Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ТЕНЗОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В. Д. Бондарь

(Новосибирск)

Описание конечных деформаций сплошной среды связано с использованием тензоров в пространстве начальных состояний и в деформированном пространстве, у которых равны компоненты, с каким-либо фиксированным строением индексов (см. [1]). В упомянутых двух пространствах можно ввести одинаковые лагранжевы координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3-частиц среды, определенные в системе координат деформированного пространства с ковариантным и контравариантным базисами $\hat{\partial}_i$ и $\hat{\partial}^i$, $i = 1, 2, 3$ или в системе координат пространства начальных состояний с базисами $\mathring{\partial}_i$ и $\mathring{\partial}^i$. Метрика рассматриваемых пространств различна. Если через $d\mathring{s}$ и ds обозначить элементы длин соответственно начального и деформированного пространств, будем иметь

$$d\mathring{s}^2 = \mathring{g}_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \qquad ds^2 = \hat{g}_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \qquad (\mathring{g}_{\alpha\beta} = (\mathring{\partial}_\alpha, \mathring{\partial}_\beta), \ \hat{g}_{\alpha\beta} = (\hat{\partial}_\alpha, \hat{\partial}_\beta)) \qquad (0.1)$$

Будем рассматривать тензоры как инвариантные объекты, связанные с частицами деформируемой среды. Возьмем в деформированном пространстве некоторый тензор второго ранга

$$H = \hat{H}_{\alpha\beta} \hat{\partial}^\alpha \hat{\partial}^\beta = \hat{H}^\alpha{}_\beta \hat{\partial}_\alpha \hat{\partial}^\beta = \hat{H}_\alpha{}^\beta \hat{\partial}^\alpha \hat{\partial}_\beta = \hat{H}^{\alpha\beta} \hat{\partial}_\alpha \hat{\partial}_\beta \qquad (0.2)$$

В пространстве начальных состояний можно рассмотреть тензоры $\mathring{H}_1$, $\mathring{H}_2$, $\mathring{H}_3$ и $\mathring{H}_4$, которые имеют равные с тензором H соответственно ковариантные, смешанные и контравариантные компоненты

$$\mathring{H}_1 = \hat{H}_{\alpha\beta} \mathring{\partial}^\alpha \mathring{\partial}^\beta, \qquad \mathring{H}_2 = \hat{H}^\alpha{}_\beta \mathring{\partial}_\alpha \mathring{\partial}^\beta, \qquad \mathring{H}_3 = \hat{H}_\alpha{}^\beta \mathring{\partial}^\alpha \mathring{\partial}_\beta, \qquad \mathring{H}_4 = \hat{H}^{\alpha\beta} \mathring{\partial}_\alpha \mathring{\partial}_\beta. \qquad (0.3)$$

Ввиду того, что «жонглирование» индексами в деформированном и начальном пространствах осуществляется при помощи различных тензоров $\hat{g}_{\alpha\beta}$ и $\mathring{g}_{\alpha\beta}$ компоненты тензоров $\mathring{H}_i$, имеющие строение индексов, отличное от приведенного выше, не равны соответствующим компонентам тензора H. Совершенно аналогично любому тензору второго ранга $\mathring{H}$, рассматриваемому в пространстве начальных состояний

$$\mathring{H} = \mathring{H}_{\alpha\beta} \mathring{\partial}^\alpha \mathring{\partial}^\beta = \mathring{H}^\alpha{}_\beta \mathring{\partial}_\alpha \mathring{\partial}^\beta = \mathring{H}_\alpha{}^\beta \mathring{\partial}^\alpha \mathring{\partial}_\beta = \mathring{H}^{\alpha\beta} \mathring{\partial}_\alpha \mathring{\partial}_\beta \qquad (0.4)$$

в деформированном пространстве соответствуют тензоры

$$H_1 = \mathring{H}_{\alpha\beta} \hat{\partial}^\alpha \hat{\partial}^\beta, \qquad H_2 = \mathring{H}^\alpha{}_\beta \hat{\partial}_\alpha \hat{\partial}^\beta, \qquad H_3 = \mathring{H}_\alpha{}^\beta \hat{\partial}^\alpha \hat{\partial}_\beta, \qquad H_4 = \mathring{H}^{\alpha\beta} \hat{\partial}_\alpha \hat{\partial}_\beta \qquad (0.5)$$

обладающие аналогичными свойствами. Подобные рассуждения можно повторить по отношению к тензорам H_i и $\mathring{H}_i$ $i = 1,2,3,4$ и рассмотреть новые группы тензоров и т. д. В итоге для исходных тензоров H и $\mathring{H}$ получим бесконечную последовательность тензоров как в начальном, так и в деформированном пространствах. Ниже исследуются закономерности образования тензоров, входящих в последовательности, построенные для метрических тензоров, тензоров конечной деформации и, наконец, для произвольных тензоров второго порядка и указывается приложение новых тензорных характеристик к выводу уравнений состояния среды и к определению скорости напряжений.

1. Рассмотрим метрические тензоры $\mathring{G}$ и G начального и деформированного пространств. В соответствии с формулами (0.1) имеем

$$\begin{gathered}\mathring{G} = \mathring{g}_{\alpha\beta}\mathring{\partial}^{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta} = \delta_{\beta}{}^{\alpha}\mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta} = \mathring{g}^{\alpha\beta}\mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}_{\beta}, \quad G = \hat{g}_{\alpha\beta}\hat{\partial}^{\alpha}\hat{\partial}^{\beta} = \delta_{\beta}{}^{\alpha}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}^{\beta} = \hat{g}^{\alpha\beta}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}_{\beta} \\ \mathring{g}^{\alpha\beta} = (\mathring{\partial}^{\alpha}, \mathring{\partial}^{\beta}), \quad \hat{g}^{\alpha\beta} = (\hat{\partial}^{\alpha}, \hat{\partial}^{\beta}), \quad \delta_{\beta}{}^{\alpha} = (\mathring{\partial}^{\alpha}, \mathring{\partial}_{\beta}) = (\hat{\partial}^{\alpha}, \hat{\partial}_{\beta}) = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases}\end{gathered} \tag{1.1}$$

Тензору G в пространстве начальных состояний соответствуют тензоры

$$\begin{gathered}\mathring{G} = \delta_{\beta}{}^{\alpha}\mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta}, \quad \mathring{A} = \hat{g}_{\alpha\beta}\mathring{\partial}^{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta} = \mathring{g}^{\alpha\sigma}\hat{g}_{\sigma\beta}\mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta} = \mathring{g}^{\alpha\sigma}\hat{g}_{\sigma k}\mathring{g}^{k\beta}\mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}_{\beta} \\ \mathring{B} = \hat{g}^{\alpha\beta}\mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}_{\beta} = \hat{g}^{\alpha\sigma}\mathring{g}_{\sigma\beta}\mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta} = \mathring{g}_{\alpha k}\hat{g}^{k\sigma}\mathring{g}_{\sigma\beta}\mathring{\partial}^{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta}\end{gathered} \tag{1.2}$$

