым установлено, что изменение коэффициентов некоторых операторов Λ_{jk} на величину $O(\beta)$ (что соответствует переходу от (2.5) к (3.1)) может существенно изменить разрешающую функцию Φ, соответствующую полному решению краевой задачи. Используя (3.16) и пренебрегая величинами порядка h/R по сравнению с единицей, находим

$$u_1^\circ = -3\nu(1-\nu^2)\frac{q_0 R^4}{Eh^3}\varkappa^{-3}\left[(1-\nu^2)f_2(\xi) + \left(\xi^2 + \frac{5}{2}\nu - \frac{2}{\nu}\right)\xi\varkappa^{-1}\right]\cos 2\varphi$$

$$u_2^\circ = \nu(1-\nu^2)\frac{q_0 R^4}{Eh^3}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{\varkappa}\xi\cos\frac{\sqrt{3}}{\varkappa}\xi\sin 2\varphi \approx \nu(1-\nu^2)\frac{q_0 R^4}{Eh^3}\sin 2\varphi \tag{3.17}$$

$$u_3^\circ = 2\nu(1-\nu^2)\frac{q_0 R^4}{Eh^3}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{\varkappa}\xi\cos\frac{\sqrt{3}}{\varkappa}\xi\cos 2\varphi \approx 2\nu(1-\nu^2)\frac{q_0 R^4}{Eh^3}\cos 2\varphi$$

(u_1°, u_2°, u_3° — перемещения, соответствующие Φ_0)

$$\begin{aligned}
T_1^\circ &= q_0 R\{2(1-\nu^2)[1+2f_1(\xi)] + \nu(\nu - 3\xi^2)\}\cos 2\varphi \\
T_2^\circ &= q_0 R[{}^1\!/_2\nu - 2(1-\nu^2)\varkappa^2 f_2(\xi)]\cos 2\varphi \\
T_{12}^\circ \approx T_{21}^\circ &= q_0 R[4(1-\nu^2)\varkappa f_3(\xi) + 3\nu\xi]\sin 2\varphi \\
N_1^\circ &= -2(1-\nu^2)q_0 R\varkappa f_3(\xi)\cos 2\varphi \\
N_2^\circ &= -2q_0 R[(1-\nu^2)f_1(\xi) + {}^1\!/_2\nu]\sin 2\varphi \\
M_1^\circ &= q_0 R^2[(1-\nu^2)f_1(\xi) + {}^1\!/_2\nu^2]\cos 2\varphi \\
M_2^\circ &= q_0 R^2\nu[(1-\nu^2)f_1(\xi) + {}^1\!/_2]\cos 2\varphi \\
M_{12}^\circ \approx M_{21}^\circ &= 2(1-\nu)(1-\nu^2)q_0 R^2\varkappa^{-1}f_4(\xi)\sin 2\varphi
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
f_1(\xi) = {}&[(\operatorname{sh}\varkappa\rho\cos\varkappa\rho - \operatorname{ch}\varkappa\rho\sin\varkappa\rho)\operatorname{sh}\varkappa\xi\sin\varkappa\xi - (\operatorname{ch}\varkappa\rho\sin\varkappa\rho + \\
&+ \operatorname{sh}\varkappa\rho\cos\varkappa\rho)\operatorname{ch}\varkappa\xi\cos\varkappa\xi](\operatorname{sh}2\varkappa\rho + \sin 2\varkappa\rho)^{-1} \\
f_2(\xi) = {}&[(\operatorname{sh}\varkappa\rho\cos\varkappa\rho - \operatorname{ch}\varkappa\rho\sin\varkappa\rho)\operatorname{ch}\varkappa\xi\cos\varkappa\xi - (\operatorname{ch}\varkappa\rho\sin\varkappa\rho + \\
&+ \operatorname{sh}\varkappa\rho\cos\varkappa\rho)\operatorname{sh}\varkappa\xi\sin\varkappa\xi](\operatorname{sh}2\varkappa\rho + \sin 2\varkappa\rho)^{-1} \\
f_3(\xi) = {}&(\operatorname{ch}\varkappa\rho\sin\varkappa\rho\operatorname{sh}\varkappa\xi\cos\varkappa\xi - \\
&- \operatorname{sh}\varkappa\rho\cos\varkappa\rho\operatorname{ch}\varkappa\xi\sin\varkappa\xi)(\operatorname{sh}2\varkappa\rho + \sin 2\varkappa\rho)^{-1} \\
f_4(\xi) = {}&(\operatorname{ch}\varkappa\rho\sin\varkappa\rho\operatorname{ch}\varkappa\xi\sin\varkappa\xi + \operatorname{sh}\varkappa\rho\cos\varkappa\rho\operatorname{sh}\varkappa\xi\cos\varkappa\xi)(\operatorname{sh}2\varkappa\rho + \sin 2\varkappa\rho)^{-1}
\end{aligned}$$

