

ПРОНИКАНИЕ КЛИНА В СЖИМАЕМОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

З. Н. Добровольская

(Москва)

Задача о проникании клина в несжимаемую жидкость рассмотрена в работах [1-5]. С учетом сжимаемости аналогичная задача решена для случая тонкого клина [6].

В настоящей работе решается плоская задача о погружении в сжимаемую жидкость клина конечного угла раствора 2α с постоянной скоростью v_0 , которая предполагается малой по сравнению со скоростью звука a в среде. Жидкость считается идеальной и невесомой. В точной постановке эта задача нелинейна и до сих пор не решена.

Однако при условии малости скорости проникания изменения всех гидродинамических величин в данной задаче будут малы, в силу чего они могут быть рассмотрены в акустическом приближении.

Рассматриваемая задача представляет интерес, поскольку в реальных условиях погружения мы имеем дело с телами конечных размеров, когда отождествление их с тонкими лезвиями делается невозможным.

При решении задачи о проникании тонкого клина условие обтекания твердой поверхности сносится на ось клина. В случае же конечного угла раствора это обстоятельство не может иметь места, что приводит к значительному усложнению краевого условия в области возмущенного движения в плоскости переменных Чаплыгина. Задача решается после конформного отображения области возмущенного течения на верхнюю полуплоскость и сведения к краевой задаче Гильберта с разрывными коэффициентами.

1. Пусть в момент времени $t = 0$ вершина клина касается свободной поверхности. При любом $t > 0$ в области возмущенного движения, ограниченной волной Маха, свободной поверхностью и поверхностью клина, будем иметь:

$$\begin{aligned} u &= u_1(x, y, t) + \dots, & v &= v_1(x, y, t) + \dots \\ p &= p_0 + p_1(x, y, t) + \dots, & \rho &= \rho_0 + \rho_1(x, y, t) + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x, y — неподвижные оси декартовых координат с началом в точке соприкосновения вершины клина со свободной поверхностью, t — время, p_0 и ρ_0 — давление и плотность покоящейся жидкости.