а тензору $\mathring{g}$ в деформированном пространстве — тензоры

$$\begin{gathered}G = \delta_{\beta}{}^{\alpha}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}^{\beta}, \quad A = \mathring{g}_{\alpha\beta}\hat{\partial}^{\alpha}\hat{\partial}^{\beta} = \hat{g}^{\alpha\sigma}\mathring{g}_{\sigma\beta}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}^{\beta} = \hat{g}^{\alpha\sigma}\mathring{g}_{\sigma k}\hat{g}^{k\beta}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}_{\beta} \\ B = \mathring{g}^{\alpha\beta}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}_{\beta} = \mathring{g}^{\alpha\sigma}\hat{g}_{\sigma\beta}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}^{\beta} = \hat{g}_{\alpha k}\mathring{g}^{k\sigma}\hat{g}_{\sigma\beta}\hat{\partial}^{\alpha}\hat{\partial}^{\beta}\end{gathered} \tag{1.3}$$

Видим, что тензоры, имеющие равные с тензорами G и $\mathring{G}$ смешанные компоненты, будут тоже метрическими, а тензоры $\mathring{A}\,(A)$ и $\mathring{B}\,(B)$, у которых одинаковы с тензором $G(\mathring{G})$ соответственно ковариантные и контравариантные компоненты — новые тензоры. Очевидно, что новые тензоры симметричные и соответственно обратны один другому: $\mathring{B} = \mathring{A}^{-1}$, $B = A^{-1}$ и что смешанные компоненты у тензоров $\mathring{A}\,\|\mathring{a}_j{}^i\|$ и $B = \|\hat{b}_j{}^i\|$, $A = \|\hat{a}_j{}^i\|$ и $\mathring{B} = \|\mathring{b}_j{}^i\|$ одинаковы

$$\mathring{a}_j{}^i = \hat{b}_j{}^i = \mathring{g}^{i\sigma}\hat{g}_{\sigma j}, \qquad \mathring{b}_j{}^i = \hat{a}_j{}^i = \hat{g}^{i\sigma}\mathring{g}_{\sigma j} \tag{1.4}$$

Тензорам A, A^{-1} и $\mathring{A}$, $\mathring{A}^{-1}$, в свою очередь, в начальном и деформированном пространствах соответствуют тензоры

$$\mathring{B} = \mathring{b}_{\beta}{}^{\alpha},\ \mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta}, \qquad \mathring{G} = \mathring{g}_{\alpha\beta}\mathring{\partial}^{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta}, \qquad \mathring{B}_2 = \mathring{b}_k{}^{\alpha}\mathring{b}_e{}^{k}\mathring{g}^{e\beta}\mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}_{\beta} \tag{1.5}$$

$$\mathring{A} = \mathring{a}_{\beta}{}^{\alpha}\mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta}, \qquad \mathring{A}_2 = \mathring{g}_{\alpha e}\mathring{a}_{\sigma}{}^{e}\mathring{a}_{\beta}{}^{\sigma}\mathring{\partial}^{\alpha}\mathring{\partial}^{\beta}, \qquad \mathring{G} = \mathring{g}^{\alpha\beta}\mathring{\partial}_{\alpha}\mathring{\partial}_{\beta} \tag{1.6}$$

$$B = \hat{b}_{\beta}{}^{\alpha}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}^{\beta}, \qquad G = \hat{g}_{\alpha\beta}\hat{\partial}^{\alpha}\hat{\partial}^{\beta}, \qquad B_2 = \hat{b}_k{}^{\alpha}\hat{b}_e{}^{k}\hat{g}^{e\beta}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}_{\beta} \tag{1.7}$$

$$A = \hat{a}_{\beta}{}^{\alpha}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}^{\beta}, \qquad A_2 = \hat{g}_{\alpha e}\hat{a}_{\sigma}{}^{e}\hat{a}_{\beta}{}^{\sigma}\hat{\partial}^{\alpha}\hat{\partial}^{\beta}, \qquad G = \hat{g}^{\alpha\beta}\hat{\partial}_{\alpha}\hat{\partial}_{\beta} \tag{1.8}$$

среди которых новыми будут тензоры $\mathring{A}_2$, $\mathring{B}_2$, A_2 и B_2. Для последних справедливы соотношения

$$\mathring{A}_2 = \mathring{A}^2, \qquad \mathring{B}_2 = \mathring{B}^2 = \mathring{A}^{-2}, \qquad A_2 = A^2, \qquad B_2 = B^2 = A^{-2} \tag{1.9}$$

т. е. новые тензоры снова представимы как степени тензора $\mathring{A}$ в начальном и тензора A в деформированном пространствах.

Нетрудно заметить закономерность, которой следуют тензоры, получающиеся при указанном порядке установления соответствия. Так тензору A, например, в начальном пространстве соответствуют три тензора: $\mathring{A}^{-1}$, $\mathring{G}$, $\mathring{A}^{-2}$. Из них первый тензор $\mathring{A}^{-1}$, имеющий равные с тензором A смешанные компоненты, имеет показатель степени, численно равный показателю степени тензора A, но противоположный по знаку. Второй тензор $\mathring{G}$, имеющий равные с тензором A ковариантные компоненты, получается умножением на тензор $\mathring{A}$ первого тензора; третий тензор $\mathring{A}^{-2}$, у которого одинаковы с тензором A контравариантные компоненты, получается умножением первого тензора на тензор A^{-1}.

Легко видеть, что это правило выполняется и для тензоров (1.2), соответствующих тензору G, и для тензоров (1.6), соответствующих тензору A^{-1}. Аналогичное свойство имеется для тензоров (1.3), (1.7) и (1.8) деформированного пространства, соответствующих тензорам $\mathring{G}$, $\mathring{A}$ и $\mathring{A}^{-1}$ соответственно.

Как видно из предыдущего, процесс образования новых тензоров состоит из отдельных этапов. Поэтому приведенное выше правило будет доказано, если докажем его для $n+1$ этапа, считая, что на n-м этапе оно справедливо.

В соответствии с предыдущим рассмотрением будем иметь на n-м этапе тензоры $\mathring{A}^{-n+1}$, $\mathring{A}^{-n+2}$, $\mathring{A}^{-n}$; $\mathring{A}^{n-1}$, $\mathring{A}^{n}$, $\mathring{A}^{n-2}$ в начальном и тензоры A^{-n+1}, A^{-n+2}, A^{-n}; A^{n-1}, A^{n}, A^{n-2} в деформированных пространствах, где новыми будут тензоры $\mathring{A}^{-n}$, $\mathring{A}^{n}$, A^{-n} и A^{n} (остальные тензоры рассматривались до этого этапа). Рассмотрим тензоры, соответствующие новым тензорам. Возьмем тензор

$$A^{-n}=\hat{B}_j{}^i\hat{\partial}_i\hat{\partial}^j=\hat{g}_{i\alpha}\hat{B}_j{}^{\alpha}\hat{\partial}^i\hat{\partial}^j=\hat{B}_{\alpha}{}^i\hat{g}^{\alpha j}\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j, \qquad \hat{B}_j{}^i=\hat{b}_{\sigma_1}{}^i\hat{b}_{\sigma_2}{}^{\sigma_1}\ldots\hat{b}_j^{\sigma_{n-1}} \tag{1.10}$$

В начальном пространстве ему соответствуют три тензора: тензор, у которого такие же смешанные компоненты, ввиду равенств (1.4) и (1.10) есть $\mathring{A}^{n}$, у тензоров, имеющих равные с тензором A^{-n} соответственно ковариантные и контравариантные компоненты, смешанные компоненты будут иметь вид $\mathring{a}_{\alpha}{}^i\hat{B}_j{}^{\alpha}$ и $\hat{B}_{\alpha}{}^i\mathring{b}_j{}^{\alpha}$, т. е. эти тензоры получаются умножением тензора $\mathring{A}^{n}$ соответственно на тензоры $\mathring{A}$ и $\mathring{A}^{-1}$. Итак, тензорами, соответствующими тензору A^{-n}, будут $\mathring{A}^{n}$, $\mathring{A}^{n+1}$, $\mathring{A}^{n-1}$.

