Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПОСТУЛАТЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

А. А. Ильюшин

(Москва)

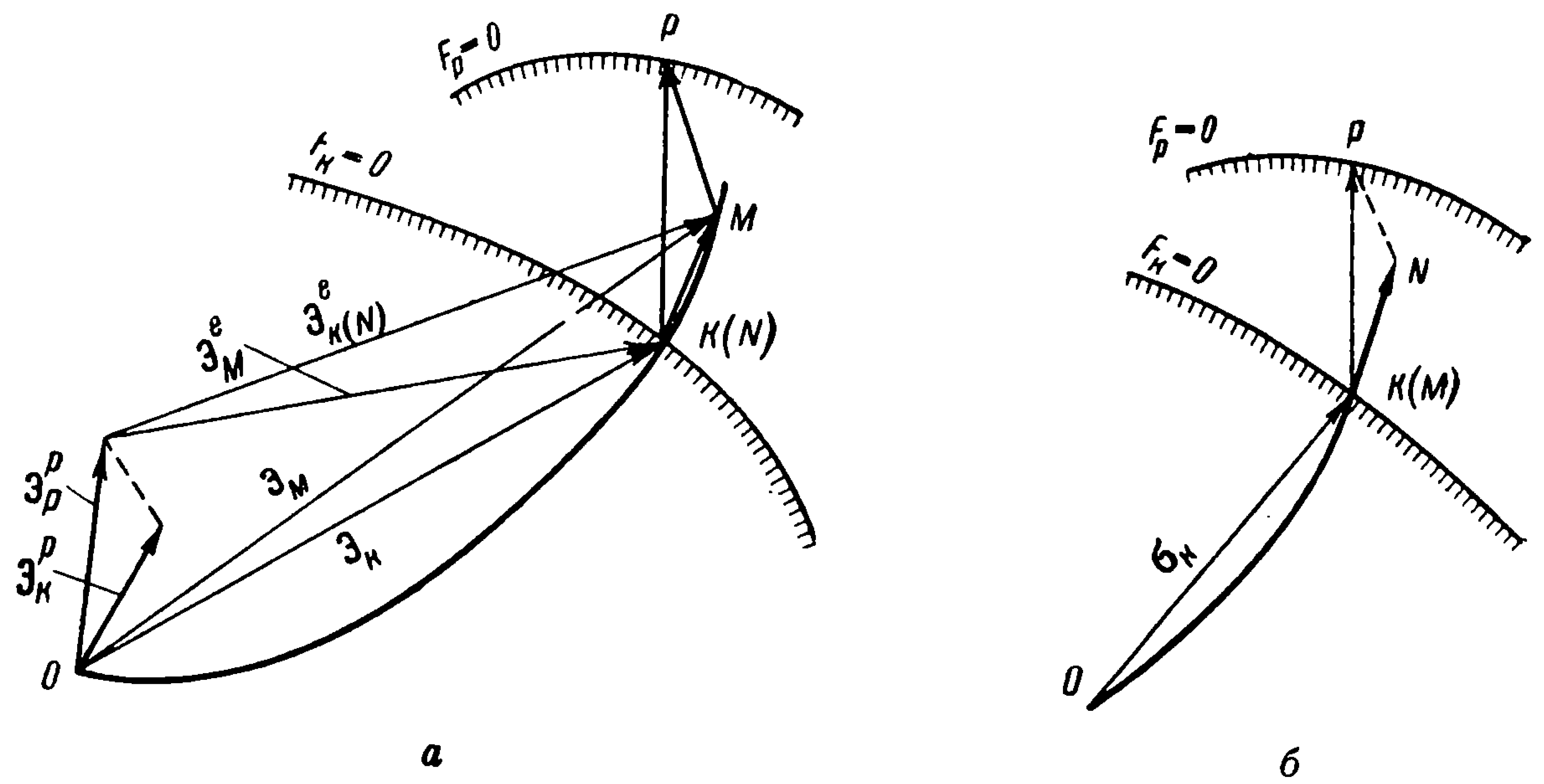
Пусть тело из деформированного состояния А перешло в бесконечно близкое состояние В (при постоянной температуре). Признаком того, что переход сопровождался пластическими деформациями, по определению, является изменение пластической составляющей общей деформации. Это утверждение, кажущееся нам тавтологией, фактически содержит гипотезу о разгрузке. Напряженное и деформированное состояние должно быть однородным; в состоянии А путем разгрузки надо определить пластическую деформацию и убедиться, что первоначальные нагрузки восстанавливают состояние; после этого надо изменить нагрузки до их значений в состоянии В и повторить разгрузку и только после этого вычислить изменение пластической деформации. Гипотеза о разгрузке справедлива с некоторой точностью и поэтому указанный выше признак изменения пластических деформаций при переходе из А в В является приближенным, как и положено быть физическому признаку.

