Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К КИНЕТИКЕ РОСТА ТРЕЩИН

Л. М. Качанов

(Ленинград)

По современным воззрениям разрушение представляет собой процесс, развивающийся во времени. Разрушение зависит от характера нагрузок, которые могут быть постоянными, циклическими, ударными или смешанного типа. Ограничимся анализом разрушения при действии постоянных нагрузок.

С самого начала по объему тела рассеяно большое число различных дефектов, зародышевых трещин. При нагружении в ослабленных местах тела возникают трещины. Простейший случай прямолинейной изолированной трещины в плоском однородном поле упругого тела рассматривался многими авторами — Гриффитсом [1], Орованом [2], Ирвином [3] и др. Общие результаты недавно получены в работах Г. И. Баренблатта [4-8]. При расширении трещины освобождается некоторая упругая энергия, расходуемая, при медленном раскрытии трещины, на работу поверхностных сил при образовании краев трещины. В статье [6] Г. И. Баренблатта показано, что поверхностная энергия (для хрупких материалов) или пластическая поверхностная работа (для металлов) связана с модулем сцепления K. Упомянутые работы относятся к анализу равновесных трещин, т. е. таких трещин, размеры которых при данной нагрузке остаются неизменными; рост таких трещин возможен лишь с изменением нагрузки.

Однако многочисленные наблюдения показывают, что при фиксированной нагрузке трещины растут. Это обстоятельство является одной из главных причин зависимости прочности от времени. Последний вопрос (так называемая проблема длительной прочности) имеет большое практическое значение и привлекает сейчас внимание многих ученых и инженеров. В настоящей работе излагается попытка анализа роста трещин в рамках механики сплошных сред.

1. Основные положения. По наблюдениям первоначально происходит медленный рост трещин; эта стадия составляет основную часть всего времени жизни детали. В дальнейшем наступает ускоренный рост трещин, переходящий в заключительной стадии в распространение трещины со скоростью, сопоставимой со скоростью звука. Следует также отметить, что вопросы развития трещины в реальном теле связаны с локальными особенностями его структуры и во многом остаются неясными. Тем не менее, представляется, что некоторые общие закономерности развития трещин в первой и второй стадиях можно выяснить, не касаясь деталей структуры.

В идеально упругом теле развитие трещины при фиксированной нагрузке невозможно. Поэтому рост трещины должен быть связан с упругими несовершенствами, в частности, с явлением текучести твердых тел.

Рассмотрим сначала случай линейной ползучести, отвечающей схеме максвелловской среды. Для этой среды скорости деформации $\xi_x, \xi_y, \ldots, \eta_{xz}$ связаны с компонентами напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{xz}$ соотношениями

$$2\xi_x = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{G}\frac{d}{dt}\right)(\sigma_x - \sigma), \qquad \eta_{xy} = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{G}\frac{d}{dt}\right)\tau_{xy} \qquad (1.1)$$

где μ — коэффициент вязкости, G — модуль сдвига, σ — среднее давление. Для простоты принято, что коэффициент Пуассона равен половине.

Следуя Г. И. Баренблатту [4], будем в трещине различать две области: внутреннюю, где противоположные берега трещины разошлись и между ними нет притяжения, и концевую, где действуют силы сцепления. Концевая область d (фиг. 1) мала сравнительно с внутренней (*гипотеза I*). Конфигурация берегов трещины в концевой области не зависит от действующих нагрузок и для данного материала при данных условиях всегда одна и та же (*гипотеза II*).

Будем также считать справедливым условие ограниченности напряжений на концах трещины и плавности смыкания ее кромок (*гипотеза III*).