Нетрудно убедиться аналогичным путем, что тензору A^{n} в начальном пространстве соответствуют тензоры $\mathring{A}^{-n}$, $\mathring{A}^{-n+1}$, $\mathring{A}^{-n-1}$ точно так же тензорам $\mathring{A}^{-n}$ и $\mathring{A}^{n}$ соответствуют тензоры A^{n}, A^{n+1}, A^{n-1} и A^{-n}, A^{-n+1}, A^{-n-1} деформированного пространства. Следовательно, правило доказано.

Приходим, таким образом, к заключению, что все тензоры, полученные из метрических тензоров по вышеуказанной схеме, являются членами последовательностей

$$\mathring{A}^{k}, \qquad A^{k} \tag{1.11}$$

где k — целое число, положительное или отрицательное; $|k|$ означает номер того этапа, когда данный тензор получен первый раз.

Легко видеть, что тензоры (1.11) симметричны, кроме того, тензоры $\mathring{A}^{k}$ и A^{-k} имеют равные смешанные компоненты и, следовательно, равные главные значения и инварианты; у тензоров $\mathring{A}^{k}$ и A^{-k+1} одинаковы ковариантные, а у тензоров $\mathring{A}^{-k}$ и A^{k-1} — контравариантные компоненты.

Обозначим через $\mathring{a}_i$ и $\hat{a}_i$, $i=1, 2, 3$ главные значения соответственно тензоров $\mathring{A}$ и A. Из предыдущих рассуждений легко прийти к выводу, что тензоры (1.11) одновременно приводятся к главным осям и имеют, очевидно, главные значения $\mathring{a}_i^{k}$, $\hat{a}_i^{k}$, $i=1, 2, 3$ соответственно.

Величины $\mathring{a}_i$ и $\hat{a}_i$ не будут независимыми. В самом деле, как было отмечено, главные значения тензоров A и $\mathring{A}^{-1}$ одинаковы, следовательно,

$$\hat{a}_i=\mathring{a}_i^{-1} \qquad (i=1, 2, 3) \tag{1.12}$$

Будем теперь рассматривать тензоры, характеризующие конечные деформации сплошной среды. За меру деформации обычно принимают разность

$$ds^2 - \overset{\circ}{ds}{}^2 = 2\varepsilon_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}) \tag{1.13}$$

и вводят в рассмотрение два тензора конечной деформации: тензор $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ в пространстве начальных состояний и тензор $\mathscr{E}$ в деформированном пространстве, имеющие равные ковариантные компоненты [2]

$$\overset{\circ}{\mathscr{E}} = \varepsilon_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\partial}{}^\alpha \overset{\circ}{\partial}{}^\beta, \qquad \mathscr{E} = \varepsilon_{\alpha\beta}\hat{\partial}^\alpha \hat{\partial}^\beta \tag{1.14}$$

Эти тензоры, как легко видеть, будут линейными функциями тензоров $\overset{\circ}{A}$ и A соответственно

$$\overset{\circ}{\mathscr{E}} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{A} - \overset{\circ}{G}), \qquad \mathscr{E} = \frac{1}{2}(G - A) \tag{1.15}$$

Обратные зависимости имеют вид

$$\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{G} + 2\overset{\circ}{\mathscr{E}}, \qquad A = G - 2\mathscr{E} \tag{1.16}$$

Тензорам $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ и $\mathscr{E}$ изложенным выше способом можно сопоставить бесконечные последовательности тензоров как в начальном, так и в деформированном пространствах. Используя соотношения (1.15) и (1.16) и результаты предыдущего рассмотрения, можно установить, что эти последовательности имеют вид

$$(\overset{\circ}{G} + 2\overset{\circ}{\mathscr{E}})^k \overset{\circ}{\mathscr{E}}, \qquad (G - 2\mathscr{E})^k \mathscr{E} \qquad (k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.17}$$

На каждом этапе соответствия будем иметь два новых тензора в пространстве начальных состояний и два тензора в деформированном пространстве. Так, на n-м этапе новыми будут тензоры, соответствующие следующим значениям $k: k = (-1)^n n,\ (-1)^n n - 1$.

Видим, что все тензоры последовательностей (1.17) будут изотропными тензорными функциями соответственно тензоров $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ и $\mathscr{E}$ и, в свою очередь, будут характеристиками конечных деформаций сплошной среды.

Отметим некоторые свойства тензоров (1.17), которые нетрудно установить при детальном рассмотрении соответствия между тензорами в различных пространствах. Все тензоры (1.17) симметричны. У тензоров

$$(\overset{\circ}{G} + 2\overset{\circ}{\mathscr{E}})^m \overset{\circ}{\mathscr{E}}, \qquad (G - 2\mathscr{E})^{-m} \mathscr{E} \qquad (m = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.18}$$

одинаковы ковариантные компоненты, у тензоров

$$(\overset{\circ}{G} + 2\overset{\circ}{\mathscr{E}})^{m-1} \overset{\circ}{\mathscr{E}}, \qquad (G - 2\mathscr{E})^{-m-1} \mathscr{E} \qquad (m = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.19}$$

контравариантные компоненты, а тензоры

$$(\overset{\circ}{G} + 2\overset{\circ}{\mathscr{E}})^{-m} \overset{\circ}{\mathscr{E}}, \qquad (G - 2\mathscr{E})^{m-1} \mathscr{E} \qquad (m = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.20}$$

имеют равные компоненты со смешанными индексами и, следовательно, равные главные значения и инварианты.