Введем автомодельные переменные $x_1 = x/at$, $y_1 = y/at$. Тогда

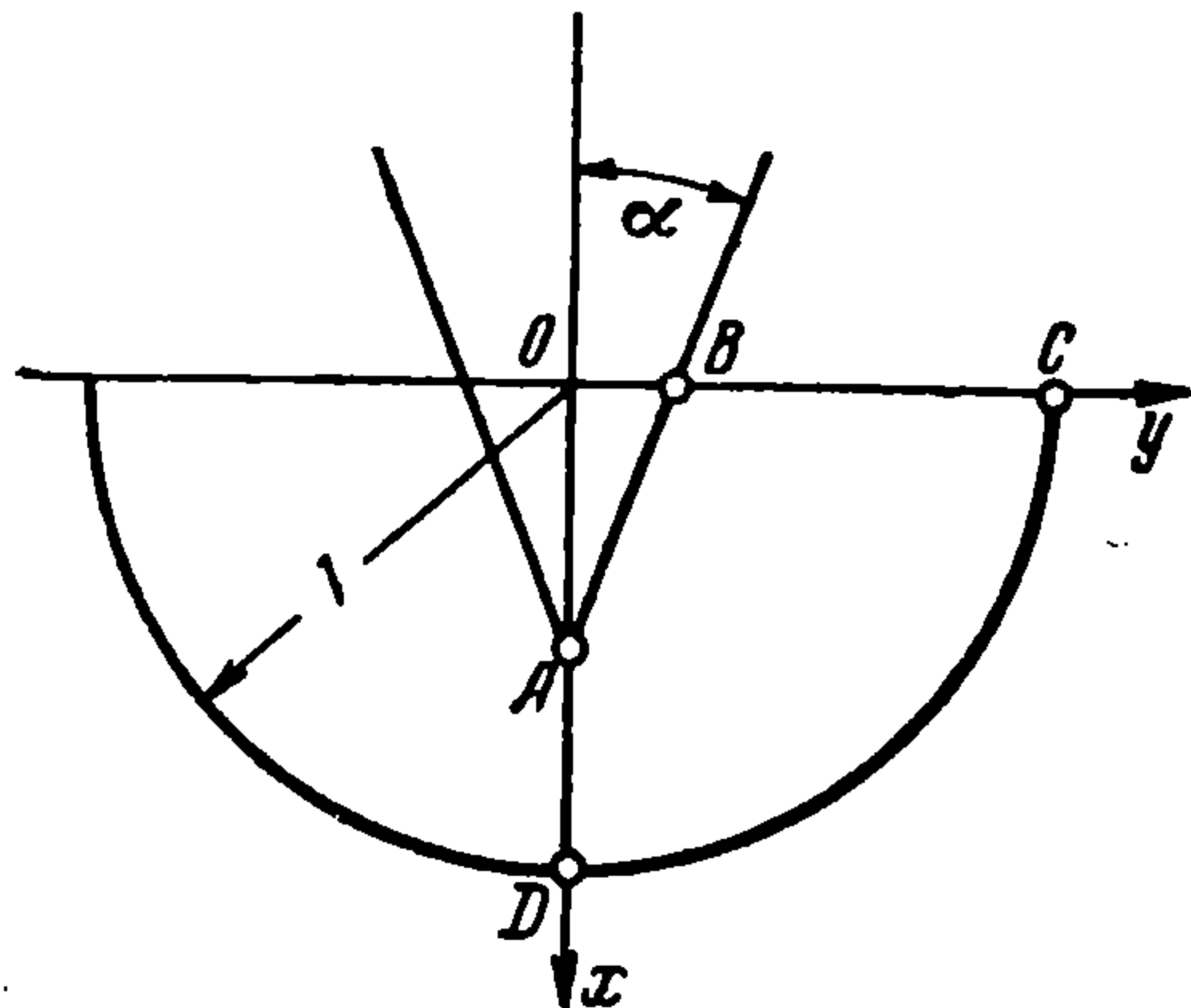
$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= v_0 \bar{u}_1(x_1, y_1), & p_1(x, y, t) &= \rho_0 v_0^2 \bar{p}_1(x_1, y_1) \\ v_1(x, y, t) &= v_0 \bar{v}_1(x_1, y_1), & \rho_1(x, y, t) &= \rho_0 \bar{\rho}_1(x_1, y_1) \end{aligned}$$

Подставим выражения (1.1) в уравнения, описывающие плоское неустановившееся движение идеальной сжимаемой жидкости, и исключим \bar{u}_1 , \bar{v}_1 и $\bar{\rho}_1$; в результате линеаризации получим

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (1 - y^2) \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial p}{\partial y} - 2x \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем черту и индекс y безразмерных переменных опускаем.

Задача заключается в определении функции $p(x, y)$, удовлетворяющей в области $ABCD$ уравнению (1.2) и следующим условиям на границе (фиг. 1)



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{на } AB, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{на } AD \\ p = 0 \quad \text{на } DC, \quad p = 0 \quad \text{на } BC \end{aligned} \quad (1.3)$$