Мы можем дать другое определение и другой признак пластической деформации. Рассмотрим любой процесс АВ; изменяя нагрузки, вернем тело из деформированного состояния В в деформированное состояние А, и таким образом в итоге совершим замкнутый по деформациям цикл АВА, причем каждое промежуточное состояние предполагается состоянием равновесия. Будем считать, что переход из А в В сопровождается пластическими деформациями, если работа внешних сил на замкнутом по деформациям цикле АВА положительна, и, напротив, является упругим, если работа равна нулю. Это энергетическое определение назовем постулатом пластичности. Оно дает независимое от гипотезы о разгрузке определение пластической деформации и так же указывает определенный экспериментальный метод проверки.

Нет оснований отвергнуть какое-нибудь из данных выше двух признаков (определений) пластической деформации и значит они должны быть совместны. Отсюда, как увидим, получаются важные следствия.

Оба определения утверждают необратимость процесса пластической деформации. Некоторые авторы [1] склонны считать, что постулат Друккера является утверждением необратимости процесса пластической деформации. Постулат Друккера состоит в том, что если из состояния В тело перевести в состояние A_0, при котором нагрузки вернутся к исходным значениям (в состоянии А), то работа избыточных сил на таком замкнутом по нагрузкам цикле ABA_0 должна быть неотрицательной. Но эта работа будет равна нулю не только при упругом процессе, но для неупрочняющихся материалов и в ряде необратимых процессов, например, в случае растяжения образца в пределах площадки текучести. Значит постулат Друккера не означает необратимости процесса пластической деформации, а представляет специальную гипотезу.

Далее будем предполагать, что читателю известны работы [2,3,4]; используем постулат изотропии и изотропные пространства вектора деформации э и вектора напряжения σ. Пусть процесс деформации в некоторый момент определен предшествующей траекторией OK и точкой K



Фиг. 1

и пусть $F_k = 0$ есть уравнение поверхности текучести в пространстве деформаций, так что точки внутри поверхности дают возможные состояния разгрузки из K, а вне — состояния догрузки. Путем догрузки перейдем от K к весьма близкой точке P; поверхность текучести изменится, ее уравнение будет теперь $F_P = 0$. На фиг. 1, *а* изображен весь процесс, деформация $э_K$, пластические деформации $э_K^P$ и $э_P^P$. На фиг. 1, *б* то же изображено в пространстве напряжений. Пусть M на фиг. 1, *а* — точка разгрузки из P, в которой напряжение становится равным исходному σ_K, а точка N, совпадающая с K, замыкает процесс по деформации; на фиг. 1, *б* при этом оказываются совмещенными точки K и M. Из совместного рассмотрения фиг. *а* и *б* видно, что точки M и N лежат внутри поверхности текучести F_P и потому работа полного напряжения σ по траектории KPK (фиг. 1, *а*) совпадает с работой по траектории $KPMK$. Обозначим эту работу

$$W = \int\limits_{KPK} \sigma\, dэ = \int\limits_{KPMK} \sigma\, dэ \tag{1}$$

Поскольку работа постоянного напряжения σ_K по этому же пути равна нулю, то следовательно

$$W = \int\limits_{KPMK} (\sigma - \sigma_K)\, dэ$$

Но часть этого интеграла по пути KPM представляет работу избыточных напряжений, определяемую постулатом Друккера; обозначая ее через W_D, получим

$$W - W_D = \int\limits_{MK} (\sigma - \sigma_K)\, d\text{э}, \qquad W_D = \int\limits_{KPM} (\sigma - \sigma_K)\, d\text{э} \tag{2}$$

По определению точки M на пути MP будет $\sigma_K = \sigma_M$ и поскольку изменяется только упругая деформация, то $d\text{э} = d(\text{э}^e - \text{э}^e_M)$. Учитывая закон упругости для пути MP