В частности, при $m = 0$ равные ковариантные компоненты $\overset{=}{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, определенные формулами (1.13), имеют тензоры $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ и $\mathscr{E}$; равные контравариантные компоненты

$$\theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta} - \hat{g}^{\alpha\beta}) \tag{1.21}$$

имеют тензоры $\overset{\circ}{\theta} = (\hat{G} + 2\overset{\circ}{\mathscr{E}})^{-1}\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ и $\Theta = (G - 2\mathscr{E})^{-1}\mathscr{E}$, а у тензоров $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ и Θ равны компоненты со смешанными индексами

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \hat{\theta}^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\sigma}\hat{g}_{\sigma\beta} - \delta^{\alpha}{}_{\beta}\right), \qquad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha}{}^{\beta} = \hat{\theta}_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{\alpha\sigma}\overset{\circ}{g}{}^{\sigma\beta} - \delta_{\alpha}{}^{\beta}\right) \tag{1.22}$$

Отметим также, что при $m = 1$ одинаковые смешанные компоненты имеют тензоры $\overset{\circ}{\Theta}$ и $\mathscr{E}$

$$\overset{\circ}{\theta}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \hat{\varepsilon}^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}{}_{\beta} - \hat{g}^{\alpha\sigma}\overset{\circ}{g}_{\sigma\beta}\right), \qquad \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}{}^{\beta} = \hat{\varepsilon}_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha}{}^{\beta} - \overset{\circ}{g}_{\alpha\sigma}\hat{g}^{\sigma\beta}\right) \tag{1.23}$$

Из формулы (1.17) вытекает, что все тензоры, соответствующие тензорам $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ и $\mathscr{E}$, одновременно приводятся к главным осям.

Если обозначить главные значения тензоров конечной деформации $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ и $\mathscr{E}$ соответственно через $\overset{\circ}{\varepsilon}_i$ и $\hat{\varepsilon}_i$, $i = 1, 2, 3$, то главные значения тензоров последовательностей (1.17), соответствующих индексу k, будут $(1 + 2\overset{\circ}{\varepsilon}_i)^k\overset{\circ}{\varepsilon}_i$, $(1 - 2\hat{\varepsilon}_i)^k\hat{\varepsilon}_i$, $i = 1, 2, 3$ (здесь по индексу i суммирование не производится).

Между главными значениями $\overset{\circ}{\varepsilon}_i$ и $\hat{\varepsilon}_i$ существует зависимость. Действительно, смешанные компоненты, а следовательно, и главные значения у тензоров $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ и Θ одинаковы, поэтому имеем $\overset{\circ}{\varepsilon}_i = \hat{\varepsilon}_i(1 - 2\hat{\varepsilon}_i)^{-1}$; это равенство связывает главные значения тензоров конечной деформации.

Обратимся далее к рассмотрению произвольных тензоров второго ранга H и $\overset{\circ}{H}$, определенных формулами (0.2) и (0.4). У этих тензоров могут быть равными либо ковариантные компоненты $\hat{H}_{\alpha\beta}$ и $\overset{\circ}{H}_{\alpha\beta}$, либо контравариантные компоненты $\hat{H}^{\alpha\beta}$ и $\overset{\circ}{H}{}^{\alpha\beta}$, либо, наконец, смешанные компоненты $\hat{H}_{\beta}{}^{\alpha}$ и $\overset{\circ}{H}_{\beta}{}^{\alpha}$ или $\hat{H}_{\alpha}{}^{\beta}$ и $\overset{\circ}{H}_{\alpha}{}^{\beta}$. В дальнейшем условимся называть величины $H^{\alpha}{}_{\beta}$ смешанными компонентами первого типа, а величины $H_{\beta}{}^{\alpha}$ — смешанными компонентами второго типа.

Рассмотрим случай, когда у тензоров H и $\overset{\circ}{H}$ равны смешанные компоненты первого типа

$$\hat{H}^{\alpha}{}_{\beta} = \overset{\circ}{H}{}^{\alpha}{}_{\beta} = H^{\alpha}{}_{\beta} \tag{1.24}$$

Тензору H в начальном пространстве соответствуют четыре различных тензора. Первый тензор, имеющий равные с тензором H смешанные компоненты первого типа, ввиду равенств (1.24) есть $\overset{\circ}{H}$. Остальные тензоры, у которых одинаковы с тензором H соответственно ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты второго типа, будут иметь смешанные компоненты первого типа соответственно

$$\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\sigma}\hat{g}_{\sigma k}H^{k}{}_{\beta},\; H^{\alpha}{}_{\sigma}\hat{g}^{\sigma k}\overset{\circ}{g}_{k\beta},\quad \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\sigma}\hat{g}_{\sigma k}H^{k}{}_{e}\hat{g}^{em}\overset{\circ}{g}_{m\beta}$$

и, следовательно, имеют вид

$$\overset{\circ}{A}\overset{\circ}{H},\; \overset{\circ}{H}\,\overset{\circ}{A}{}^{-1},\; \overset{\circ}{A}\,\overset{\circ}{H}\,\overset{\circ}{A}{}^{-1}$$

Точно так же тензору $\overset{\circ}{H}$ в деформированном пространстве соответствуют четыре различных тензора H, AH, HA^{-1}, AHA^{-1}, получающиеся аналогичным способом.

Итак, на первом этапе тензоры, соответствующие тензорам H и $\overset{\circ}{H}$, можно представить в виде

$$\overset{\circ}{A}{}^{m}\,\overset{\circ}{H}\,\overset{\circ}{A}{}^{n}, \qquad A^{m}HA^{n} \tag{1.25}$$

где m, n — числа, принимающие значения соответственно 0,1 и 0,—1.

Легко видеть, что любому тензору деформированного пространства вида A^mHA^n, где m, n — любые целые числа, положительные или отрицательные (или нуль), ввиду формул (1.4) и (1.24), в начальном пространстве соответствует тензор $\mathring{A}^{-m}\mathring{H}\mathring{A}^{-n}$, имеющий равные с ним смешанные компоненты первого типа, и тензоры $\mathring{A}^{1-m}\mathring{H}\mathring{A}^{-n}, \mathring{A}^{-m}\mathring{H}\mathring{A}^{-n-1}$, $\mathring{A}^{1-m}\mathring{H}\mathring{A}^{-n-1}$, у которых одинаковы с тензором A^mHA^n соответственно ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты второго типа, а любому тензору $\mathring{A}^m\mathring{H}\mathring{A}^n$ начального пространства в деформированном пространстве соответствуют тензоры $A^{-m}HA^{-n}$, $A^{1-m}HA^{-n}$, $A^{-m}HA^{-n-1}$, $A^{1-m}HA^{-n-1}$, т. е. полученные тензоры имеют тот же вид, что и тензоры (1.25).

Мы видим, что в начальном пространстве тензоры, соответствующие тензору A^mHA^n, образуются по следующему правилу: первый тензор, имеющий равные с ним смешанные компоненты первого типа, получается подстановкой значков $^\circ$ над множителями тензора A^mHA^n и сменой знаков показателей m и n на противоположные; другие тензоры, у которых одинаковы с тензором A^mHA^n соответственно ковариантные, контравариантные или смешанные компоненты второго типа, получаются умножением первого тензора соответственно слева на тензор $\mathring{A}$, справа на тензор $\mathring{A}^{-1}$ и, наконец, одновременно слева и справа соответственно на $\mathring{A}$ и $\mathring{A}^{-1}$. Аналогичное правило имеет место для образования тензоров в деформированном пространстве, соответствующих тензору вида $\mathring{A}^m\mathring{H}\mathring{A}^n$ начального пространства. Применение сформулированного правила вновь приводит к тензорам вида (1.25); следовательно, все тензоры, соответствующие тензорам H и $\mathring{H}$, будут такого же вида.