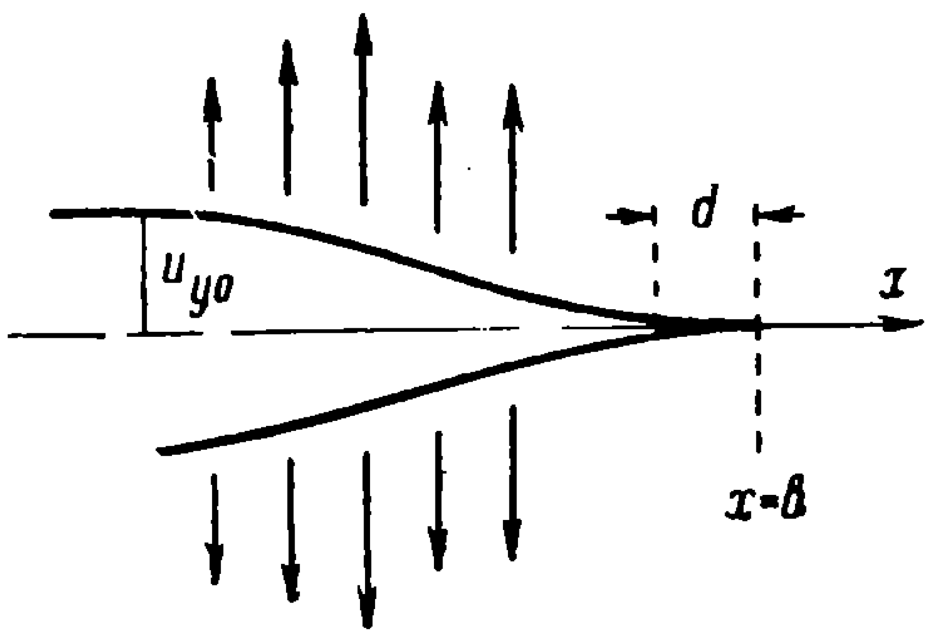
Рассмотрим, для определенности, напряженное и деформированное состояния бесконечной пластины с прямолинейной трещиной от $x = a$ до $x = b$. Распределение напряжений в упругой пластине при заданных нагрузках не зависит от модуля упругости при любых значениях абсцисс концов трещины a, b. Но тогда это же поле напряжений, согласно принципу Вольтерра [9], будет и в линейной упруговязкой пластине.

Это остается справедливым и при изменении некоторых размеров тела (например, длины трещины) с течением времени. Смещение же в упруго-вязкой пластине равно

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \frac{G}{\mu} \int_0^t \mathbf{u}_0 \, dt \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u}_0$ смещение в упругом состоянии. При фиксированных размерах $\mathbf{u}_0$ не зависит от времени и тогда

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \left(1 + \frac{G}{\mu} t\right) \tag{1.3}$$



Фиг 1.

Так как конфигурация трещины в концевой области сохраняется, то в последней соотношение (1.3) характеризует темп раскрытия, если под t понимать малое время после прихода трещины в данную точку.

Таким образом, в упруговязком теле берега трещины с течением времени расходятся, а ее кромки смыкаются плавно.

Как показал Г. И. Баренблатт [4,5], размер трещины $2l$ в *упругом теле* определяется из соотношения

$$\Phi(l) = \frac{K}{\sqrt{2\lambda}} \tag{1.4}$$

где λ — параметр нагрузки; функция $\Phi(l)$ зависит от типа трещины и связана в сущности с упругой энергией, освобождающейся при образовании данной трещины. Модуль сцепления K равен

$$K = \int_0^d \frac{F(s)\, ds}{\sqrt{s}} \tag{1.5}$$

Здесь функция $F(s)$ характеризует распределение растягивающих напряжений, обусловленных силами сцепления. В упругом теле расстояние между берегами трещины при заданной нагрузке не изменяется.

Зависимости (1.4), (1.5), выражающие условие ограниченности напряжений на кромке трещины, сохраняются и в случае рассматриваемого линейного упруговязкого тела. Однако, как было показано выше, берега трещины с течением времени расходятся. Поэтому при неизменной нагрузке и фиксированном размере трещины расстояние между ее берегами в концевой зоне также должно увеличиваться. Это должно привести, вообще говоря, к уменьшению K вследствие падения сил сцепления. При этом происходит расширение трещины, приводящее к восстановлению прежнего значения K, и т. д.