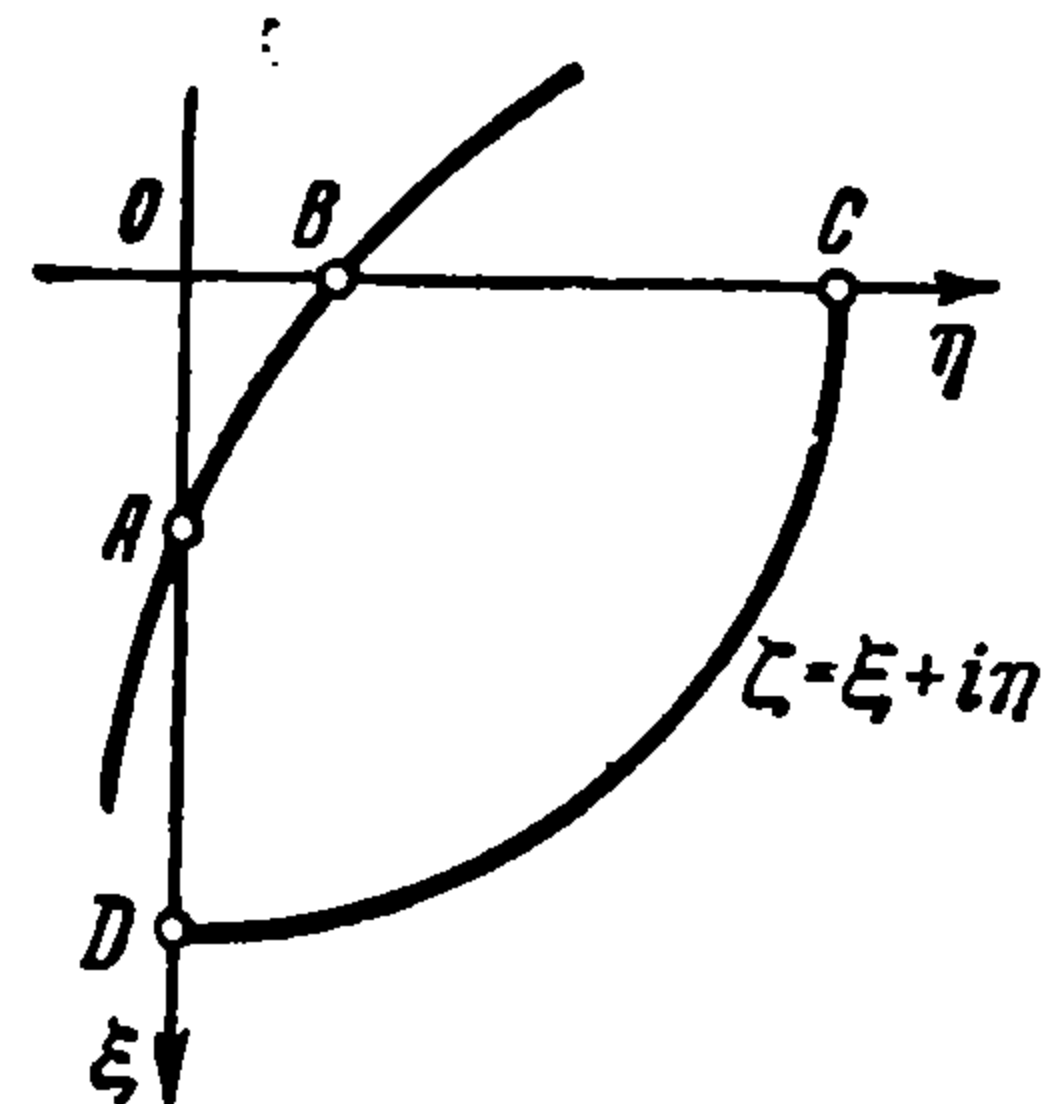
При проникании клина свободная поверхность деформируется главным образом на участке, примыкающем к ребру клина. В настоящей работе этот эффект не учитывается, и условие постоянства давления сносится на соответствующий участок оси y . Рассмотрение такой

задачи является необходимым этапом, так как в дальнейшем оно позволит учесть приближенно влияние деформации свободной поверхности.

2. Перейдем от переменной $z = re^{i\theta}$ ($z = x + iy$) в плоскость переменной $\zeta = \varepsilon e^{i\theta}$, ($\zeta = \xi + i\eta$) при помощи преобразования Чаплыгина

$$r = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (2.1)$$

При этом уравнение (1.2) для давления перейдет в уравнение Лапласа в полярных координатах, область $ABCD$ плоскости z — в криволинейный четырехугольник (фиг. 2), ограниченный дугами окружностей AB и DC и отрезками осей ξ и η , а вместо условий (1.3) будем иметь:

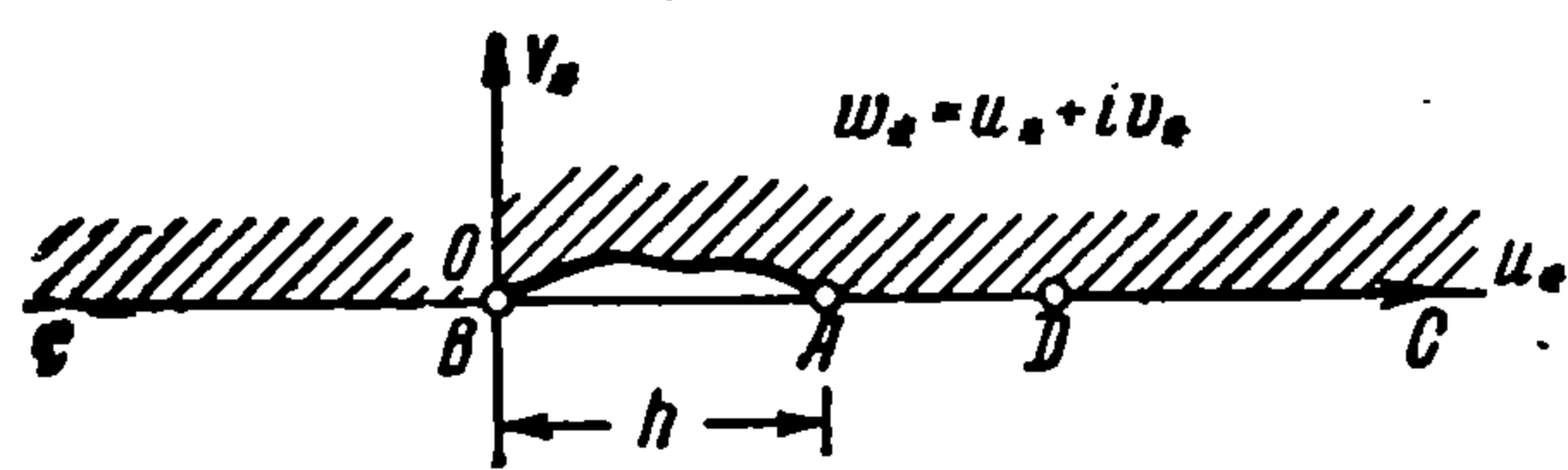


Фиг. 2

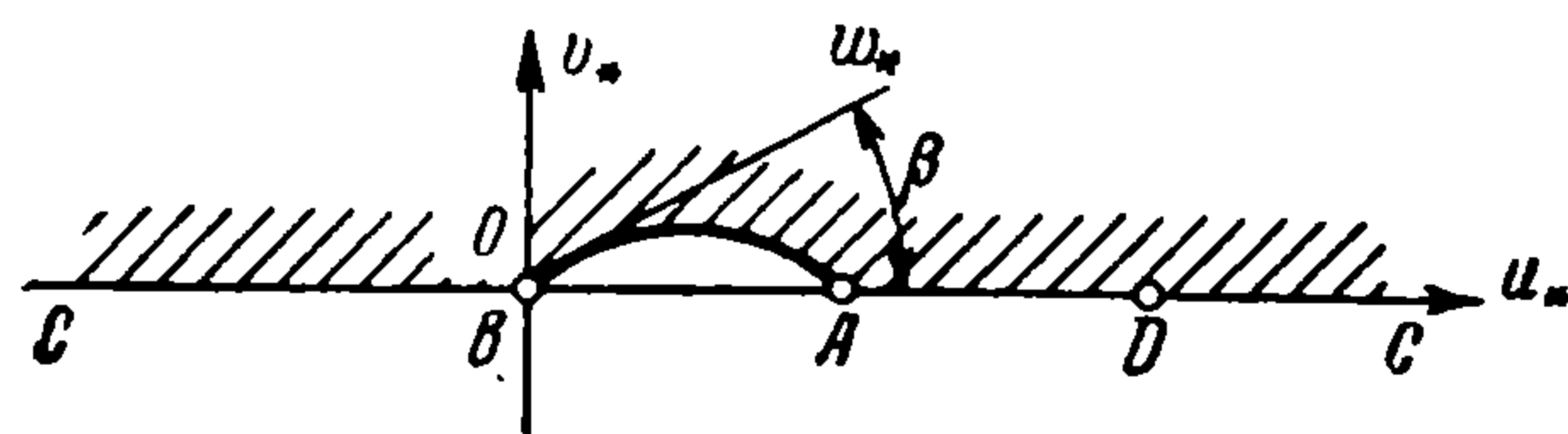
$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad \text{на } AD, \quad p = 0 \quad \text{на } DC \text{ и } CB$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} \left[(1 + \xi^2 - \eta^2) \sin \alpha + 2\xi\eta \cos \alpha \right] + \frac{\partial p}{\partial \eta} \left[(1 - \xi^2 + \eta^2) \cos \alpha + 2\xi\eta \sin \alpha \right] = 0 \quad \text{на } BA \quad (2.2)$$