Учитывая введенное ограничение $\varkappa^{-1} \ll \rho \ll \varkappa$ и имея в виду, что $|\xi| \leqslant \rho$, нетрудно получить следующие оценки:

$$|f_1(\xi)| < 3, \qquad |f_2(\xi)| < 3, \qquad |f_3(\xi)| < 1.5, \qquad |f_4(\xi)| < 1.5$$

Поэтому величины u_1° и T_1° пренебрежимо малы по сравнению с величинами u_1^1 и T_1^1, которые соответствуют решению Φ_1. Следовательно, решению $\Phi_0 + \Phi_1$ будут соответствовать (3.19)

$$u_1 = 6(1-\nu^2)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\xi\cos 2\varphi, \qquad u_2 = 6(1-\nu^2)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\left(\xi^2 - 1 - \frac{2}{3}\nu\right)\sin 2\varphi$$

$$u_3 = 12(1-\nu^2)\frac{R^4 q_0}{h^3 E}\left(\xi^2 - 1 - \frac{1}{6}\nu\right)\cos 2\varphi, \qquad T_1 = 6(1-\nu^2)\frac{R^3 q_0}{h^2}\cos 2\varphi$$

Кроме того, из формул (3.18) и (3.12) следует, что напряженное состояние, соответствующее решению $\Phi_0 + \Phi_1$, практически определяется только усилием T_1.

Таким образом, если исходить из соотношений упругости (3.1), то для цилиндрической оболочки, нагруженной давлением (3.6), при граничных условиях (3.10) получается практически то же самое напряженное состояние, что и на основании соотношений (2.5), и такое же перемещение u_1, но другие перемещения u_2, u_3, которые являются величинами такого же порядка, как и u_1. При $\rho \leqslant \sqrt{2}$ ($l \leqslant 2\sqrt{2}R$), $\nu = 0.3$ различие в максимальных абсолютных значениях u_3 (т. е. значениях $|u_3|$ при $\xi = 0$), как видно из формул (3.8), (3.19), составляет 5%. Хотя это расхождение нельзя назвать большим, но важно, что оно не зависит от h/R; в этом смысле оно является существенным. Разумеется, указанное расхождение не связано с перемещением оболочки, как твердого тела, поскольку такое перемещение определяется величинами u_1, u_2, u_3 вида

$$u_1 = a + a'\cos\varphi + a''\sin\varphi, \qquad u_2 = b + (b' + a'\xi)\sin\varphi + (b'' - a''\xi)\cos\varphi$$
$$u_3 = (b' + a'\xi)\cos\varphi - (b'' - a''\xi)\sin\varphi$$

(a, a', a'', b, b', b'' — произвольные константы). То обстоятельство, что разница между двумя полученными значениями перемещений u_2, u_3 (см. (3.8), (3.19)) пропорциональна ν, обусловлена тем, что разность между соответствующими коэффициентами уравнений (3.4), (3.5) также пропорциональна ν (см. (2.4), (3.3)).

Аналогичные результаты получаются, если вместо (3.1) использовать соотношения упругости, которые отличаются от (2.5) лишь формулой $T_i = [Eh/(1-\nu^2)](\varepsilon_i + \nu\varepsilon_{3-i})$ или формулой $M_i = -[Eh^3/12(1-\nu^2)] \times \times (\varkappa_i + \nu\varkappa_{3-i})$. Что касается упрощения формулы (2.5) для T_i за счет отбрасывания одной из величин $\chi_i\varepsilon_i$ или $h\varkappa_i$, то в общем случае оно лишено основания: эти величины, вообще говоря, одного и того же порядка [1].

