

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ В ОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Г. А. Скуридин

(Москва)

Изучение упругих продольных и поперечных волн в средах, содержащих криволинейные границы, имеет большое теоретическое и практическое значение.

Однако до настоящего времени не удалось получить достаточно общих результатов, характеризующих поле смещений упругих волн, и выявить их динамические характеристики (амплитуду, форму записи и т. д.).

Разработанные до настоящего времени методы решения задач динамической теории упругости применимы для некоторых частных видов криволинейных поверхностей [1-8].

Для случая дифракции упругих установившихся волн около произвольного неподвижно заделанного препятствия задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, которая затем редуцируется к регулярной системе Фредгольма [1].

В работе [9] рассмотрена двумерная задача дифракции упругих волн для произвольного кусочно-гладкого контура. Задача сводится также к системе интегральных уравнений, разрешимость которой в работе не доказывается. Аналогично решается задача дифракции для трехмерного случая в работе [10], причем, в отличие от работы [9], доказана разрешимость системы интегральных уравнений. Результаты, полученные в [1-10], не позволяют в силу значительных математических трудностей выявить какие-либо физические следствия по динамике упругих волн.

В цикле работ, содержащихся в [11], предложен метод анализа бесконечных рядов, представляющих решения задач распространения упругих волн в цилиндрических и сферических областях. Однако этот метод приложим также только к частным видам поверхностей.

В работе [12] предложен достаточно общий метод решения задачи рассеяния упругих волн на произвольной криволинейной поверхности и получены соответствующие асимптотические формулы для отраженных продольных и поперечных волн, а также головной волны, возникающей при падении на криволинейную поверхность плоской поперечной упругой волны. Этот метод основан на применении принципа Кирхгоффа для системы волновых уравнений и «принципа изолированного элемента», который применим для прямолинейных [13, 14] и криволинейных поверхностей [15].

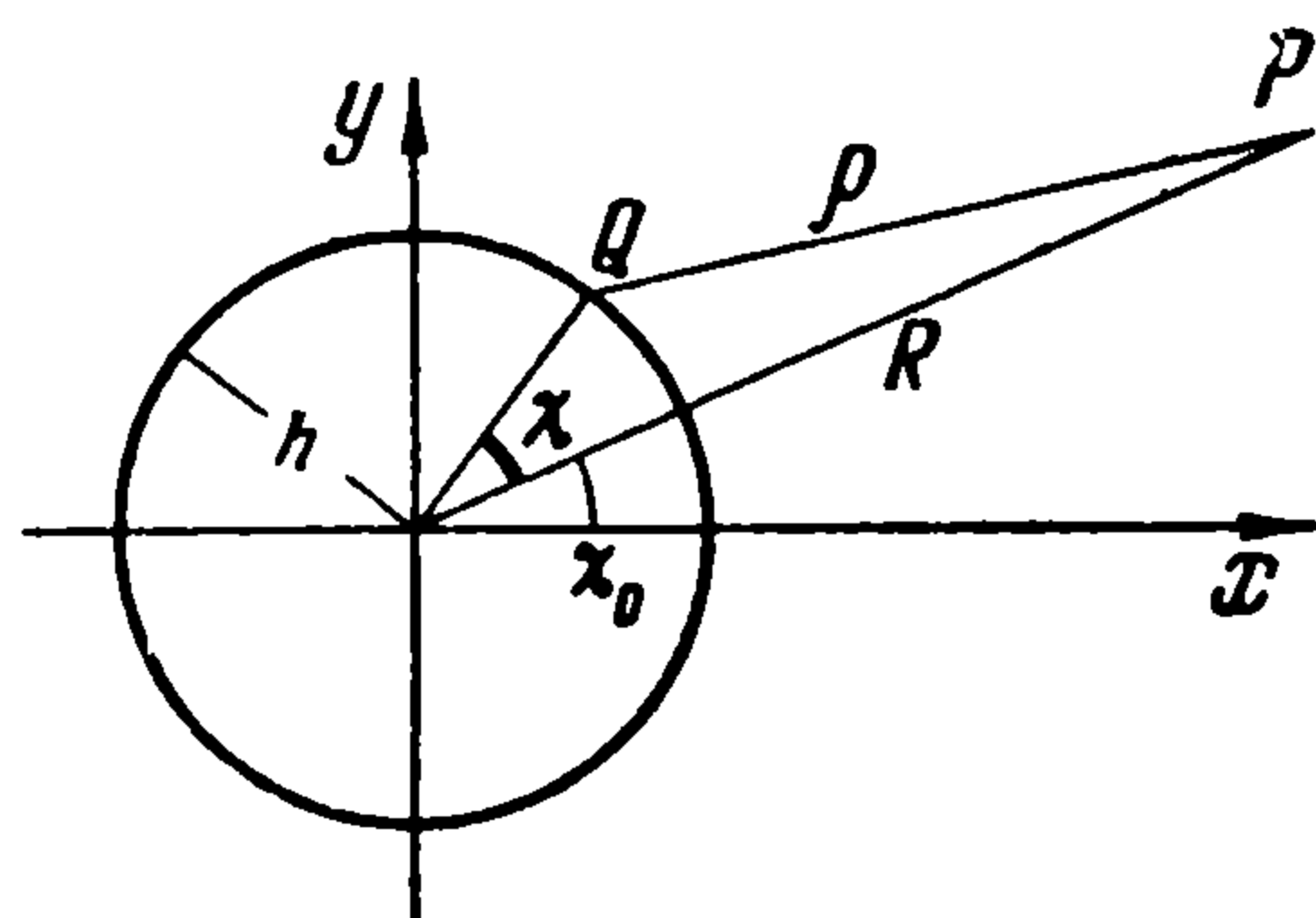
В настоящее время показано, что «принцип изолированного элемента» справедлив в первом приближении для получения законов отражения и преломления как для прямолинейных границ, так и для криволинейных [15, 16], т. е. для углов, меньших предельного (угол полного внутреннего отражения). Есть основания предполагать, что он остается верным и для углов больших предельного, как это вытекает из формул, полученных на основании применения асимптотического (или лучевого) метода [17, 18].

Ниже исследуется головная волна, возникающая при падении на жестко закрепленный круговой цилиндр плоской упругой волны; явления, возникающие в этом случае (в соответствии с принципом Кирхгоффа), рассматриваются только в освещенной области. Из кинематического анализа вытекает, что головная волна не может возникнуть в области «тени». В области «тени» имеет место более сложная дифракционная картина, которая не рассматривается. Анализ дифракционной картины в области «тени» и «полутени» возможен только на основе точного решения с применением методов аналогичных тем, которые развиты Фоком для случая электродинамики [19, 20].