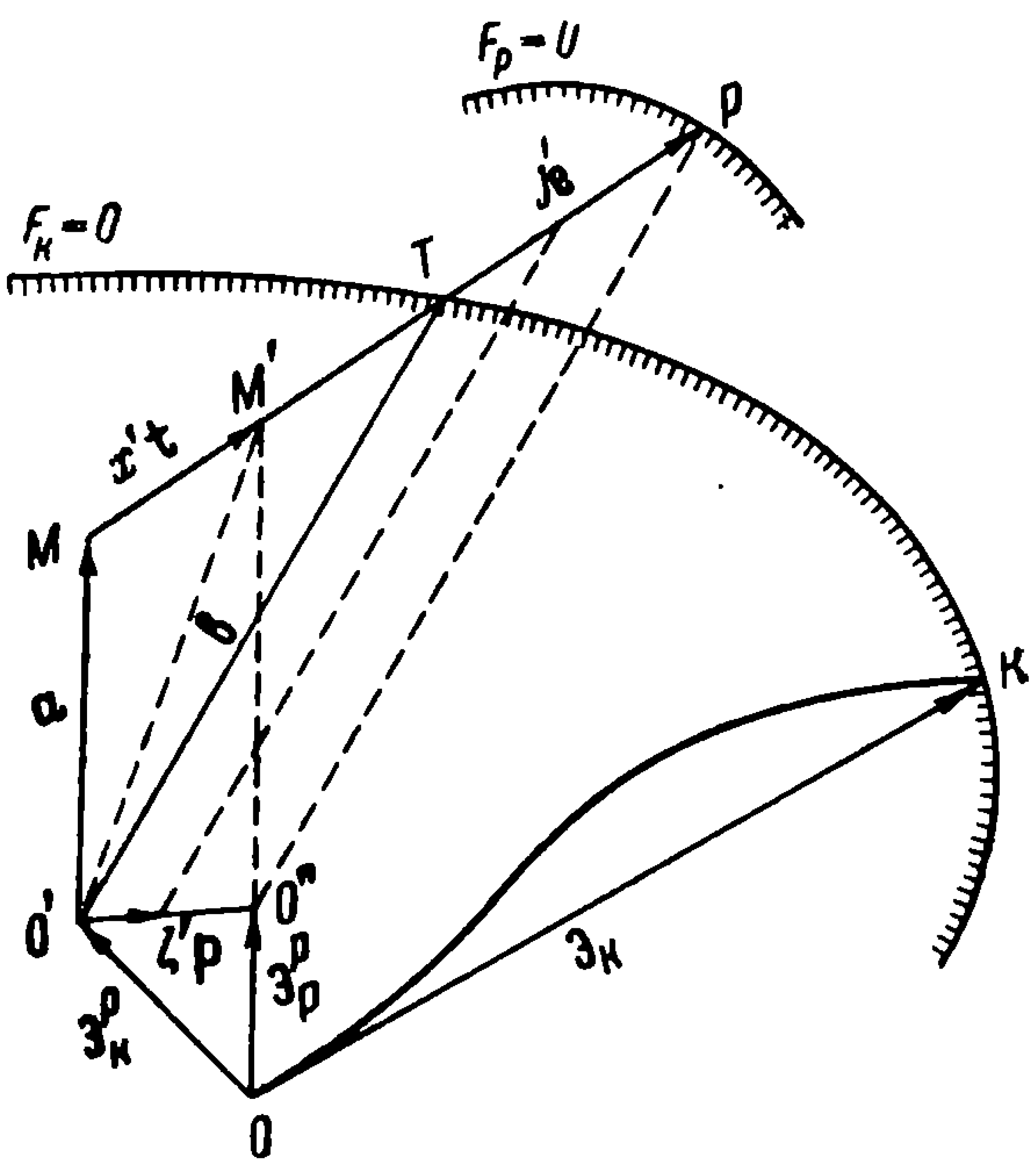
$$\sigma - \sigma_M = (E)_P (\text{э}^e - \text{э}^e_M)$$

где $(E)_P$ матрица модулей упругости относительно точки P, заключаем, что разность

$$W - W_D = \int\limits_{MK} (E)_P\, (\text{э}^e - \text{э}^e_M)\, d(\text{э}^e - \text{э}^e_M) > 0$$

представляет упругую энергию, соответствующую разности упругих деформаций $\text{э}^e_N - \text{э}^e_M$, т. е. положительную квадратичную форму. Значит $W > W_D$. Отсюда следует, что постулат пластичности является более общим, менее ограничительным, чем постулат Друккера, что последний является достаточным, но не необходимым условием в рамках первого.