Уравнение (1.5) представляет собой в сущности условие равновесия. Скорость падения величины K при фиксированном размере трещины характеризуется значением локальной производной в начальный момент времени

$$(\partial K / \partial t)_{t=0}$$

Это изменение компенсируется соответствующим изменением левой части, т. е.

$$\Phi'(l)\frac{dl}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)_{t=0} \qquad (1.6)$$

Рассмотрим некоторые соображения относительно производной в правой части. Как подчеркнул Г. И. Баренблатт [4], форма концевой области соответствует максимально возможному сопротивлению. Расхождение берегов концевой области приводит к падению сопротивления и при малых временах (для трещины фиксированного размера) имеем

$$K = (K)_{t=0} - \varkappa\frac{G}{\mu}t + \ldots \qquad (1.7)$$

где коэффициент $\varkappa > 0$ можно рассматривать как некоторую новую константу материала. С практической точки зрения эта характеристика будет весьма важной, так как для прочности тела существенно не столько наличие повреждений (дефектов, трещин), сколько их последующее развитие. Условимся называть $\varkappa$ *коэффициентом повреждаемости*.

Итак, согласно (1.6), (1.7) получаем

$$\Phi'(l)\frac{dl}{dt} = -\frac{G}{\mu}\frac{\varkappa}{\sqrt{2\lambda}}$$

Отсюда находим

$$\Phi(l) - \Phi(l_0) = -\frac{G}{\mu}\frac{\varkappa}{\sqrt{2\lambda}}t \qquad (1.8)$$

где $2l_0$ — размер трещины в *упругом* теле. Соотношение (1.8) можно также представить в форме

$$\Phi(l) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(K - \varkappa\frac{G}{\mu}t\right) \qquad (1.9)$$

Здесь и в дальнейшем под K понимается значение модуля сцепления по определению Г. И. Баренблатта.

Если трещина является устойчивой [6], т. е. для увеличения размера трещины необходимо увеличение нагрузки, то $\Phi'(l) < 0$, тогда $dl/dt > 0$, т. е. с течением времени трещина растет.

Если трещина является неустойчивой, то $\Phi'(l) > 0$ и, следовательно, $dl/dt < 0$. Этот результат следует интерпретировать так: течение материала вносит возмущения в равновесное состояние, и неустойчивая трещина катастрофически расширяется.

2. Примеры. Рассмотрим в качестве иллюстрации два простых примера.

1°. Трещина образуется в плоском поле, создаваемом двумя равными силами P, действующими вдоль прямой в противоположных направлениях. Легко видеть, что [5]

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{(1.75+\xi^2)^2 \sqrt{\xi}}{(1+\xi^2)^{3/2}} \qquad \left(\xi = \frac{l}{L}\right)$$

где $2L$ — расстояние между точками приложения сил; параметр нагрузки $\lambda = P$. Зависимость ξ от времени показана на фиг. 2. В начальный момент $\xi = \xi_0$, в момент времени $t_* = K\mu / \varkappa G$ наступает катастрофическое расширение трещины. Таким образом, существует конечное время разрушения. Если сила P меньше критического значения, трещина не возникает.

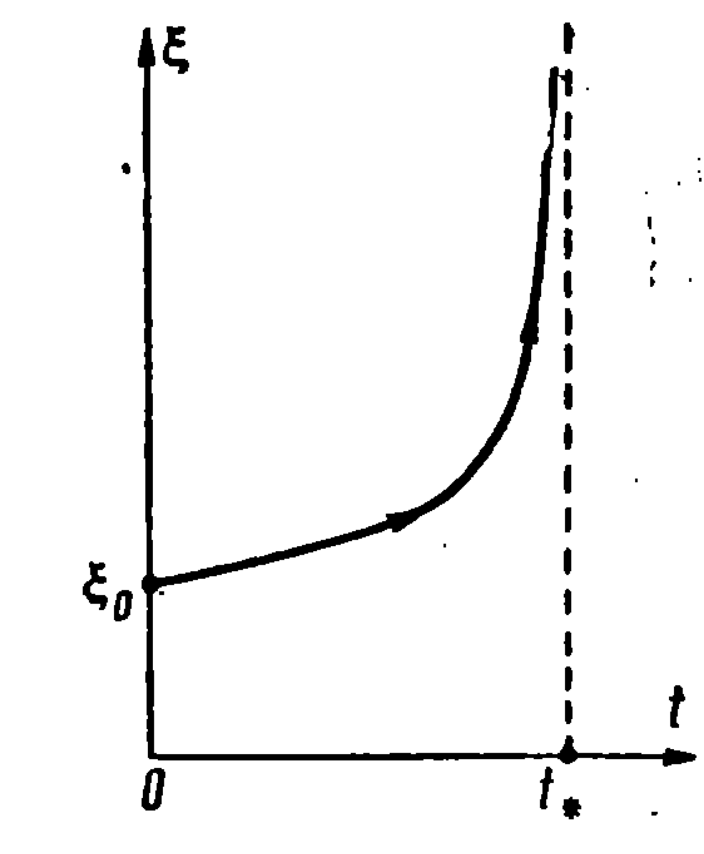
2°. Берега трещины в бесконечной полосе ширины $2L$ раскрываются равными по величине и обратными по направлению сосредоточенными силами P. В этом случае [5]

