Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СВЕРХЗВУКОВЫХ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Б. М. Булах
(Саратов)

Линейная теория сверхзвуковых течений газа не дает достаточной точности при определении аэродинамических характеристик многих тел, встречающихся в практике. По этой причине различными авторами (Ван-Дайк [1], Бродерик [2], Мур [3] и т. д.) для тел, целиком лежащих внутри конуса Маха, построенного для невозмущенного однородного потока газа, были найдены более точные решения уравнения для потенциала скоростей возмущения Ф. Но во всех этих работах не дается общего анализа влияния на поле потока замены условий на ударной волне условием $\Phi = 0$ на конусе Маха, построенном для невозмущенного потока.

Ниже проводится анализ влияния ударной волны, производимой коническим телом, целиком лежащим внутри конуса Маха, построенного для невозмущенного однородного сверхзвукового потока газа, на поле конического течения в высших приближениях. Методами теории «пограничного слоя» находятся ряды по малому параметру, представляющие конический потенциал F в окрестности слабой конической ударной волны и в окрестности конуса Маха (там, где происходит расширение невозмущенного потока) Затем эти ряды «сращиваются» с рядом по малому параметру (относительная толщина тела, угол атаки и т. д.), представляющим F во «внутренней» части течения, что дает возможность получить поле течения во всей области между телом и ударной волной. Известно [4], что ряд по малому параметру, представляющий точное решение во «внутренней» части течения, становится расходящимся в окрестности ударной волны (конуса Маха). Анализ решения в «пограничном слое» показывает, что при формальном аналитическом продолжении каждого члена этого ряда до конуса Маха, построенного для невозмущенного потока, конической потенциал скоростей возмущения должен обращаться на нем в нуль вплоть до членов $O(\varepsilon^8)$ для удлиненных тел (типа кругового конуса) и $O(\delta^4)$ для тонких тел (типа треугольной пластинки), ε — относительная толщина, δ — угол атаки. (Члены ряда высшего порядка обращаются в бесконечность на конусе Маха.) Завихренность потока проявляется для скоростей в членах $O(\varepsilon^{12})$ и $O(\delta^6)$ соответственно для удлиненных и тонких тел. Определено также положение ударной волны, производимой обтекаемым телом. Результат совпал с результатом Лайтхилла [4].

1. Пусть на коническое тело набегает однородный сверхзвуковой поток газа со скоростью W_1, числом Маха M_1, скоростью звука a_1. Предположим, что обтекаемое тело целиком заключено внутри конуса Маха, построенного для невозмущенного потока, с вершиной в острие тела. Около тела возникает коническое течение газа, в котором скорость, энтропия, давление постоянны на лучах, выходящих из вершины тела. Коническое течение отделяется от однородного потока ударной волной или частично ударной волной и частично конусом Маха, там где невозмущенный поток расширяется. Совместим начало декартовых координат с вершиной конического тела; ось z направим по скорости невозмущенного потока. За независимые переменные в коническом течении примем $\xi = x/z$, $\eta = y/z$; в дальнейшем на плоскости $\xi\eta$ будем пользоваться полярными координатами $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$.

Потенциал скорости $\varphi(x, y, z)$ для конического течения представляется в виде $\varphi = zF(r, \theta)$, где F удовлетворяет уравнению [5]

$$\{a^2(1+r^2) - [rF - (1+r^2)F_r]^2\}F_{rr} + 2\left[F - r\left(\frac{1}{r} + r\right)\right]F_\theta\left(\frac{1}{r}F_{r\theta} - \frac{1}{r^2}F_\theta\right) +$$
$$+ \left(a^2 - \frac{1}{r^2}F_\theta^2\right)\left(\frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + \frac{1}{r}F_r\right) = 0 \qquad (1.1)$$
$$a^2 = a_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\left[F_r^2 + \frac{1}{r^2}F_\theta^2 + (F - rF_r)^2 - W_1^2\right]$$

где a — скорость звука, γ — адиабатический индекс. (На последующие результаты завихренность потока влияния не оказывает.)

2. Найдем разложение конического потенциала F в ряд по малому параметру в окрестности слабой ударной волны и в окрестности конуса Маха, там где невозмущенный поток расширяется. Для конуса Маха

$$r = r_1 = \frac{1}{m_1}, \qquad m_1 = \sqrt{M_1^2 - 1}$$

Здесь скорости возмущения обращаются в нуль, т. е. при $r = r_1$, $F = W_1$, $F_r = 0$. Уравнение ударной волны запишем в виде $r = r_s(\theta) = r_1 + \lambda\varphi(\theta, \lambda)$, где λ — малый параметр, $\varphi(\theta, 0) = \varphi_0(\theta) < \infty$.