Теперь рассмотрим некоторые существенные следствия двух, данных выше определений процесса пластической деформации, без использования постулата Друккера. На фиг. 2 снова изображен процесс OK в пространстве деформаций, поверхность текучести $F_K = 0$, вектор пластической деформации э^p_K для K. Путем разгрузки из K переведем тело в состояние, изображаемое точкой M, и затем произведем замкнутый по деформациям процесс $MTPTM$; точка T лежит на поверхности F_K и определяется длиной отрезка MT-x и единичным вектором $\mathbf{t}$; точка P определяется весьма малым отрезком ξ и единичным вектором $\mathbf{e}$, выходящим в область догрузки. Вектор пластической деформации при этом изменится и станет э^p_P, а поверхность текучести будет $F_P = 0$. Изменение вектора пластической деформации обозначим



Фиг. 2

$$\Delta\text{э}^p = \text{э}^p_P - \text{э}^p_K = \zeta \mathbf{p} \tag{3}$$

так что $\mathbf{p}$ есть единичный вектор.

На основании постулата пластичности имеем

$$W = \int\limits_{MTPTM} \sigma\, d\text{э} \geqslant 0 \tag{4}$$

Учитывая малость ξ, матрица упругости (E) при переходе от T к P будет изменяться пропорционально ξ и потому в промежуточной точке

ξ' и в точке P она имеет значения

$$(E)_{\xi'} = (E)_T + \xi' \left[\frac{d}{d\xi}(E)\right]_T, \qquad (E)_P = (E)_T + \xi \left[\frac{d}{d\xi}(E)\right]_T \tag{5}$$

причем, конечно, $(E)_T = (E)_K$. Сумма интегралов (4) по TP и PT

$$\int\limits_{TP} \sigma d\text{э} + \int\limits_{PT} \sigma d\text{э} = \int\limits_0^{\xi} (\sigma_{TP} - \sigma_{PT})\,\mathbf{e}\,d\xi'$$

на основании (5) будет малой величиной порядка ξ^2. Сохраняя в (4) малые порядка ξ, получим

$$W = \int\limits_0^x (\sigma_{MT} - \sigma_{TM})\,\mathbf{t}\,dx'$$

причем σ_{MT} вычисляется по упругой деформации $\mathbf{a} + x'\mathbf{t}$ при помощи матрицы упругости $(E)_T$, а σ_{TM} — по упругой деформации $\mathbf{a} + x'\mathbf{t} - \zeta\mathbf{p}$ при помощи матрицы $(E)_P$. В результате получаем

$$\sigma_{MT} - \sigma_{TM} = \zeta (E)_T \mathbf{p} - \xi \left[\frac{d}{d\xi}(E)\right]_T \{\mathbf{b} - (x - x')\,\mathbf{t}\}$$

и потому работа будет равна

$$W = x\,[\zeta (E)_T \mathbf{p} + \xi (E)_T' \mathbf{b}] \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{2} x^2 \xi \mathbf{t} (E)_T' \cdot \mathbf{t} \tag{6}$$

На основании (3) и учитывая, что $\mathbf{b}$ есть упругая деформация в точке T до выхода за пределы поверхности F_K, преобразуем (6) к виду

$$W = x\xi\sigma^\circ \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{2} x^2 \xi \mathbf{t} (E)' \cdot \mathbf{t} \tag{7}$$

где введено обозначение нового физического вектора

$$\sigma^\circ = (E)\frac{d\text{э}^p}{d\xi} - (E)'\,\text{э}^e$$

и $(E)'$ есть производная матрицы (E) по деформации ξ в направлении $\mathbf{e}$.