(Для наглядности соответственные точки в разных плоскостях обозначаются одинаковыми буквами.) Таким образом, задача свелась



Фиг. 3



Фиг. 4

к определению гармонической функции $p(\xi, \eta)$ в области $ABCD$ по краевому условию (2.2).

3. Функция

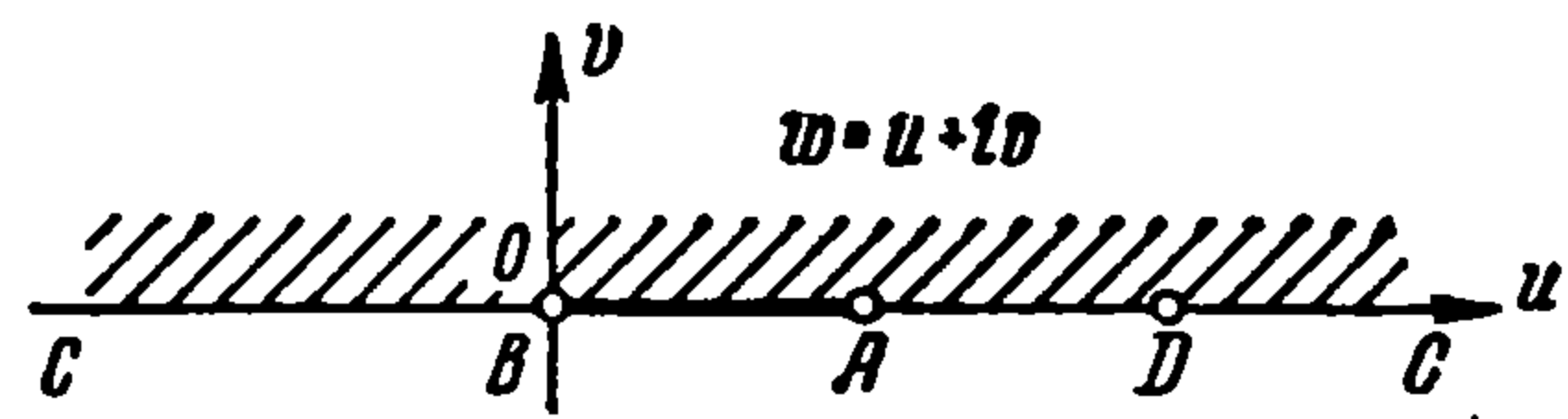
$$w_* = \frac{1}{1 - M^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \right)^2 \quad (3.1)$$

переведет рассматриваемую область в верхнюю полуплоскость с выкинутой луночкой BA (фиг. 3). Уравнения кривой BA в явном виде получить не удастся, поэтому отобразим область $ABCD$ плоскости (w_*)

на верхнюю полуплоскость приближенно. Для этого заменим кривую BA (можно показать, что она достаточно монотонна) дугой окружности, проходящей через точки A и B так, чтобы среднее квадратичное отклонение ординат окружности от соответствующих ординат искомой кривой было наименьшим (фиг. 4).

Функция

$$w = \frac{h\pi}{\pi - \beta} \left[1 - \left(1 - \frac{h}{w_*} \right)^{\frac{\pi}{\pi - \beta}} \right]^{-1} \quad (3.2)$$



Фиг. 5

где β — наклон касательной к аппроксимирующей окружности в начале координат, отобразит верхнюю полуплоскость с выкинутой круговой луночкой на верхнюю полуплоскость (фиг. 5).