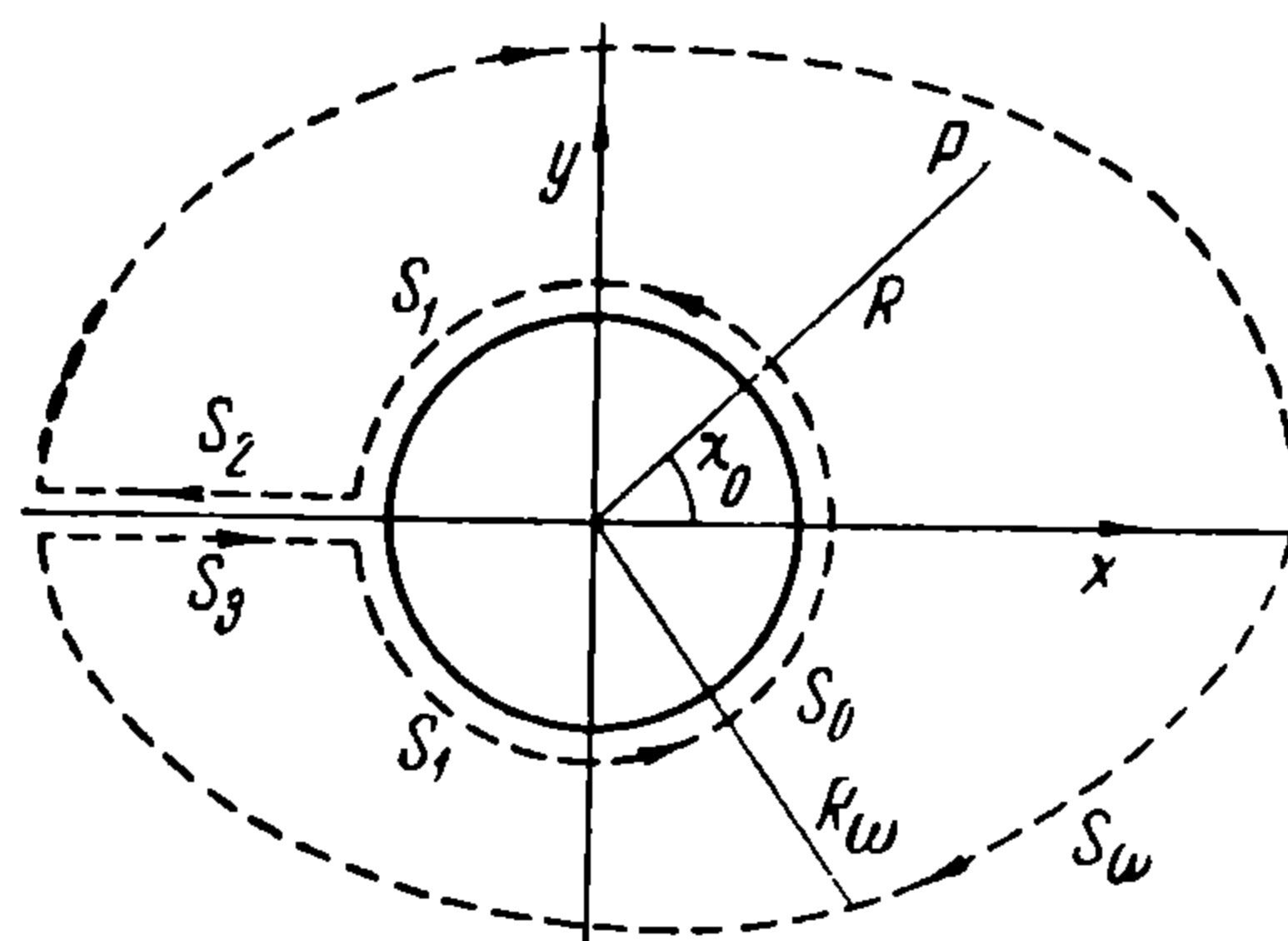
1. **Постановка задачи и построение решения.** Пусть на цилиндр радиуса h , расположенный в бесконечном упругом пространстве, падает в направлении, параллельном оси x , плоская упругая поперечная волна

$$\psi_0(x, t) = e^{-i\omega t} e^{ik_2 x} \quad (1.1)$$

Предполагается, что плоскость падения волны перпендикулярна образующей цилиндра. Направляющая цилиндра в плоскости $z = 0$ изображена на фиг. 1.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отраженные потенциалы в соответствии с «принципом изолированного элемента» вблизи точек границы цилиндра имеют вид

$$\varphi(x, y, t) = A e^{-i\omega t} e^{ik_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)}, \quad \psi_1(x, y, t) = B e^{-i\omega t} e^{ik_2(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)} \quad (1.2)$$

Компоненты вектора смещения представляются через (1.1) и (1.2) в виде

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \quad (\psi^* = \psi_0 + \psi_1) \quad (1.3)$$

Обозначим через χ и χ_0 углы (фиг. 1), образованные радиусом вектора точки Q и точки P с осью x .

На границе цилиндра будем иметь следующие условия:

$$u = v = 0 \quad (1.4)$$

Используя (1.1), (1.2), (1.3) и подставляя в (1.4), получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon \sin^2 \chi - \cos \chi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi}, & \alpha_2 &= 1 - 2 \cos^2 \chi \\ \beta_1 &= -(\varepsilon \cos \chi + \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi}) \sin \chi, & \beta_2 &= -2 \sin \chi \cos \chi \\ \gamma_1 &= h(\varepsilon \cos \chi + \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi}), & \gamma_2 &= 2h \cos \chi \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} A(\chi) &= -\frac{2\varepsilon \sin \chi \cos \chi}{\varepsilon \sin^2 \chi + \cos \chi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi}} \\ B(\chi) &= -\frac{\varepsilon \sin^2 \chi - \cos \chi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi}}{\varepsilon \sin^2 \chi + \cos \chi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi}} \end{aligned} \quad \left(\varepsilon = \frac{k_2}{k_1} > 1\right) \quad (1.6)$$

Требуется найти значение поля в произвольной точке P пространства xy . Представим отраженные потенциалы (1.2) в произвольной точке P при помощи формулы Кирхгоффа

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik_1 r}}{r} - \frac{e^{ik_1 r}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \quad (1.7)$$

$$\psi_1(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \psi_1(Q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 r}}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right\} dS$$

При этом под поверхностью интегрирования S подразумевается сумма $S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_\omega$ (фиг. 2). Интегралы по S_1 равны нулю в силу условий Кирхгоффа (область «тени»), интегралы по S_2 и S_3 взаимно уничтожаются. Что касается интегрирования по S_ω , то, как показывают вычисления [21], интегралы по S_ω стремятся к нулю при $R_\omega \rightarrow \infty$. После этого входящие в (1.7) выражения имеют вид $dS_0 = h d\chi d\zeta$, $r = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}$. Предполагается $h \ll R$, поэтому можно считать: $\rho = \sqrt{h^2 + R^2 - 2hR \cos(\chi - \chi_0)} \approx R - h \cos(\chi - \chi_0) \approx R$, $-\frac{\pi}{2} \ll \chi \ll \frac{\pi}{2}$

Продельывая выкладки, аналогичные [12], получим для смещений в продольной отраженной волне

$$u_1(P) \approx ik_1^2 \cos \chi_0 U_1(\chi, R), \quad v_1(P) \approx ik_1^2 \sin \chi_0 U_1(\chi, R)$$

Здесь

$$U_1(\chi, R) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp[i(k_1 R - 1/4\pi)]}{\sqrt{k_1 R}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A(\chi) Q(\chi) \exp[ik_1 f(\chi)] d\chi \quad (1.8)$$

Для смещений в отраженной поперечной волне получим:

$$u_2(P) \approx ik_2^2 \sin \chi_0 U_2(\chi, R), \quad v_2(P) \approx -ik_2^2 \cos \chi_0 U_2(\chi, R)$$

Здесь

$$U_2(\chi, R) = \cos \frac{\chi_0}{2} \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp[i(k_2 R - 1/4\pi)]}{\sqrt{k_2 R}} \times \\ \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B(\chi) \cos\left(\chi - \frac{\chi_0}{2}\right) \exp\left[-ip \cos\left(\chi - \frac{\chi_0}{2}\right)\right] d\chi \quad (1.9)$$

Входящие в (1.8) и (1.9) величины имеют вид

$$f(\chi) = (1 - \varepsilon) \cos \chi - 2 \cos \frac{\chi_0}{2} \cos\left(\chi - \frac{\chi_0}{2}\right) \\ Q(\chi) = \cos \frac{\vartheta + \chi_k}{2} \cos \frac{\vartheta - \chi_k}{2}, \quad p = 2k_2 h \cos \frac{\chi_0}{2} \\ \chi_k = \arcsin(\varepsilon \sin \chi), \quad \vartheta = \chi - \chi_0$$

Локальные коэффициенты отражения $A(\chi)$ и $B(\chi)$ определяются по формулам (1.6).