В частности, если H и $\mathring{H}$ суть метрические тензоры G и $\mathring{G}$, то из равенств (1.25) следуют формулы (1.11), установленные ранее.

Если у тензоров H и $\mathring{H}$ одинаковы ковариантные или контравариантные или смешанные компоненты второго типа, то аналогичным рассуждением можно установить, что все соответствующие им тензоры будут тоже вида (1.25), а также сформулировать аналогичные правила для образования соответствующих тензоров. Так, в случае, когда у тензоров H и $\mathring{H}$ одинаковы ковариантные компоненты $\mathring{H}_{\alpha\beta} = \mathring{H}_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}$, таким правилом будет следующее. Тензору вида A^mHA^n в начальном пространстве соответствуют четыре различных тензора: первый тензор, имеющий равные с ним ковариантные компоненты, получается подстановкой значков $^\circ$ над множителями тензора A^mHA^n и сменой знаков показателей m и n на противоположные; остальные тензоры, имеющие равные с тензором A^mHA^n соответственно смешенные компоненты первого, затем второго типов и контравариантные компоненты, получаются из первого тензора умножением соответственно слева, затем справа и, наконец, слева и справа одновременно на тензор

$$\mathring{A}^{-1}\colon\ \mathring{A}^{-m}\mathring{H}\mathring{A}^{-n},\ \mathring{A}^{-m-1}\mathring{H}\mathring{A}^{-n},\ \mathring{A}^{-m}\mathring{H}\mathring{A}^{-n-1},\ \mathring{A}^{-m-1}\mathring{H}\mathring{A}^{-n-1}.$$

В частности, если тензоры H и $\mathring{H}$ будут тензорами конечной деформации $\mathscr{E}$ и $\mathring{\mathscr{E}}$, то ввиду формул (1.15) произведение тензоров $\mathring{\mathscr{E}}\mathring{A}^\alpha$ или $\mathscr{E}A^\alpha$, где α — целое число, положительное или отрицательное, коммутативно и из формул (1.25) следуют формулы (1.17).

Заметим, что тензоры (1.25), вообще говоря, не симметричны в том числе и в случае, когда тензоры H и $\mathring{H}$ будут симметричными. Нетрудно установить далее, что в результате последовательного применения процедуры получения соответствующих тензоров на $2k-1$ и $2k$, $k=1, 2, \ldots$ этапах новыми будут те тензоры, из последовательностей (1.25) у которых, по крайней мере, один из модулей $|m|$ или $|n|$ равен k, а другой модуль может быть любым целым числом от нуля до k включительно.

Например, при $k=1$, т. е. на первом и втором этапах, имеем следующие новые тензоры

$$\mathring{A}\mathring{H}, \quad \mathring{H}\mathring{A}, \quad \mathring{A}^{-1}\mathring{H}, \quad \mathring{H}\mathring{A}^{-1}, \quad \mathring{A}\mathring{H}\mathring{A}^{-1}, \quad \mathring{A}^{-1}\mathring{H}\mathring{A}, \quad \mathring{A}\mathring{H}\mathring{A}, \quad \mathring{A}^{-1}\mathring{H}\mathring{A}^{-1}$$

в начальном и аналогичные тензоры в деформированном пространствах.

2. Рассмотрим некоторые приложения.

а) Ниже даем обобщение [3] замкнутой системы уравнений термоупругости обратимых процессов при условии, что задан внешний приток тепла и один из потенциалов, аналогичных внутренней энергии, свободной энергии, теплосодержанию или термодинамическому потенциалу, отнесенных к единице массы. При выводе уравнений состояния обычно за характеристики деформации принимались тензоры конечной деформации $\mathring{\mathscr{E}}$ и $\mathscr{E}$, определенные формулами (1.13) и (1.14). Покажем, что если описывать деформацию среды при помощи тензоров $\mathring{\Theta}=\theta^{\alpha\beta}\mathring{\partial}_\alpha\mathring{\partial}_\beta$ и $\Theta=\theta^{\alpha\beta}\hat{\partial}_\alpha\partial_\beta$, где $\theta^{\alpha\beta}$ определяются равенствами (1.21), то подобным способом можно получить аналогичные уравнения состояния.

Элементарная работа внутренних поверхностных сил, отнесенная к единице массы, определяется формулой

$$dA^{(i)} = -\frac{1}{\rho}P^{\alpha\beta}d\,\varepsilon_{\alpha\beta} \qquad (\alpha\beta=1,\ 2,\ 3)$$

где ρ — плотность среды, $P^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты тензора напряжений $\mathring{\mathscr{P}}=P^{\alpha\beta}\mathring{\partial}_\alpha\mathring{\partial}_\beta$ или $\mathscr{P}=P^{\alpha\beta}\hat{\partial}_\alpha\hat{\partial}_\beta$, рассматриваемых соответственно в начальном и деформированном пространствах, а $d\varepsilon_{\alpha\beta}$ — приращения ковариантных компонент тензора $\mathring{\mathscr{E}}$ или $\mathscr{E}$, определяемые формулой

$$d\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta v_\alpha + \nabla_\alpha v_\beta)\,dt$$

$$\nabla_\beta v_\alpha = \frac{\partial v_\alpha}{\partial\xi^\beta} - v_k\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^k, \qquad \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^k = \frac{1}{2}\hat{g}^{k\sigma}\left(\frac{\partial\hat{g}_{\sigma\alpha}}{\partial\xi^\beta} + \frac{\partial\hat{g}_{\sigma\beta}}{\partial\xi^\alpha} - \frac{\partial\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial\xi^\sigma}\right)$$

Здесь $\bar{v}=v^i\hat{\partial}_i=v_i\hat{\partial}^i$ — вектор скорости частицы среды.

Будем считать компоненты всех рассматриваемых тензоров и векторы базисов функциями лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 и времени t.

Если воспользоваться формулами для производных по времени от векторов базисов [2]

$$\frac{d\mathring{\partial}_i}{dt}=0, \qquad \frac{d\mathring{\partial}^i}{dt}=0, \qquad \frac{d\hat{\partial}_i}{dt}=\nabla_i v^\alpha\hat{\partial}_\alpha, \qquad \frac{d\hat{\partial}^i}{dt}=-\nabla_\alpha v^i\hat{\partial}^\alpha \qquad (\alpha,\ i=1,\ 2,\ 3) \tag{2.1}$$

о нетрудно получить зависимости $d\varepsilon_{\alpha\beta}=\hat{g}_{\alpha k}\hat{g}_{\epsilon\beta}d\theta^{k\epsilon}$ и установить для работы внутренних сил выражение

$$dA^{(i)} = -\frac{1}{\rho}\hat{P}_{ke}d\theta^{ke} \qquad (k,\ e = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.2}$$

где $\hat{P}_{ke} = P^{\alpha\beta}\hat{g}_{k\alpha}\hat{g}_{\beta e}$ — ковариантные компоненты тензора $\mathcal{P}$ или

$$\hat{\mathcal{P}}_{з} = \hat{P}_{ke}\hat{\mathfrak{э}}^{k}\mathring{\mathfrak{э}}^{e}.$$

Рассмотрим среду, для которой потенциалы, аналогичные внутренней или свободной энергии, представляются соответственно функциями

$$U = U(\mathring{g}_{\alpha\beta},\ \theta^{\alpha\beta},\ S,\ \mu_1, \ldots, \mu_n,\ \xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3)$$

$$F = F(\mathring{g}_{\alpha\beta},\ \theta^{\alpha\beta},\ T,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_n\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3) = U - TS$$

Здесь S — энтропия единицы массы, T — абсолютная температура, μ_i — независимые физические и химические параметры, характеризующие изменения физико-химических свойств среды, сопровождающих механические явления.