Поскольку, очевидно,

$$(E)\frac{d\text{э}^e}{d\xi} + (E)'\,\text{э}^e = \frac{d\sigma}{d\xi}$$

то в выражении вектора σ° можно исключить производную матрицы упругости по ξ, после чего получим

$$\sigma^\circ = (E)\frac{d\text{э}}{d\xi} - \frac{d\sigma}{d\xi} \tag{8}$$

Этот вектор, как видно, не зависит от положения точки M, а только от T и направления TP. Выберем M в окрестности T на поверхности $F_K = 0$ (приближаясь к ней изнутри); тогда $\mathbf{t}$ станет вектором, лежащим в касательной гиперплоскости к F_K. Из постулата пластичности и (7) при $x \to 0$ получим $\sigma^\circ \cdot \mathbf{t} \geqslant 0$ для любого вектора $\mathbf{t}$. Это возможно только в случае $\sigma^\circ \cdot \mathbf{t} = 0$. Значит физический вектор σ° нормален к поверхности в точке T, т. е.

$$\sigma^\circ = D \operatorname{grad} F_K \tag{9}$$

Проведем теперь нормальную к F_K двумерную плоскость, содержащую векторы σ° и $\mathbf{t}$. Расстояние от линии пересечения ее с поверхностью в какой-нибудь точке до касательной гиперплоскости (измеряемое в указанной двумерной плоскости) через кривизну линии и расстояние x выражается формулой $z = {}^1/_2 \varkappa x^2$, причем кривизна $\varkappa$ считается положительной в случае вогнутости.

Во втором приближении скалярное произведение $\boldsymbol{\sigma}^\circ \cdot \mathbf{t}$ равно $-{}^1/_2 \varkappa x \,|\, \boldsymbol{\sigma}^\circ \,|$ и потому из (7) получаем

$$W = \frac{1}{2} x^2 \xi \left[-\varkappa \,|\, \boldsymbol{\sigma}^\circ \,| + \mathbf{t}(E)' \mathbf{t} \right]$$

Так как $\xi > 0$, то из $W > 0$ получаем

$$-\varkappa \,|\, \boldsymbol{\sigma}^\circ \,| + \mathbf{t}(E)' \mathbf{t} > 0 \tag{10}$$

Отсюда, вообще говоря, не следует выпуклость поверхности F_K, хотя выпуклые поверхности этому условию удовлетворяют.

Применение постулата пластичности к аналогичному процессу в пространстве напряжений приводит к изоморфизму уже полученного следствия: физический вектор

$$\text{э}^\circ \equiv \frac{d\text{э}^p}{d\Sigma} + (\mathscr{E})'_\Sigma \boldsymbol{\sigma} \equiv \frac{d\varepsilon}{d\Sigma} - (\mathscr{E}) \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\Sigma} = G^\circ \operatorname{grad} f_K \tag{11}$$

нормален к поверхности нагружения $f_K = 0$. Здесь $d\Sigma = |\, d\boldsymbol{\sigma} \,|$, $(\mathscr{E}) = (E)^{-1}$.

Если рассмотреть траекторию в виде ломаной прямой [3] и в (11) произвести замену

$$G^\circ d\Sigma = G df \tag{12}$$

то, пользуясь выражениями (5.1) и (5.10) работы [3] и учитывая, что в рассматриваемом случае

$$\operatorname{grad} f_K = |\operatorname{grad} f_K| \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma}$$

получим

$$N = N_K, \quad \frac{1}{P} - \frac{1}{P_K} = G (\operatorname{grad} f_K)^2 \tag{13}$$

В заключение повторим полученные результаты. Даны новые соотношения, связывающие физические векторы ($\boldsymbol{\sigma}^\circ$) и ($\text{э}^c$) с поверхностями текучести $F_K = 0$ и нагружения $f_K = 0$. Одно из этих соотношений, для частного случая отсутствия деформационной анизотропии, было ранее получено Друккером из его постулата. Теперь доказано, что указанный результат Друккера и новые соотношения являются следствием более общих пластических свойств тел, чем те, которые согласуются с постулатом Друккера.

Поступила 9 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Гудьер Дж. Н., Ходж Ф. Г. Упругость и пластичность, ИИЛ, 1960, стр. 80.
2. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред, ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 6.
3. Ильюшин А. А. Вопросы общей теории пластичности, ПММ, т. XXIV, вып. 3, 1960.
4. Ильюшин А. А. О приращении пластической деформации и поверхности текучести, ПММ, т. XXIV, вып. 4, 1960.