2. Приближенная оценка интегралов. Интегралы типа (1.8) и (1.9) удобнее всего анализировать методом стационарной фазы. Для этого найдем особые точки подынтегральных функций в выражениях (1.8) и (1.9). Особые точки могут возникнуть только за счет множителей локальных коэффициентов отражения (1.6), т. е. при $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi} = 0$.

В этом случае имеем

$$\sin \chi^* = \theta \quad \left(\theta = \frac{k_1}{k_2} < 1\right) \quad (2.1)$$

Итак, в случае падения поперечной волны точки ветвления лежат на вещественной оси. Что касается корней уравнения

$$\Delta = \varepsilon \sin^2 \chi + \cos \chi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi} = 0 \quad (2.2)$$

то, как показывает анализ, уравнение (2.2) не имеет вещественных корней [12].

Переходим к оценке интегралов, входящих в (1.8) и (1.9). Уравнение точек перевала имеет вид:

для продольной отраженной волны

$$\chi^{(1)} = \arcsin \frac{\theta \sin \chi_0}{\sqrt{1 + 2\theta \cos \chi_0 + \theta^2}} \quad (2.3)$$

для поперечной отраженной волны

$$\chi^{(2)} = \frac{1}{2} \chi_0 \quad (2.4)$$

Можно показать, что в допределном случае имеет место соотношение $\chi^{(1)} < \chi^{(2)} < \chi^*$. Определим положение перевальных контуров интегрирования для вычисления смещений отраженных продольной и поперечной волн.

Уравнение перевального пути Γ_1 в случае продольной волны (1.8) будет

$$\operatorname{Im} f(\chi) = \operatorname{Im} f(\chi^{(1)}), \quad \operatorname{Re} f(\chi) < 0$$

Для проверки последнего условия сделаем замену переменных

$$\chi = \chi^{(1)} + se^{i\theta_1} \quad (s \ll 1)$$

В результате, если разложить $f(\chi)$ в окрестности $\chi = \chi^{(1)}$ в ряд Тейлора, получим

$$\operatorname{Re} f(\chi) = -2s \sin \theta_1 (\chi^{(1)} + s \cos \theta_1) \frac{f''(\chi^{(1)})}{2} + \dots$$

Таким образом, поведение функции $\operatorname{Re} f(\chi)$ определяется знаком второй производной $f''(\chi^{(1)})$. Пусть для простоты рассуждений $\chi^{(1)} = 0$.

В этом случае

$$\operatorname{Re} f(\chi) = -2s^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \frac{f''(0)}{2} = \frac{s^2}{2} \sin 2\theta^* f''(0) \quad (\theta_1 = -\theta^*)$$

Предположим, что $f''(0) > 0$. Тогда направление через точку $s = 0$, соответствующее $\theta^* = 1/4 \pi$, будет наибо́льшим [12] для функции $1/2 s^2 \sin 2\theta^*$. Учтывая, что

$$\theta_1 = -\theta^*, \quad f''(\chi^{(1)}) = -\sqrt{1 + 2\theta \cos \chi_0 + \theta^2} < 0$$

получим положение перевального контура Γ_1 продольной волны (фиг. 3).

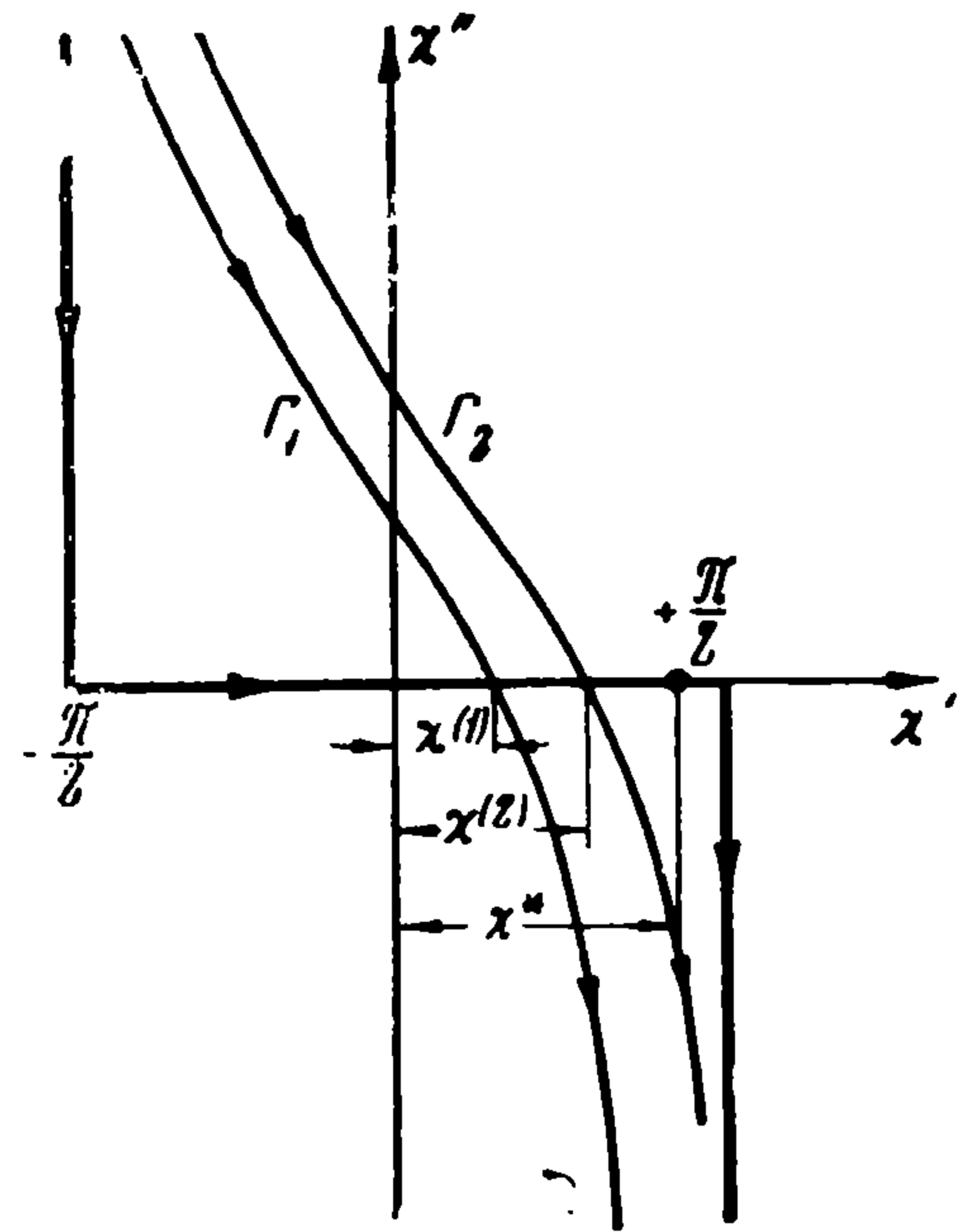
Для определения направления перевального пути в случае поперечной волны сделаем в (1.9) замену $\cos(\chi - 1/2 \chi_0) = 1 + is^2$, где s — новая вещественная переменная. Тогда уравнение для перевального контура в комплексной плоскости (χ', χ'') будет

$$\cos(\chi' - 1/2 \chi_0) \operatorname{ch} \chi'' = 1 \quad (2.5)$$

Перевальный контур Γ_2 пересекает вещественную ось в точке $\chi^{(2)} = 1/2 \chi_0$ под углом в 45° и уходит с одной стороны в $-1/2 \pi + 1/2 \chi_0 + i\infty$, а с другой в $+1/2 \pi + 1/2 \chi_0 - i\infty$ (фиг. 3).