Для обратимых процессов, соответствующих всевозможным вариациям δU, δS, $\delta\theta^{\alpha\beta}$, $\delta\mu_i$ или δF, δT, $\delta\theta^{\alpha\beta}$, $\delta\mu_i$ первое и второе начала термодинамики и равенство (2.2) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned}\delta U &= \frac{dU}{dS}\delta S + \frac{\partial U}{\partial\theta^{\alpha\beta}}\delta\theta^{\alpha\beta} + \frac{\partial U}{\partial\mu_i}\delta\mu_i = T\delta S + \frac{1}{\rho}\hat{P}_{\alpha\beta}\delta\theta^{\alpha\beta}\\ \delta F &= \frac{\partial F}{\partial T}\delta T + \frac{\partial F}{\partial\theta^{\alpha\beta}}\delta\theta^{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial\mu_i}\delta\mu_i = -S\delta T + \frac{1}{\rho}\hat{P}_{\alpha\beta}\delta\theta^{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Если возможные приращения δS, $\delta\theta^{\alpha\beta}$, $\delta\mu_i$ или δT, $\delta\theta^{\alpha\beta}$, $\delta\mu_i$ произвольны, отсюда следуют уравнения состояния, верные для любых процессов:

$$\frac{1}{\rho}\hat{P}_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial U}{\partial\theta^{\alpha\beta}}\right)_{S,\,\mu_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial\theta^{\alpha\beta}}\right)_{T,\,\mu_i} \tag{2.4}$$

не выписываем остальные уравнения, которые имеют тот же вид, что и в [3]. Ясно, что в адиабатических процессах удобнее пользоваться внутренней энергией, а в изотермических процессах — свободной энергией. Из уравнений (2.4) следует, что вместо независимых переменных $\theta^{\alpha\beta}$ можно взять величины $\tau_{\alpha\beta} = \rho^{-1}\hat{P}_{\alpha\beta}$ и рассматривать системы переменных $\tau_{\alpha\beta}$, S, μ_i или $\tau_{\alpha\beta}$, T, μ_i, для которых нетрудно выписать аналогичную систему уравнений, если рассматривать потенциалы, аналогичные соответственно теплосодержанию и термодинамическому потенциалу:

$$\Psi = \Psi(\mathring{g}_{\alpha\beta},\ \tau_{\alpha\beta},\ S,\ \mu_1, \ldots, \mu_n,\ \xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3) = U - \tau_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\beta}$$

$$G = G(\mathring{g}_{\alpha\beta},\ \tau_{\alpha\beta},\ T,\ \mu_1, \ldots, \mu_n,\ \xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3) = F - \tau_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\beta}$$

При помощи потенциалов Ψ и G уравнения (2.3) принимают вид

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= \frac{\partial\Psi}{\partial S}\delta S + \frac{\partial\Psi}{\partial\tau_{\alpha\beta}}\delta\tau_{\alpha\beta} + \frac{\partial\Psi}{\partial\mu_i}\delta\mu_i = T\delta S - \theta^{\alpha\beta}\delta\tau_{\alpha\beta}\\ \delta G &= \frac{\partial G}{\partial T}\delta T + \frac{\partial G}{\partial\tau_{\alpha\beta}}\delta\tau_{\alpha\beta} + \frac{\partial G}{\partial\mu_i}\delta\mu_i = -S\delta T - \theta^{\alpha\beta}\delta\tau_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Отсюда в предположении независимости приращений δS, $\delta\tau_{\alpha\beta}$, $\delta\mu_i$ или δT, $\delta\tau_{\alpha\beta}$, $\delta\mu_i$ получаем уравнения состояния в виде

$$\theta^{\alpha\beta} = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\tau_{\alpha\beta}}\right)_{S,\,\mu_i} = -\left(\frac{\partial G}{\partial\tau_{\alpha\beta}}\right)_{T,\,\mu_i} \tag{2.6}$$

При выводе формул (2.4) и (2.6) использовались ковариантные компоненты $\hat{P}_{\alpha\beta}$ тензоров $\overset{\circ}{P}_3$ и P и контравариантные компоненты $\theta^{\alpha\beta}$ тензоров $\overset{\circ}{\Theta}$ и Θ. Можно получить уравнения состояния, используя компоненты тензоров P и Θ или тензоров $\overset{\circ}{P}_3$ и $\overset{\circ}{\Theta}$, имеющие другое строение индексов.

Рассмотрим тензоры P и Θ. Связь между компонентами тензора θ, имеющими различное строение индексов, дается формулами

$$\theta^{\alpha\beta} = \hat{\theta}_\sigma{}^\alpha \hat{g}^{\sigma\beta} = \hat{\theta}_\sigma{}^\alpha (\overset{\circ}{g}{}^{\sigma\beta} - 2\theta^{\sigma\beta}) \tag{2.7}$$

$$\theta^{\alpha\beta} = \hat{\theta}_{k\sigma} \hat{g}^{\alpha k} \hat{g}^{\sigma\beta} = \hat{\theta}_{k\sigma} (\overset{\circ}{g}{}^{\alpha k} - 2\theta^{\alpha k}) (\overset{\circ}{g}{}^{\sigma\beta} - 2\theta^{\sigma\beta}) \tag{2.8}$$

Дифференцируя эти равенства, получим зависимости (2.9)

$$d\hat{\theta}_\mu{}^\lambda = (\delta_\alpha{}^\lambda + 2\hat{\theta}_\alpha{}^\lambda)\, d\theta^{\alpha\beta} \hat{g}_{\beta\mu}\,, \quad d\hat{\theta}_{\lambda\mu} = \hat{g}_{\lambda m} \hat{g}_{n\mu} (\delta_\alpha{}^m \delta_\beta{}^n + 2\delta_\alpha{}^m \hat{\theta}_\beta{}^n + 2\hat{\theta}_\beta{}^n \hat{\theta}_\alpha{}^m)\, d\theta^{\alpha\beta}$$

Будем считать, что потенциалы U и F зависят от смешанных или от ковариантных компонент тензора θ. Тогда при помощи соотношений (2.9) и операции «жонглирования» индексами у компонент тензора P уравнения состояния (2.4) можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho} \hat{P}_\alpha{}^\mu = \frac{1}{\rho} \hat{g}_{\alpha\lambda} P^{\lambda\mu} = (\delta_\alpha{}^\lambda + 2\hat{\theta}_\alpha^\lambda) \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{\theta}_\mu{}^\lambda}\right)_{S,\mu_i} = (\delta_\alpha{}^\lambda + 2\hat{\theta}_\alpha{}^\lambda) \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\theta}_\mu{}^\lambda}\right)_{T,\mu_i} \tag{2.10}$$

или

$$\frac{1}{\rho} P^{mn} = \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{\theta}_{mn}}\right)_{S,\mu_i} + 2\hat{\theta}_\mu{}^n \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{\theta}_{m\mu}}\right)_{S,\mu} + 2\hat{\theta}_\lambda{}^m \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{\theta}_{\lambda n}}\right)_{S,\mu_i} =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\theta}_{mn}}\right)_{T,\mu_i} + 2\hat{\theta}_\mu{}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\theta}_{m\mu}}\right)_{T,\mu_i} + 2\hat{\theta}_\lambda{}^m \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\theta}_{\lambda n}}\right)_{T,\mu_i} \tag{2.11}$$

Формулы (2.10) и (2.11) дают выражения для смешанных и контравариантных компонент тензора P.