4. Указанный пример не является единственным. Подобные примеры получаются при любой нагрузке вида $q = Q(\xi)\cos n\varphi$, где $n = 2, 3, \ldots$, а $Q(\xi)$ — многочлен второй или третьей степени. Тогда уравнения (3.4), (3.5) имеют частные решения (такого же вида, как и q), при которых в выражениях (2.4), (3.3) исчезает член с большим множителем β^{-1}, а члены, которыми отличаются выражения (2.4), (3.3), не являются величинами, пренебрежимо малыми по сравнению с другими членами указанных выражений, если n сравнительно невелико. Такие решения, очевидно, существенно (в вышеуказанном смысле) отличаются одно от другого (с ростом n разница между ними уменьшается, поэтому в рассмотренном примере взято $n = 2$). Наличие этих частных решений уравнения (3.4), (3.5) при некоторых граничных условиях приводит к существенно различным функциям Ф, что обусловливает существенное различие соответствующих перемещений.

В этих примерах различие в максимальных напряжениях получается пренебрежимо малым (относительное расхождение является величиной $O(h/R)$). Можно указать другого рода примеры, когда соотношения упругости (2.5), (3.1) формально приводят к существенно различным наибольшим напряжениям. Это различие получается не из-за разницы между раз-

[1] Следует лишь заметить, что для цилиндрической оболочки отбрасывание величины $\chi_i\varepsilon_i$ в формуле (2.5) для T_i не изменяет уравнения (2.3).

решающими функциями, а по иной причине. Она состоит в том, что при некоторых разрывных нагрузках в формулах, по которым определяются внутренние силовые факторы через разрешающую функцию, члены, имеющие особенность, зависят от выбора соотношений упругости, в частности, соотношений для изгибающих моментов.

Обратимся к случаю, когда на цилиндрическую оболочку действует тангенциальная сила Q_1 (в осевом направлении) или Q_2 (в окружном направлении), равномерно распределенная по прямоугольному элементу σ поверхности оболочки. Элемент σ ограничен двумя отрезками образующих с длиной $2a = 2R\alpha$ и двумя дугами направляющих окружностей с длиной $2b = 2R\beta$. В этом случае (см. [5]) из всех внутренних силовых факторов неограниченным является лишь усилие $N_2 = N_2^{(1)}$ (если действует сила Q_1) или усилие $N_1 = N_1^{(2)}$ (если действует сила Q_2). Они неограничены в окрестностях угловых точек (с координатами $\xi = \pm\alpha$, $\varphi = \pm\beta$) нагруженного элемента σ, и формально им соответствуют наибольшие напряжения (это не противоречит гипотезам Кирхгофа — Лява при вышеприведенной их формулировке). На основании соотношений упругости, совпадающих в отношении T_i, M_i с (3.1), для $N_2^{(1)}$ и $N_1^{(2)}$ в [5] были получены следующие асимптотические формулы

$$N_2{}^{(1)} \approx \mp \frac{1+\nu}{64\pi} \frac{h^2 Q_1}{Rs} \ln \rho, \qquad N_1{}^{(2)} \approx \mp \frac{7-\nu}{192\,\pi} \frac{h^2 Q_2}{Rs} \ln \rho$$

$$\rho^2 = (\xi \pm \alpha)^2 + (\varphi \pm \beta)^2$$

Здесь $s = 4ab$ — площадь элемента σ, а h — толщина оболочки, которая в [5] обозначена через $2h$. При использовании соотношений упругости (2.5) получаются другие и более гармонирующие друг с другом формулы

$$N_2{}^{(1)} \approx \mp \frac{1+\nu}{48\pi} \frac{h^2 Q_1}{Rs} \ln \rho, \qquad N_1{}^{(2)} \approx \mp \frac{1-\nu}{48\pi} \frac{h^2 Q_2}{Rs} \ln \rho.$$

Они отличаются от предыдущих[1] соответственно на 33.3% и 58.2% независимо от значения h/R.