Выражения для смещения в продольной отраженной волне представим в виде

$$u_1(P) \approx ik_1 \cos \chi_0 U_1(\chi^{(1)}, R), \quad v_1(P) \approx ik_1 \sin \chi_0 U_1(\chi^{(1)}, R)$$



Фиг. 3

Здесь

$$U_1(\chi^{(1)}, R) = \sqrt{\frac{h}{2R}} A(\chi^{(1)}) Q(\chi^{(1)}) \exp[ik_1(R + hf(\chi^{(1)}))] \quad (2.6)$$

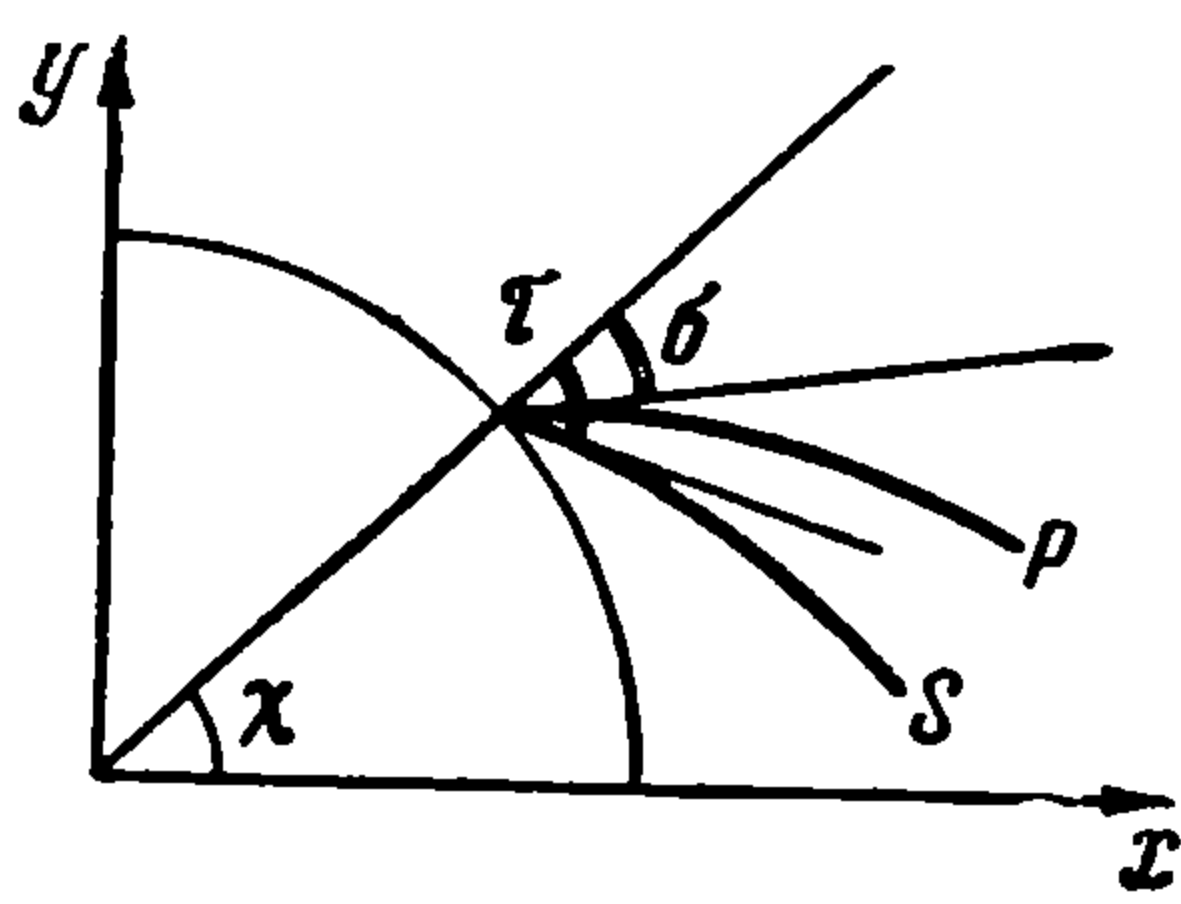
Аналогично для смещений в поперечной отраженной волне

$$u_2(P) \approx ik_2 \sin \chi_0 U_2(\chi_0, R), \quad v_2(P) \approx -ik_2 \cos \chi_0 U_2(\chi_0, R)$$