$$\Phi(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{4L}} \frac{1}{\sin \pi\xi}$$

С течением времени трещина развивается следующим образом. При нагружении силой $P < P_{\max}$, образуется равновесная трещина; в дальнейшем она постепенно растет, в момент времени

$$t_1 = \frac{\mu}{\varkappa G}\left(1 - \sqrt{\frac{\pi}{2L}\frac{P}{K}}\right)$$

трещина становится неустойчивой и наступает лавинное разрушение.



Фиг. 2

3. Заключение. Рассмотренная выше качественная картина сохраняется в общем и для других линейных сред, обладающих свойством текучести. Пусть, например, среда следует интегральным соотношениям Больцмана

$$\varepsilon_* = \frac{1}{2G_*}(\sigma_* - \sigma), \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_*}\tau_{xy} \tag{3.1}$$

Здесь введен оператор

$$\frac{1}{G_*} f = \frac{1}{G} f + \int_0^t M(t-s) f(s)\, ds$$

с ядром последействия $M(t-s)$. В соответствии с принципом Вольтерра напряженное состояние то же, что и в упругом теле.

В концевой области для малого времени τ после прихода трещины в данную точку смещение равно

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 [1 + GM(t)\tau] \tag{3.2}$$

Положим

$$M^\circ(t) = G\int_0^t M(t-s)\, ds$$

Рассматривая уравнение вида (1.6), легко получаем вместо (1.9) соотношение

$$\Phi(l) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}[K - \varkappa M^{\circ}(t)] \tag{3.3}$$

Если эффект времени имеет характер незначительного затухающего последействия (т. е. $M^{\circ}(t) \to M^{\circ}(\infty)$ при $t \to \infty$, причем $M^{\circ}(\infty) \ll 1$), то после раскрытия устойчивая трещина некоторое время расширяется, но вскоре ее развитие практически приостанавливается. Наоборот, при незатухающем течении (ползучести) рост трещины не замедляется. Темп роста трещины определяется, в частности, характером ядра последействия.

Некоторые другие эффекты могут быть объяснены неоднородностью и влиянием деформации. Например, деформация ползучести облегчает возникновение трещин [10], поэтому трещина, достигающая данной точки через некоторый промежуток времени, встречает меньшее сопротивление. Этот эффект можно учесть, считая K и $\varkappa$ функциями предшествующей деформации ползучести.

Рассмотренные выше результаты относятся к линейным средам. Для нелинейных течений (например, в случае ползучести металлов) качественная картина в общем сохраняется, однако, указать количественные характеристики трудно, так как с течением времени напряженное состояние тела может значительно отойти от упругого напряженного состояния.

Поступила 13III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith A. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans. Roy. Soc., 1920, A — 221.
2. Orowan E. Energy Criteria of Fracture. Welding Journ., Res. Suppl., March., 1955.
3. Irwin G. Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate. Journ. Appl. Mechan., 1957, Vol. 24, № 3.
4. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.
5. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
6. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями. ПММ, 1959, т. XXII, вып. 5.
7. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
8. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
9. Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes. Paris, Gauthier — Villard, 1913.
10. Салли А. Ползучесть металлов и жаропрочные сплавы. Оборонгиз, 1953.