Оправдать в данном случае упрощенные соотношения (3.1) можно лишь на основании практических соображений, указав на следующие

---

[1] При соотношениях упругости, использованных в [5], усилия $N_2^{(1)}$ и $N_1^{(2)}$ выражаются через разрешающую функцию с помощью операторов, содержащих соответственно следующие комбинации восьмых производных (из различных производных, входящих в эти операторы, только старшие, восьмые, имеют особенность):

$$(1+\nu)\frac{\partial^8}{\partial\xi^7\partial\varphi} + (1+\nu)\frac{\partial^8}{\partial\xi^5\partial\varphi^3}, \qquad 2\frac{\partial^8}{\partial\xi^7\partial\varphi} + (3-\nu)\frac{\partial^8}{\partial\xi^5\partial\varphi^3} + (1-\nu)\frac{\partial^8}{\partial\xi^3\partial\varphi^5}$$

Вместо этих выражений при использовании соотношений (2.5) получаются следующие:

$$(2+\nu)\frac{\partial^8}{\partial\xi^7\partial\varphi} + (3+2\nu)\frac{\partial^8}{\partial\xi^5\partial\varphi^3} + \nu\frac{\partial^8}{\partial\xi^3\partial\varphi^5} - \frac{\partial^8}{\partial\xi\,\partial\varphi^7}$$

$$2\frac{\partial^8}{\partial\xi^7\partial\varphi} + (3-\nu)\frac{\partial^8}{\partial\xi^5\partial\varphi^3} - 2\nu\frac{\partial^8}{\partial\xi^3\partial\varphi^5} - (1+\nu)\frac{\partial^8}{\partial\xi\,\partial\varphi^7}$$

Это и приводит к указанному различию соответствующих асимптотических формул.

обстоятельства. Если a и b соизмеримы с R, то определенные по асимптотическим формулам усилия $N_2^{(1)}$ и $N_1^{(2)}$ соответственно меньше (по модулю), чем

$$(h^2/R^2)(Q_1/R)|\ln\rho| \text{ и } (h^2/R^2)(Q_2/R)|\ln\rho|$$

а усилия $T_1^{(1)}$ и $T_2^{(2)}$, грубо говоря, характеризуются величинами Q_1/R и Q_2/R. Поэтому усилия $N_2^{(1)}$ и $N_1^{(2)}$ могут соответственно превышать $T_1^{(1)}$ и $T_2^{(2)}$ лишь в точках, чрезвычайно близких к угловым, отстоящих от них на расстоянии $r = R\rho < h(R/h)\exp(-R^2/h^2) \ll h$. Между тем на практике вместо угловых точек граница элемента σ будет иметь закругления с радиусами, большими, чем указанные значения r. Кроме того, большей, чем эти значения r, будет ширина зоны, примыкающей к границе элемента σ, где фактическая нагрузка будет затухать. Следовательно, в данном случае существование точек, в которых усилия $N_2^{(1)}$ и $N_1^{(2)}$ будут основными, не является реальным. Если же a и b достаточно малы, то элемент σ практически можно рассматривать как овальную область с переменным радиусом $r = R\rho$ и считать, что наибольшие значения усилий $T_1^{(1)}$, $N_2^{(1)}$ ($T_2^{(2)}$, $N_1^{(2)}$) будут примерно равны значениям этих усилий на границе элемента σ от действия силы Q_1 (Q_2), сосредоточенной в центре σ. Они могут быть найдены по асимптотическим формулам, приведенным в [5] (стр. 169, 170), из которых следует, что $N_2^{(1)}$ ($N_1^{(2)}$) может быть больше $T_1^{(1)}$ ($T_2^{(2)}$) лишь при $r \ll h$, что тоже нереально.

Однако в теоретическом отношении с различием приведенных асимптотических формул нельзя не считаться.