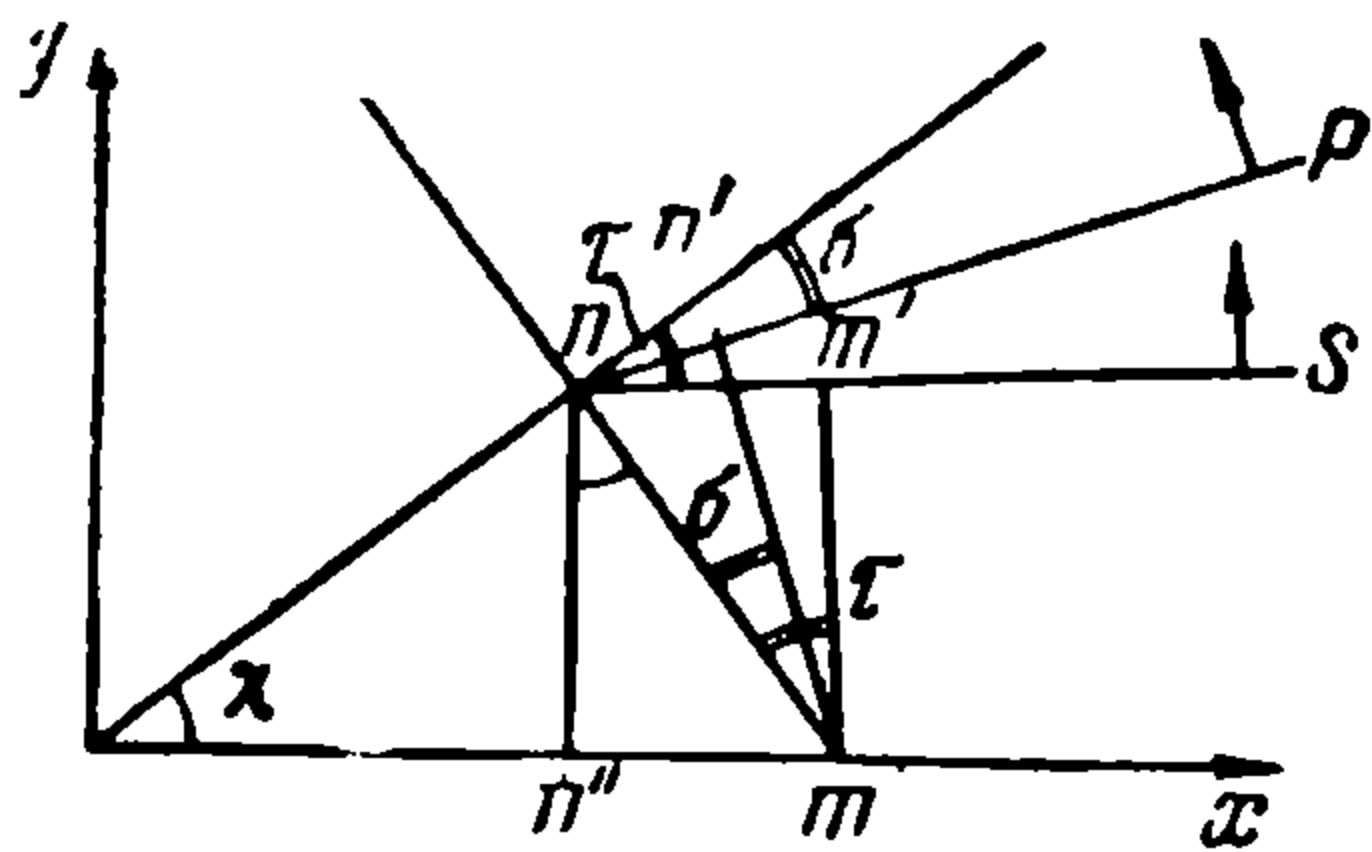
Здесь

$$U_2(\chi_0, R) = \sqrt{\cos \frac{\chi_0}{2} \frac{h}{2R}} B\left(\frac{\chi_0}{2}\right) \exp\left[ik_2\left(R - 2h \cos \frac{\chi_0}{2}\right)\right] \quad (2.7)$$

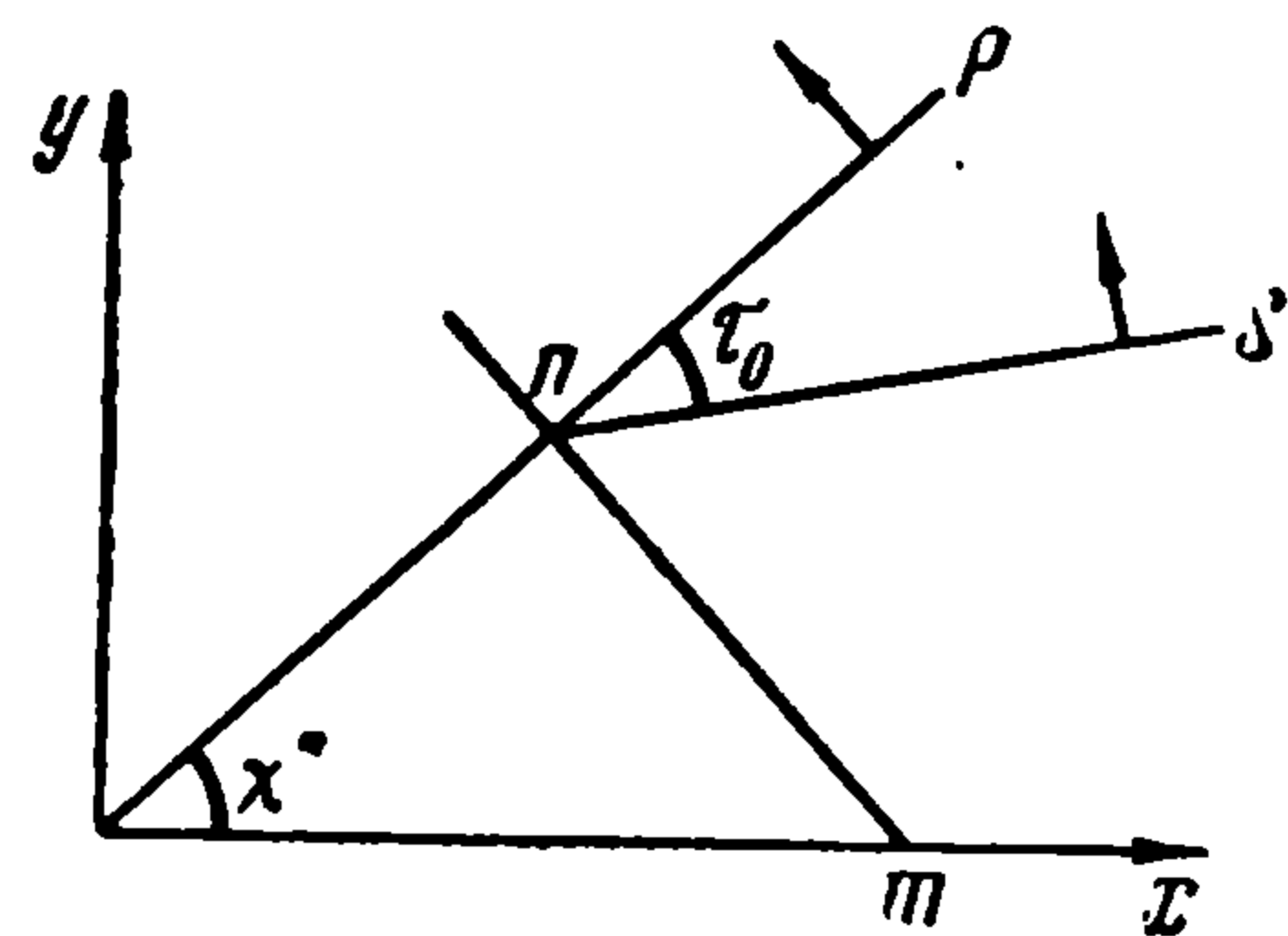
Полученные формулы для смещений отраженных продольной и поперечной волн легко получить при помощи асимптотического (или лучевого)