Краевое условие (2.2) перейдет в условие, выполненное на действительной оси u плоскости w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} \operatorname{Re} [i w'(\zeta) (e^{-i\alpha} - \zeta^2 e^{i\alpha})] + \frac{\partial p}{\partial v} \operatorname{Im} [i w'(\zeta) (e^{-i\alpha} - \zeta^2 e^{i\alpha})] &= 0 \text{ на } BA \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= 0 \text{ на } AD, \quad p = 0 \text{ на } DC, \quad p = 0 \text{ на } CB \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $w'(\zeta)$ — производная отображающей функции, а $\zeta(u)$ — функция, обратная к (3.1), (3.2).

4. Гармоническую функцию $p(u, v)$ можно рассматривать как действительную часть некоторой аналитической в верхней полуплоскости функции $f(w) = p + iq$. Введем $f_1(w) = p_1 + iq_1 = f'(w)$. Тогда краевое условие (3.3) для функции $f_1(w)$ примет вид:

$$a_1(u) p_1 + b_1(u) q_1 = 0 \quad (4.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad b_1 = 0 && (-\infty < u \leq 0) \\ a_1 &= \operatorname{Re} [i w'(\zeta) (e^{-i\alpha} - \zeta^2 e^{i\alpha})] \\ b_1 &= -\operatorname{Im} [i w'(\zeta) (e^{-i\alpha} - \zeta^2 e^{i\alpha})] && \text{при } \zeta = \zeta(u), 0 \leq u \leq u_A \\ a_1 &= 0, \quad b_1 = 1 && (u_A \leq u \leq u_D) \\ a_1 &= 1, \quad b_1 = 0 && (u_D \leq u < +\infty) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Сформулированная выше краевая задача для функции $f_1(w)$ является однородной задачей Гильберта для верхней полуплоскости с разрывными коэффициентами. Она имеет неединственное решение; характер решения зависит от того, какие особенности допустимы в точках разрыва коэффициентов краевого условия. В исследуемой задаче действительная часть интеграла

$$J(w) = \int f_1(w) dw$$

есть давление; поэтому функция $f_1(w)$ должна удовлетворять следующим условиям:

- 1°. Функция $f_1(w)$ должна быть регулярна в верхней полуплоскости, исключая действительную ось.
- 2°. В точках B и D разрыва коэффициентов $a_1(u)$ и $b_1(u)$ должен быть ограничен интеграл $J(w)$.

3°. На бесконечности $J(w)$ ведет себя как sw^{-1} .

4°. В точке A допускается особенность функции $f_1(w)$, причем характер особенности уже определяется требованиями 2° и 3°.

Решением однородной задачи Гильберта является функция [7]

$$f_1(w) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{b_1(u)}{a_1(u)} \frac{du}{u-w} \right] iP(w) \left[\prod_n (w - v_n) \right]^{-1} \quad (4.3)$$

где $P(w)$ — полином, принимающий действительные значения на действительной оси, а v_n — абсциссы точек разрыва функции $\operatorname{arctg} [b_1(u)/a_1(u)]$.

Функция $P(w)$ и количество значений v_n выбираются в зависимости от того класса, в котором ищется решение.

В многозначной функции $\operatorname{arctg} (b_1/a_1)$ выделяем ветви, находящиеся в первой и четвертой четвертях.

Заметим [8], что в точке разрыва v функции

$$\omega(u) = \operatorname{arctg} [b_1(u)/a_1(u)]$$

$$\exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(u) \frac{du}{u-w} \right] = (w - v)^{\frac{\omega(v-0) - \omega(v+0)}{\pi}} e^{2i\Phi_0(w)} \quad (4.4)$$

а в бесконечно удаленной точке

$$\exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(u) \frac{du}{u-w} \right] = 1 \quad (4.5)$$