5. В связи с рассматриваемым вопросом следует упомянуть о работе [6]. В ней по существу был сделан следующий вывод: если исходить из гипотез Кирхгофа — Лява, то соотношения упругости следует принимать в наиболее упрощенном виде, т. е. писать их так, как они записываются для пластинки. Этот вывод основан на том, что гипотезы, более общие чем гипотезы Кирхгофа — Лява, приводят, в частности, к формуле для M_1, которая отличается от соответствующей формулы (2.5) тремя дополнительными членами, из которых один, а может быть два (оценка второго из этих членов в работе [6] недостаточно обоснована), такого же порядка, как и член ε_1 в указанной формуле (2.5). Строго говоря, из этого еще ничего не следует, так как алгебраическая сумма может быть величиной более высокого порядка малости, чем отдельные слагаемые. Кроме того, даже если сумма указанных трех дополнительных членов есть величина такого же порядка, как и первый из них, то не исключено, что при еще более общих гипотезах или при использовании уравнений теории упругости поправка к формуле (2.5) для M_1 (хотя бы для определенного класса задач) будет величиной более высокого порядка малости, чем член с ε_1 в этой формуле. Наконец, разного рода поправки в соотношениях упругости, будучи величинами одного и того же порядка, могут в разной мере сказываться на решении (см. сноску на стр. 532). Поэтому нет достаточных оснований для утверждения, что погрешность, вносимая гипотезами Кирхгофа—Лява, есть величина такого же порядка, как и поправки, получаемые за счет уточнения простейших соотношений упругости, даже если

иметь в виду только соотношения для T_i и M_i. Что же касается таких поправок, то, как выяснено, они могут быть существенными. Заметим, кстати, что выявленные здесь эффекты от упрощения формул (2.5) для T_i, M_i получаются и при упрощении формул (2.5) для $T_{i,3-i}$, $M_{i,3-i}$.

Таким образом, соображение, изложенное в [1], результаты работы [2] и исследование, проведенное в данной работе, приводят к следующему выводу: если, кроме погрешности от гипотез Кирхгофа — Лява, допускать лишь погрешность порядка h/R, то в общем случае (для произвольной оболочки при произвольной нагрузке) незаконно заменять соотношения упругости (1.12) более простыми формулами, чем формулы (2.5).

6. В заключение отметим один любопытный факт, благодаря которому использованный пример цилиндрической оболочки, находящийся под давлением (3.6), при граничных условиях (3.10) приобретает самостоятельный интерес.

В равенстве (3.6) положим $q_0 = q_* h^2/R^2$, где $q_* = 1$ *кг/см*^{2}. Считая $\xi \leqslant \rho < \sqrt{R/h}$, будем иметь, что при достаточно малом h/R величина $\max|q|$ сколь угодно мала. Но при этом в оболочке будет действовать строго постоянное по длине (незатухающее) осевое усилие T_1, самоуравновешенное на каждом крае оболочки и равное, согласно первой формуле (3.9), $6Rq_* \cos 2\varphi$ (эта величина не изменяется при уменьшении $\max|q|$ с уменьшением h/R). Напряжение, соответствующее этому усилию, $\sigma_1 = 6Rh^{-1} q_* \cos 2\varphi$ будет сколь угодно велико, поскольку h/R считается достаточно малым. Например, при $\rho = 3$ ($l = 6R$) и $h/R = 1/400$ будем иметь $\max|q| = 0.000376$ *кг/см*^{2}, т. е. давление практически отсутствует. Но благодаря этому ничтожному давлению самоуравновешенное на каждом крае оболочки усилие $T_1 = 6Rq_* \cos 2\varphi$ остается строго постоянным по всей длине оболочки, причем $\max|\sigma_1| = 2400$ *кг/см*^{2}. Если бы давление q строго равнялось нулю, то уравновешенное на каждом крае оболочки усилие $T_1 \neq 0$ не могло бы оставаться постоянным по длине оболочки в силу принципа Сен-Венана. Указанный пример качественно отличен от известного случая, когда поверхностная нагрузка строго равняется нулю, а самоуравновешенное на каждом крае оболочки усилие T_1 лишь практически остается постоянным по длине оболочки из-за весьма медленного затухания (такого рода случай можно осуществить, если взять в качестве Φ выражение (3.13) при $A_1 = B_1 = A_2 = 0$ и задать статические граничные условия, которые удовлетворяются при указанном выборе Φ).

Поступила 19 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехтеоретиздат, М., 1953.
2. Knowles K., Reissner E. Note on stress-strain relations for thin elastic shells, J. of Math. and Physics, v. 37, № 3, 1958.
3. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ, 1940, т. 4, вып. 2.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1935.
5. Даревский В. М. Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.
6. Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек. ПММ, 1943, т. VII, вып. 5.