Фиг. 4



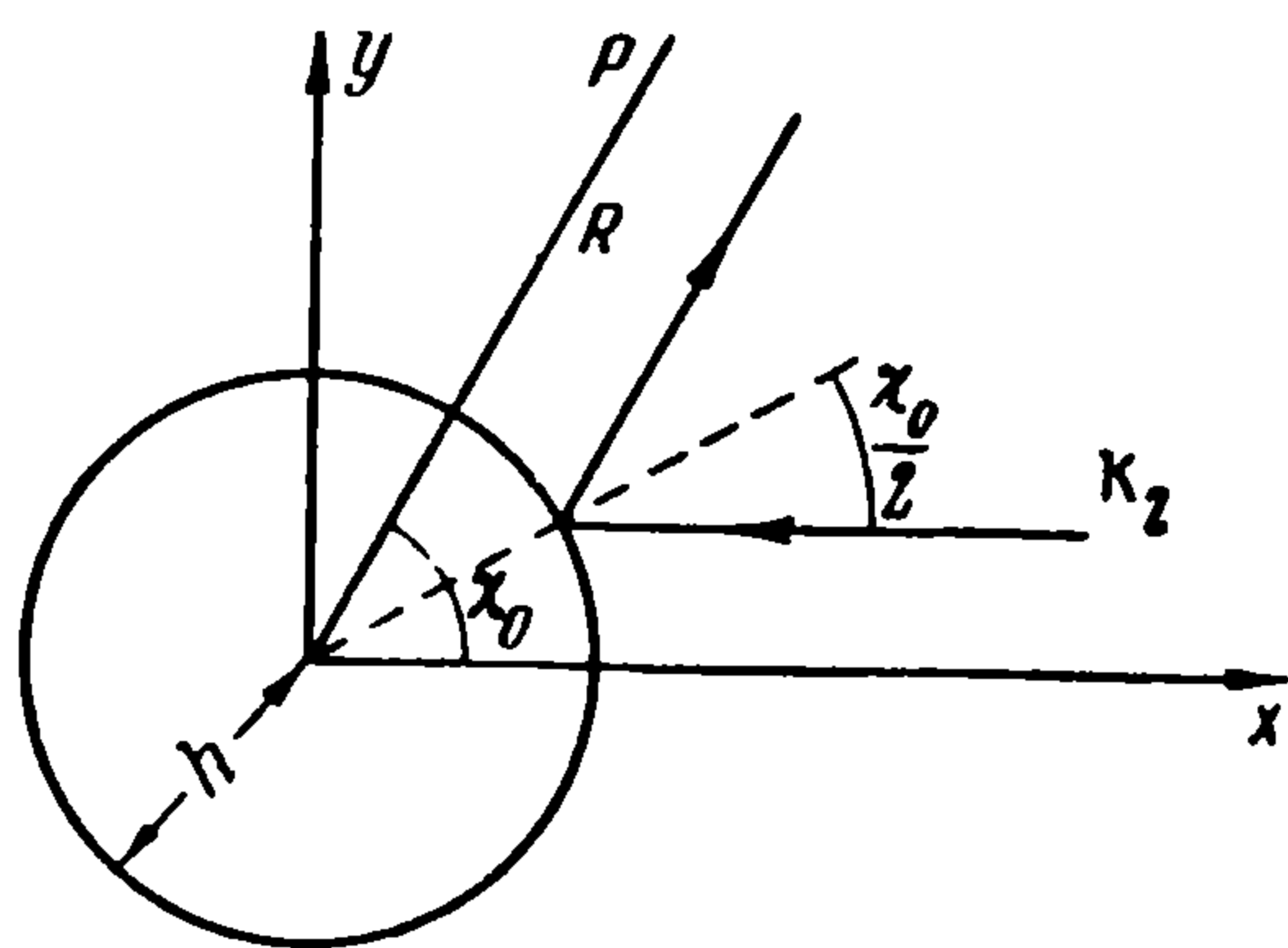
Фиг. 5



Фиг. 6

метода, который в данном случае будет следствием асимптотического анализа интегралов Кирхгоффа при условии $k_{1,2}R \gg 1$ и $k_{1,2}h \gg 1$. Однако эти формулы необходимы для дальнейшего исследования головной волны.

Выражение (2.7) не будет полным, так как оно не учитывает точек ветвления подынтегральных функций в (1.9). Последнее обстоятельство необходимо учитывать при деформации первоначального контура интегрирования в перевальный контур Γ_2 . Этот случай мы рассмотрим в следующем параграфе.



Фиг. 7

3. Исследование головной волны. Рассмотрим образование головной волны с кинематической точки зрения. На фиг. 4 представлена лучевая картина положения фронтов отраженной продольной и поперечной волн в некоторый момент времени. Найдем соотношения, связывающие углы χ , τ и σ . Из фиг. 5 имеем $\cos \tau = \sin \chi$, $\cos \sigma = (a/b) \sin \chi$.

При полном внутреннем отражении, очевидно, $\sigma = 0$ (фиг. 6) и мы приходим к условию, соответствующему появлению головной волны

$$\sin \chi^* = b/a = \theta \quad (3.1)$$

Как видно из сравнения (2.1) и (3.1), эти условия эквивалентны, т. е. точка ветвления геометрически определяет предельный угол χ^* .

Если теперь представить себе ход лучей поперечных падающей и отраженной волн, то картина будет следующей. Точке наблюдения P соответствует направление $\chi_0 = \text{const}$. Явления рассматриваются на расстояниях $R/\lambda \gg 1$, поэтому из всех лучей, рассеянных данной точкой цилиндрической поверхности, доминирующим будет луч, параллельный

$\chi_0 = \text{const}$. Падающий луч параллелен оси x . В приближении «принципа изолированного элемента» вблизи поверхности должно соблюдаться известное правило равенства углов падения и отражения. Поэтому отраженный луч поперечной волны будет соответствовать углу $\chi^{(2)} = 1/2 \chi_0$, т. е. перевальная точка $\chi^{(2)}$ определяет угол, под которым отражается поперечная волна вблизи цилиндрической поверхности (фиг. 7). При полном внутреннем отражении получим

$$\chi^{(2)} = \chi^* = \arcsin \theta \quad (3.2)$$

Рассмотрим частные случаи упругих сред. Положим $\lambda = \mu$ (гипотеза Пуассона), тогда

$$\sin \chi^* = t/a = 1/\sqrt{3}, \text{ или } \chi^* \approx 35^\circ$$

Если же считать, что $b/a = 1/2$, то $\chi^* \approx 30^\circ$, т. е. в обоих случаях головная волна появляется на освещенной части поверхности цилиндра; однако для упругих сред всегда $a > b$, поэтому головная волна не может появиться в области тени при данной постановке задачи¹.

Пусть $\chi^{(2)} > \chi^*$. Это значит, что в некоторый момент времени фронт отраженной продольной волны начинает опережать фронт отраженной поперечной волны, отрываясь от последнего и порождая дополнительное

возмущение — головную волну. Положение этих фронтов показано на фиг. 8. В результате проведенного кинематического анализа видим, что полное поле поперечной волны складывается из двух частей

$$U_i^* = u_i + u_i^* \quad (i = 1, 2)$$

Здесь u_i определяются [по формулам (2.7), а u_i^* интегралом по разрезу Γ_0 (фиг. 9), к анализу которого сейчас и перейдем.

Из-за наличия радикала $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi}$ подынтегральная функция в (1.9) будет двузначной функцией с точкой ветвления $\chi^* = \arcsin \theta$, лежащей на вещественной оси. Вследствие этого исследование интеграла, входящего в (1.9), удобнее всего осуществить на двулистной поверхности Римана[22].