В рассматриваемой задаче

$$-\frac{1}{2} < \frac{\omega(B-0) - \omega(B+0)}{\pi} < 0, \quad -\frac{1}{2} < \frac{\omega(A-0) - \omega(A+0)}{\pi} < 0$$

$$\frac{\omega(D-0) - \omega(D+0)}{\pi} = \frac{1}{2} \quad (4.6)$$

Поэтому, чтобы удовлетворить условиям 1° — 4°, нужно выбрать

$$P(w) = C_1, \quad \prod_n (w - v_n) = (w - u_D)(w - u_A)$$

Подставляя эти функции, а также значения коэффициентов $a_1(u)$ и $b_1(u)$ из (4.2) в выражение (4.3), получим окончательно:

$$f_1(w) = iC_1 (u_D - w)^{-1/2} (u_A - w)^{-1/2} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{u_A} \operatorname{arctg} \frac{-\operatorname{Im} [iw'(\zeta)(e^{-i\alpha} - \zeta^2 e^{i\alpha})]_{\zeta=\zeta(u)}}{\operatorname{Re} [iw'(\zeta)(e^{-i\alpha} - \zeta^2 e^{i\alpha})]_{\zeta=\zeta(u)}} \frac{du}{u-w} \right\} \quad (4.7)$$

[Здесь u_A и u_D — абсциссы точек разрыва A и D , а C_1 — действительная постоянная, которая определяется из условия совпадения на щеке клина проекций на нормаль к клину скорости частиц жидкости и скорости проникания клина

$$\frac{C_1 M}{\sin \alpha} \int_{1/\sqrt{2}}^{M(1+\operatorname{ctg} \alpha)^{-1}} \left[\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} \cos \alpha \right]_{x=y=\mu} \frac{d\mu}{\mu} = 1 \quad \left(M = \frac{v_0}{a} \right)$$

Выражение для давления имеет вид

$$p(u, v) = \operatorname{Re} \int f_1(w) dw \quad (4.8)$$

Легко показать, что постоянная интегрирования равна нулю. Выражения (4.7), (4.8) представляют собой решение задачи в плоскости w .

Функция $p(u, v)$ регулярна всюду в верхней полуплоскости и на действительной оси, за исключением одной точки A с абсциссой u_A , где имеется особенность интегрируемого типа. В физической плоскости этой точке соответствует носик клина.

5. Рассмотрим тонкий клин. Решение (4.7), (4.8) в этом случае справедливо при любой дозвуковой скорости проникания. Устремим в полученных выше формулах α к нулю. Тогда

$$f_1(w) = C_1 (M^2 - w)^{-1} w^{-1/2} (1 - w)^{-1/2}$$

На щеке клина AB ($v = 0$, $0 \leq u \leq M^2$) $u = x^2$. Поэтому для распределения давления на клине будем иметь

$$p - p_0 = C_1 \rho_0 v_0^2 M^{-1} (1 - M^2)^{-1/2} \ln \frac{M \sqrt{1 - x^2} + x \sqrt{1 - M^2}}{M \sqrt{1 - x^2} - x \sqrt{1 - M^2}} \quad (0 \leq x \leq M) \quad (5.1)$$

Формула (5.1) совпадает с решением, полученным в работе [6].

В случае тонкого клина формула для силы сопротивления клину при проникании в несжимаемую жидкость совпадает с результатами работы [6]. В случае клина конечного угла раствора возможно только численное сравнение с имеющимися результатами, так как функция $w(\zeta)$, отображающая область $ABCD$ на верхнюю полуплоскость, найдена приближенно.

Заметим, что эта функция может быть найдена и другим способом, отличным от предложенного в данной работе. Однако вид решения (формула (4.7)) при этом не изменится.

Автор признателен Л. А. Галину за ценные советы.

Поступила 31 X 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости. Труды ЦАГИ, вып. 187, 1934.
2. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, М., 1957.
3. W a g n e r Н. Über Stoss-und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. ZAMM, Nr. 4, S. 194—215, 1932.
4. Б о р и с о в а Э. П., К о р я в о в П. П., М о и с е е в Н. Н. Плоские и осесимметричные автомодельные задачи погружения и соударения струй. ПММ, 1959, т. XXIII, в. 2.
5. B o r g S. F. Some contributions to the wedge — water entry problem. Journal of the Engineering Mechanics, Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers, vol. 83, NEM2, Apr. 1957.
6. С а г о м о н я н А. Я. Проникание узкого клина в сжимаемую жидкость. Вестник МГУ, 1956, 2.
7. Г а л и н Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гос. техтеоретиздат, М., 1953.
8. Г а х о в Ф. Д. Красивые задачи. Физматгиз, М., 1958.