Перейдем к рассмотрению тензоров $\overset{\circ}{P}_3$ и $\overset{\circ}{\Theta}$. Смешанные и ковариантные компоненты тензора $\overset{\circ}{\Theta}$ определяются формулами

$$\overset{\circ}{\theta}_\sigma{}^k = \overset{\circ}{g}_{e\sigma} \theta^{ke}, \qquad \overset{\circ}{\theta}_{\sigma\tau} = \overset{\circ}{g}_{\sigma k} \overset{\circ}{g}_{e\tau} \theta^{k\tau} \tag{2.12}$$

Ввиду того, что компоненты метрического тензора $\overset{\circ}{\theta}$ не зависят от времени, после дифференцирования равенств (2.12) получим формулы

$$d\overset{\circ}{\theta}_\sigma{}^k = \overset{\circ}{g}_{e\sigma} d\theta^{ke}, \qquad d\overset{\circ}{\theta}_{\sigma\tau} = \overset{\circ}{g}_{\sigma k} \overset{\circ}{g}_{e\tau} d\theta^{ke} \tag{2.13}$$

и, следовательно, вместо (2.4) имеем эквивалентные им соотношения

$$\overset{\circ}{\tau}_k{}^\sigma = \frac{1}{\rho} \hat{P}_{ke} \overset{\circ}{g}{}^{e\sigma} = \left(\frac{\partial U}{\partial \overset{\circ}{\theta}_\sigma{}^k}\right)_{S,\mu_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial \overset{\circ}{\theta}_\sigma{}^k}\right)_{T,\mu_i}$$
$$\overset{\circ}{\tau}{}^{\sigma\tau} = \frac{1}{\rho} \hat{P}_{ke} \overset{\circ}{g}{}^{k\sigma} \overset{\circ}{g}{}^{e\tau} = \left(\frac{\partial U}{\partial \overset{\circ}{\theta}_{\sigma\tau}}\right)_{S,\mu_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial \overset{\circ}{\theta}_{\sigma\tau}}\right)_{T,\mu_i} \tag{2.14}$$

которые дают выражения для смешанных и контравариантных компонент тензора $\overset{\circ}{P}_3$.

Аналогичным образом из уравнений (2.6) следуют формулы для смешанных и ковариантных компонент тензора $\overset{\circ}{\theta}$

$$\overset{\circ}{\theta}_\sigma{}^k = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \overset{\circ}{\tau}_k{}^\sigma}\right)_{S,\mu_i} = -\left(\frac{\partial G}{\partial \overset{\circ}{\tau}_k{}^\sigma}\right)_{T,\mu_i}, \quad \overset{\circ}{\theta}_{\sigma\tau} = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \overset{\circ}{\tau}{}^{\sigma\tau}}\right)_{S,\mu_i} = -\left(\frac{\partial G}{\partial \overset{\circ}{\tau}{}^{\sigma\tau}}\right)_{T,\mu_i} \tag{2.15}$$

Легко убедиться, что соотношения (2.10) и первые из соотношений (2.14) могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{\rho}\overset{\circ}{P}_m{}^\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_\sigma{}^m}\right)_{S,\mu_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_\sigma{}^m}\right)_{T,\mu_i} \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{\rho}\hat{P}_k{}^e = (\delta_\sigma{}^e - 2\hat{\varepsilon}_\sigma{}^e)\left(\frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}_\sigma{}^k}\right)_{S,\mu_i} = (\delta_\sigma{}^e - 2\hat{\varepsilon}_\sigma{}^e)\left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\varepsilon}_\sigma{}^k}\right)_{T,\mu_i}$$

где $\overset{\circ}{P}_m{}^\sigma = \overset{\circ}{g}_{mk}P^{k\sigma}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_\sigma{}^m = \overset{\circ}{g}{}^{mk}\varepsilon_{k\sigma}$, $\hat{\varepsilon}_\sigma{}^k = \hat{g}^{k\tau}\varepsilon_{\tau\sigma}$ — смешанные компоненты тензоров $\overset{\circ}{P}$, $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$, $\mathscr{E}$ соответственно. Формулы (2.16) были получены в работе [3].

б) В теории конечных деформаций удобнее рассматривать вместо тензора напряжений $P = P^{\alpha\beta}\hat{\partial}_\alpha\hat{\partial}_\beta$ тензор $\sigma = \sigma^{\alpha\beta}\hat{\partial}_\alpha\hat{\partial}_\beta$, $\sigma^{\alpha\beta} = 1/\rho P^{\alpha\beta}$, так как величины $\sigma^{\alpha\beta}$ обладают потенциалом.

Введем для тензора σ четыре различных определения относительной скорости и покажем, что одна из них совпадает с определением скорости напряжений, предложенной Трусделлом [4].

В деформированном пространстве наряду с подвижной лагранжевой системой координат будем рассматривать неподвижную систему отсчета x^1, x^2, x^3 с базисами ∂_i, ∂^i, $i = 1, 2, 3$. Не ограничивая общности, можно считать систему отсчета декартовой. Тензору σ

$$\sigma = \sigma^{\alpha\beta}\hat{\partial}_\alpha\hat{\partial}_\beta = \hat{\sigma}_\beta{}^\alpha\hat{\partial}_\alpha\hat{\partial}^\beta = \hat{\sigma}_\alpha{}^\beta\hat{\partial}^\alpha\hat{\partial}_\beta = \hat{\sigma}_{\alpha\beta}\hat{\partial}^\alpha\hat{\partial}^\beta = \sigma'^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \tag{2.17}$$

в пространстве начальных состояний соответствуют четыре различных тензора

$$\overset{\circ}{\sigma}_1 = \sigma^{\alpha\beta}\overset{\circ}{\partial}_\alpha\overset{\circ}{\partial}_\beta, \quad \overset{\circ}{\sigma}_2 = \hat{\sigma}^\alpha{}_\beta\overset{\circ}{\partial}_\alpha\overset{\circ}{\partial}{}^\beta, \quad \overset{\circ}{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_\alpha{}^\beta\overset{\circ}{\partial}{}^\alpha\overset{\circ}{\partial}_\beta, \quad \overset{\circ}{\sigma}_4 = \hat{\sigma}_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\partial}{}^\alpha\overset{\circ}{\partial}{}^\beta$$