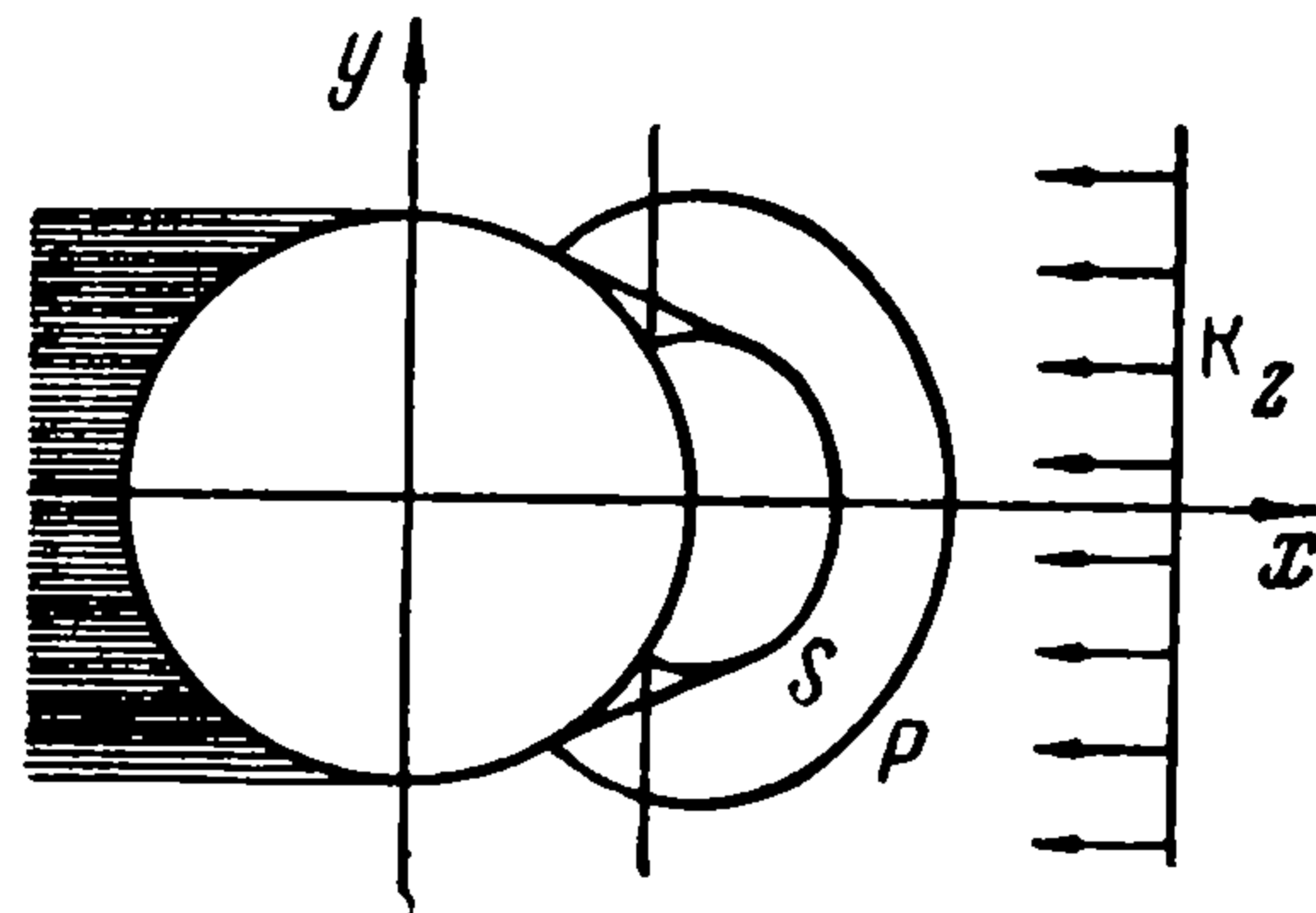
Приводим окончательные выражения для смещений в головной волне

$$u^*(P) \approx ik_2^2 \sin \chi_0 U^*(\chi, R), \quad v^*(P) \approx -ik_2^2 \cos \chi_0 U^*(\chi, R) \quad (3.3)$$

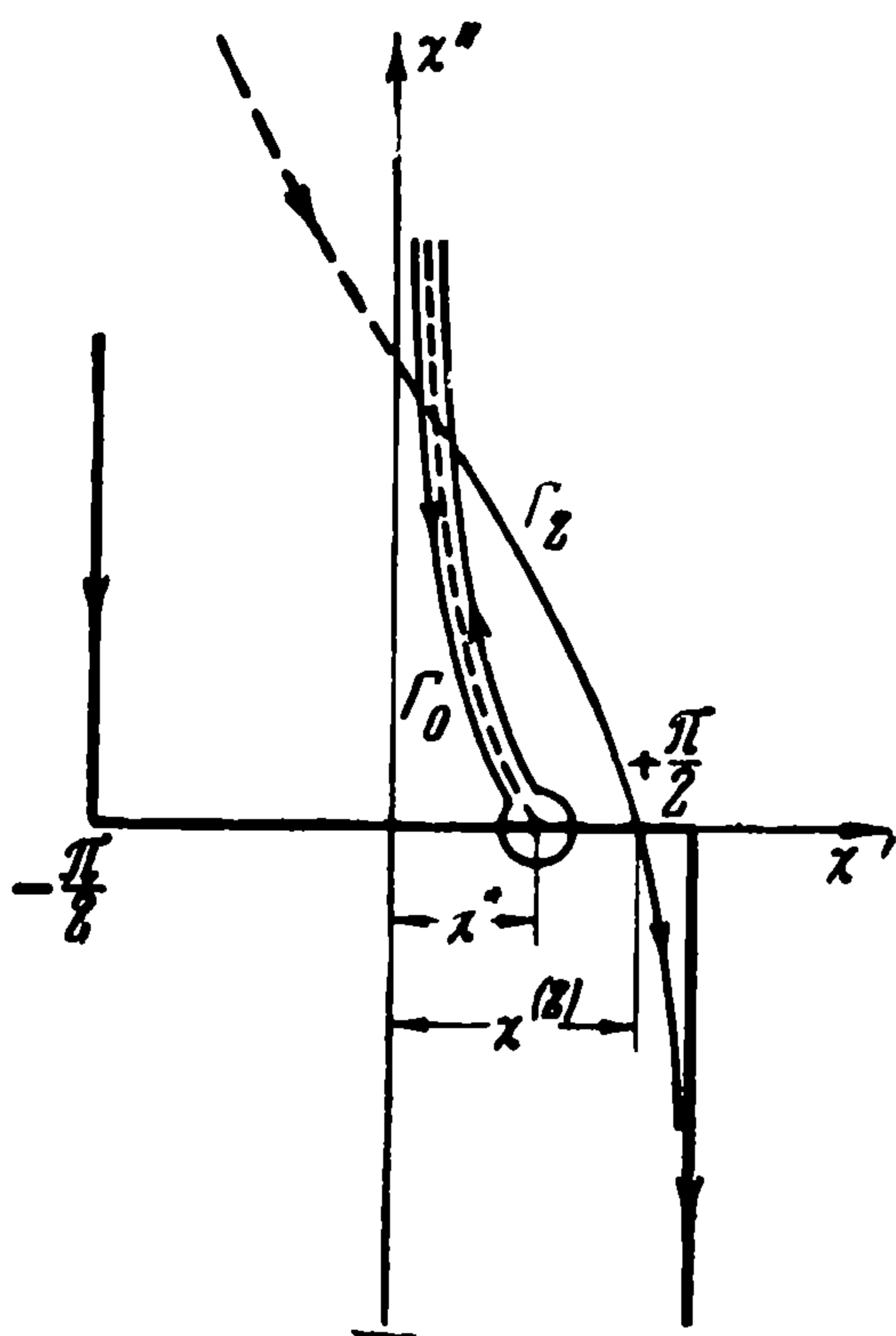
$$U^*(\chi, R) = -4h \frac{\cos 1/2 \chi_0 \exp [i(k_2 R - 1/4 \pi)]}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k_2 R}} \int_{\chi^*}^{i\infty} \Phi(\chi) \exp \left[-ip \cos \left(\chi - \frac{\chi_0}{2} \right) \right] d\chi$$

$$\Phi(\chi) = q \cos \left(\chi - \frac{\chi_0}{2} \right) \frac{\sin^2 \chi}{\sin^4 \chi - q^2} \quad (q = \cos \chi \sqrt{\theta^2 - \sin^2 \chi}) \quad (3.4)$$

¹ При $a = b$ (жидкая среда, в которой головная волна при данной постановке задачи отсутствует) угол $\chi^* = 90^\circ$.



Фиг. 8



Фиг. 9

Сделаем замену переменных $\beta = \chi^* - \chi$. Тогда с учетом малости β (3.3) примет вид

$$U^*(\beta, R) \approx -16h \frac{\cos(\chi^* - 1/2 \chi_0) \exp[i(k_2 R - 1/4 \pi)]}{\sqrt{\pi} (i \operatorname{tg} \chi^*)^{3/2}} \frac{\exp[i(k_2 R - 1/4 \pi)]}{\sqrt{k_2 R}} \int_0^{\chi^* - i\infty} e^{-i\eta f(\beta)} \left(i \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)^{3/2} \frac{d\beta}{2 \sin^{1/2} \beta} \quad (3.5)$$

Полученный интеграл (3.5) можно выразить через функции Вебера. Воспользуемся равенством Фока—Бреховских [22]

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} \int_0^{\pi/2 + \beta_0 - i\infty} e^{i/2 (\xi^2 - \eta^2) \cos \beta - i\xi \eta \sin \beta} \left(i \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)^{-n} \frac{d\beta}{2 \sin^{1/2} \beta} = \\ = D_n(\xi - i\xi) D_n(\eta + i\eta) \quad (3.6)$$

Преобразуем это равенство. Известно [23], что уравнение Вебера остается без изменения, если заменить одновременно в этом уравнении n , ξ , η соответственно на $-(n+1)$, $\pm i\xi$, $\pm i\eta$. После этого (3.6) примет вид

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^{\pi/2 + \beta_0 - i\infty} \exp\left[-\frac{i}{2} (\xi^2 - \eta^2) \cos \beta - i\xi \eta \sin \beta\right] \left(i \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)^{n+1} \frac{d\beta}{2 \sin^{1/2} \beta} = \\ = D_{-(n+1)}(\xi + i\xi) D_{-(n+1)}(-\eta + i\eta) \quad (3.7)$$

Выражение (3.5) можно преобразовать к (3.7), если положить

$$\xi = \sqrt{2p} \cos \frac{1/2 \chi_0 - \chi^*}{2}, \quad \eta = \sqrt{2p} \sin \frac{1/2 \chi_0 - \chi^*}{2}$$

После этого получим

$$U^*(\xi, \eta, R) \approx -8h \frac{\cos(1/2 \chi_0 - \chi^*) \exp[i(k_2 R - 1/4 \pi)]}{(i \operatorname{tg} \chi^*)^{3/2}} \frac{\exp[i(k_2 R - 1/4 \pi)]}{\sqrt{k_2 R}} D_{-3/2}(\xi + i\xi) D_{-3/2}(-\eta + i\eta)$$

Так как $\xi \gg 1$, то можно воспользоваться асимптотическим разложением функции Вебера [23]

$$D_n(z) \approx z^n \exp\left(-\frac{1}{4} z^2\right) \left\{1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot z^4} + \dots\right\}$$

В результате получим

$$D_{-3/2}(\xi + i\xi) \approx \exp\left(-\frac{1}{2} i\xi^2\right) \frac{\exp(-3/8 i\pi)}{\xi^{3/2} (\sqrt{2})^{3/2}} \quad (3.8)$$

Окончательно выражения для смещения в головной волне примут вид

$$u^*(P) \approx \sin \chi_0 U^*(\psi, R), \quad v^*(P) \approx -\cos \chi_0 U^*(\psi, R)$$

Здесь

$$U^*(\psi, R) = \frac{(\sqrt{1-\theta^2})^{3/2} \cos \psi \exp\{ik_2 [R - 2h \cos^{1/2} \chi_0 \cos \psi + 1/2 \pi]\}}{2^{3/4} \sqrt{Rh}} \frac{\exp\{ik_2 [R - 2h \cos^{1/2} \chi_0 \cos \psi + 1/2 \pi]\}}{L^{3/2}} F(\eta)$$

$$F(\eta) = \eta^{3/2} \exp\frac{-3i\pi}{8} \exp\frac{-i\eta^2}{2} D_{-3/2}(-\eta + i\eta), \quad L = \theta \cos^{1/2} \chi_0 \sin \psi \quad (3.9)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \chi_0 - \chi^*$$

Функцию $F(\eta)$ можно разложить в асимптотические ряды как для малых, так и для больших η [22].

Полученные формулы описывают поле смещений головной волны при $\chi_0/2 > \chi^*$, где $\chi^* = \arcsin \theta$. Отметим, что в случае жидких сред ($\theta = 1$), $u^* = v^* = 0$, т. е. головная волна отсутствует.

В заключение автор выражает признательность Н. В. Зволинскому за ценные советы и замечания, сделанные им при описании работы.

Поступила 12 VIII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзэ В. Д. Основные задачи математической теории дифракции. М. Л. ОНТИ, 1935.
2. Миндлин Я. А. Дифракция плоской упругой волны относительно шара. ДАН СССР, 1940, т. 27, № 9.
3. Миндлин Я. А. Дифракция плоской волны относительно круга. ДАН СССР, 1940, т. 26, № 6.
4. Смирнов В. И. Решение предельной задачи для волнового уравнения в случае круга и сферы. ДАН СССР, 1937, т. 14, № 1.
5. Петрашень Г. И. Решение векторных предельных задач математической физики в случае шара. ДАН СССР, 1945, т. 46, № 7.
6. Петрашень Г. И. Колебания изотропного упругого шара. ДАН СССР, 1945, т. 47, № 3.
7. Смолицкий Х. Л. Предельная задача для волнового уравнения в случае цилиндра. ДАН СССР, 1946, т. 54, № 7.
8. Смолицкий Х. Л. Граничная задача теории упругости для бесконечного цилиндра. ДАН СССР, 1947, т. 55, № 5.
9. Шерман Д. И. К вопросу о дифракции упругих волн. ДАН СССР, 1945, т. 48, № 9.
10. Кусков А. М. Дифракция упругих установившихся колебаний. ДАН СССР, 1950, т. 70, № 2.
11. Петрашень Г. И. и др. Распространение волн в средах, содержащих сферические или цилиндрические границы раздела. Уч. зап. ЛГУ, № 170, 1953, вып. 27.
12. Скуридин Г. А. К теории рассеяния упругих волн на криволинейной границе. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1957, № 2.
13. Скуридин Г. А. Приближенное решение задачи дифракции плоской упругой продольной волны относительно щели. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1955, № 1.
14. Скуридин Г. А. Приближенное решение задачи дифракции плоской упругой продольной волны относительно горизонтального сброса. Тр. Ин-та геофизики АН ГрузССР, 1955, т. 14.
15. Гельчинский Б. Я. Отражение и преломление упругой волны произвольной формы в случае криволинейной границы раздела. ДАН СССР, 1958, т. 118, № 3.
16. Зволинский Н. В., Скуридин Г. А. Об асимптотическом методе решения динамических уравнений теории упругости. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1956, № 2.
17. Скуридин Г. А., Гвоздев А. А. О краевых условиях для скачков разрывных решений динамических уравнений теории упругости. Изв. АН СССР, серия геофизич. 1958, № 2.
18. Алексеев А. С., Гельчинский Б. Я. Об определении интенсивности головных волн в теории упругости лучевым методом. ДАН СССР, 1958, т. 118, № 4.
19. Фок В. А. Дифракция Френеля от выпуклых тел. Сб. ст., посв. памяти С. И. Вавилова М. Л., Изд-во АН СССР, 1951.
20. Фок В. А. Законы отражения Френеля и законы дифракции. Усп. физ. наук, 1948, т. 36, в. 3.
21. Вакер В., Сорсон Е. The matem. theory of Huyghens principle, Oxford. London, 1950.
22. Бреховских Л. М. Отражение и преломление сферических волн. Усп. физ. наук, 1949, т. 38, вып. 1.
23. Виттекер Е., Ватсон Г. Курс современного анализа. т. II, ГТТИ, 1934.