Различные относительные скорости $\overset{\circ}{V}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ тензора σ определим как индивидуальные производные по времени от тензоров $\overset{\circ}{\sigma}_i$:

$$\overset{\circ}{V}_1 = \frac{d\sigma^{\alpha\beta}}{dt}\overset{\circ}{\partial}_\alpha\overset{\circ}{\partial}_\beta, \quad \overset{\circ}{V}_2 = \frac{d\hat{\sigma}^\alpha{}_\beta}{dt}\overset{\circ}{\partial}_\alpha\overset{\circ}{\partial}{}^\beta, \quad \overset{\circ}{V}_3 = \frac{d\hat{\sigma}_\alpha{}^\beta}{dt}\overset{\circ}{\partial}{}^\alpha\overset{\circ}{\partial}_\beta, \quad \overset{\circ}{V}_4 = \frac{d\hat{\sigma}_{\alpha\beta}}{dt}\overset{\circ}{\partial}{}^\alpha\overset{\circ}{\partial}{}^\beta$$

Можно установить выражения для компонент этих тензоров, если продифференцировать по времени тензор σ, взятый в инвариантных формах (2.17). Воспользуемся формулами (2.1) для производных от векторов базисов $\hat{\partial}_i$ и $\hat{\partial}^i$, а также тем, что система отсчета декартова и, следовательно,

$$\frac{d\partial^i}{dt} = \frac{d\partial_i}{dt} = 0$$

После дифференцирования (2.17) получим

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left(\frac{d\sigma^{\alpha\beta}}{dt} + \sigma^{k\beta}\nabla_k v^\alpha + \sigma^{\alpha k}\nabla_k v^\beta\right)\hat{\partial}_\alpha\hat{\partial}_\beta = \left(\frac{d\hat{\sigma}^\alpha{}_\beta}{dt} + \hat{\sigma}^k{}_\beta\nabla_k v^\alpha - \hat{\sigma}^\alpha{}_k\nabla_\beta v^k\right)\hat{\partial}_\alpha\hat{\partial}^\beta =$$

$$= \left(\frac{d\hat{\sigma}_\alpha{}^\beta}{dt} - \hat{\sigma}_k^\beta\nabla_\alpha v^k + \hat{\sigma}_\alpha{}^k\nabla_k v^\beta\right)\hat{\partial}^\alpha\hat{\partial}_\beta = \left(\frac{d\hat{\sigma}_{\alpha\beta}}{dt} - \hat{\sigma}_{k\beta}\nabla_\alpha v^k - \hat{\sigma}_{\alpha k}\nabla_\beta v^k\right)\hat{\partial}^\alpha\hat{\partial}^\beta =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{dP'^{\alpha\beta}}{dt} + P'^{\alpha\beta}\nabla_k v'^k\right)\partial_\alpha\partial_\beta$$

Здесь принято во внимание, что $\sigma'^{\alpha\beta} = \frac{1}{\rho} P'^{\alpha\beta}$ и уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_k v'^k = 0, \quad \bar{v} = v^k \hat{\partial}_k = v'^k \partial_k$$

Полагая, что в рассматриваемый момент времени базисы $\hat{\partial}_i$ и ∂_i совпадают, получим следующие формулы, верные в криволинейных системах координат:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{d\sigma^{\alpha\beta}}{dt} &= \frac{dp'^{\alpha\beta}}{dt} + P^{\alpha\beta} \nabla_k v^k - P^{k\beta} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^k} - P^{\alpha k} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^k} \\
\rho \frac{d\hat{\sigma}^{\alpha}{}_{\beta}}{dt} &= \frac{dP'^{\alpha}{}_{\beta}}{dt} + P^{\alpha}{}_{\beta} \nabla_k v^k - P^{\alpha}{}_{k} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^k} + P_k{}^{\alpha} \frac{\partial v^k}{\partial x^\beta} \\
\rho \frac{d\hat{\sigma}_{\alpha}{}^{\beta}}{dt} &= \frac{dP'_{\alpha}{}^{\beta}}{dt} + P_{\alpha}{}^{\beta} \nabla_k v^k + P^k{}_{\beta} \frac{\partial v^k}{\partial x^\alpha} - P_{\alpha}{}^{k} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^k} \\
\rho \frac{d\hat{\sigma}_{\alpha\beta}}{dt} &= \frac{dP'_{\alpha\beta}}{dt} + P_{\alpha\beta} \nabla_k v^k + P_{k\beta} \frac{\partial v^k}{\partial x^\alpha} + P_{\alpha k} \frac{\partial v^k}{\partial x^\beta}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

В декартовой системе координат положение индексов не существенно, и первая из формул (2.18) совпадает с определением скорости напряжений, предложенной Трусделлом.

Легко видеть, что инварианты тензора σ совпадают с инвариантами тензоров $\mathring{\sigma}_2$ и $\mathring{\sigma}_3$ и отличаются от инвариантов тензоров $\mathring{\sigma}_1$ и $\mathring{\sigma}_4$. Очевидно, что производные по времени от инвариантов тензоров σ, $\mathring{\sigma}_2$, $\mathring{\sigma}_3$ обращаются в нуль одновременно с тензором $\mathring{V}_2$ или $\mathring{V}_3$, а производные от инвариантов тензора $\mathring{\sigma}_1$ или $\mathring{\sigma}_4$ обращаются в нуль вместе с тензором $\mathring{V}_1$ и $\mathring{V}_4$ соответственно.

Заметим, что ввиду соотношений

$$\mathring{\sigma}_2 = \mathring{\sigma}_1 \mathring{A}, \qquad \mathring{\sigma}_3 = \mathring{A} \mathring{\sigma}_1, \qquad \mathring{\sigma}_4 = \mathring{A} \mathring{\sigma}_1 \mathring{A}$$

нетрудно установить следующие зависимости для относительных скоростей тензора σ

$$\mathring{V}_2 = \mathring{V}_1 (\mathring{G} + 2\mathring{E}) + 2\mathring{\sigma}_1 \mathring{e}, \qquad \mathring{V}_3 = 2\mathring{e}\mathring{\sigma}_1 + (\mathring{G} + 2\mathring{E}) \mathring{V}_1$$

$$\mathring{V}_4 = 2\mathring{e}\mathring{\sigma}_1 (\mathring{G} + 2\mathring{E}) + (\mathring{G} + 2\mathring{\varepsilon}) \mathring{V}_1 (\mathring{G} + 2\mathring{E}) + 2 (\mathring{G} + 2\mathring{E}) \mathring{\sigma}_1 \mathring{e}$$

где $\mathring{e}$ — тензор скоростей деформаций.

Рассмотренные вопросы показывают, что предложенные тензорные характеристики могут использоваться при рассмотрении различных вопросов теории конечных деформаций.

Поступила 20 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Понятие разных скоростей тензоров. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
2. Седов Л. И. Основы нелинейной механики сплошной среды, ч. 1, Изд.-во МГУ, 1959.
3. Седов Л. И. Основы нелинейной механики сплошной среды, ч. 2, Изд-во МГУ, 1960.
4. Truesdell C. Correction and additions to «The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics» Jour. Rat. Mech. Analysis. 2 (1953), 593.