В обозначениях безвихревого потока условие непрерывности касательной к скачку компоненты скорости и условие Прандтля для нормальной компоненты могут быть записаны в виде

$$r = r_s(\theta), \qquad F = W_1, \qquad F_r = -\frac{2W_1}{(\gamma+1)M_1^2}\frac{r_s^2(1 - r_s^2 m_1^2) + r_s'^2}{r_s[r_s^2(1 + r_s^2) + r_s'^2]} \qquad (2.1)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по θ.

При $r = r_s(\theta)$ из (1.1) и (2.1) можно получить соответственно

$$F_r = \frac{4W_1}{\gamma+1}\frac{m_1^4}{M_1^4}\lambda\varphi + O(\lambda^2), \qquad F_{rr} = -\frac{2W_1}{\gamma+1}\frac{m_1^4}{M_1^4} + O(\lambda)$$

Это указывает, что вблизи ударной волны имеет место явление «пограничного слоя», которое заключается в том, что если толщину и угол атаки тела, порождающего скачок, стремить к нулю, то градиент модуля вектора скорости в окрестности ударной волны остается конечным, ($F_{rr} \neq 0$), в то время как в остальной части течения он стремится к нулю. Появление «пограничного слоя» есть следствие того, что коэффициент при F_{rr} в уравнении (1.1) в окрестности ударной волны есть величина малая, $O(\lambda)$, т. е. мы имеем здесь уравнение с малым параметром при старшей производной (в направлении r, близком к нормали к границе, т. е. ударной волне). Описанное явление по аналогии с пограничным слоем Прандтля в вязкой жидкости естественно назвать «пограничным слоем» и применять методы теории пограничного слоя для нахождения течения в окрестности ударной волны. «Пограничный слой» также имеется и вблизи конуса Маха, так как для сколь угодно малых возмущений в окрестности Маха F представляется разложением [5]

$$F = W_1 + \beta_1(r_1 - r)^2 + \gamma_1(r_1 - r)^3\ln(r_1 - r) + C(\theta)(r_1 - r)^3 + \ldots \qquad (2.2)$$

Здесь

$$\beta_1 = \frac{W_1}{2(\gamma+1)}\frac{m_1^4}{M_1^4}, \qquad \gamma_1 = \frac{W_1}{6(\gamma+1)^2}\frac{m_1^5}{M_1^6}[3m_1^2 - (\gamma+1)(1 - m_1^2)]$$

$C(\theta)$ — произвольная функция; $F_{rr} = 2\beta_1 \neq 0$ при $r = r_1$

Будем искать F в окрестности ударной волны в виде ряда

$$F = W_1 + \lambda^2 F_1(\theta, t, \lambda) + \lambda^2 F_2(\theta, t, \lambda) + \ldots \qquad \left(t = \frac{r - r_1}{\lambda\varphi(\theta, \lambda)}\right) \tag{2.3}$$

Значение $t = 1$ соответствует ударной волне. Представляя (2.3) в (1.1), получим уравнения для $F_1, F_2, \ldots$ Если ввести функцию $y(t)$ соотношением

$$F_1 = \varphi^2(\theta, \lambda) \frac{W_1}{\gamma + 1} \frac{m_1^4}{M_1^4} y(t)$$

то функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$y''(2t - y') = y' \tag{2.4}$$

Уравнения для F_k приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 F_k}{\partial t^2}(y' - 2t) + \frac{\partial F_k}{\partial t}(y'' + 1) = P_k \tag{2.5}$$

Здесь P_k зависят от $F_1, \ldots, F_{k-1}$. Условия (2.1) на ударной волне при $t = 1$ дают

$$F_1 = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{4W_1}{\gamma + 1} \frac{m_1^4}{M_1^4} \varphi^2(\theta, \lambda) \tag{2.6}$$

$$F_2 = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial t} = -\frac{2W_1}{\gamma + 1} \frac{m_1^5}{M_1^4} \varphi(\theta, \lambda) \left[\varphi'^2(\theta, \lambda) + \frac{M_1^2 + 4}{M_1^2} \varphi^2(\theta, \lambda)\right] \quad \text{и т. д.}$$

Из (2.4) и (2.6) получим

$$y(t) = \tfrac{8}{3}\left[t - \tfrac{8}{9}\left(1 - \tfrac{3}{4}t\right)^{3/2} - \tfrac{8}{9}\right] \tag{2.7}$$

Функции P_k представляют собой суммы произведений функций от t и от θ; поэтому все уравнения (2.5) могут быть проинтегрированы в замкнутом виде, так как их интегрирование сводится к интегрированию простых линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В частности, для F_2 получаем (2.8)

$$F_2 = \frac{W_1 m_1^5}{(\gamma + 1) M_1^4} [\varphi^3(\theta, \lambda) x_1(t) + \varphi(\theta, \lambda)\varphi'^2(\theta, \lambda) x_2(t) + \varphi^2(\theta, \lambda)\varphi''(\theta, \lambda) x_3(t)]$$

где x_1, x_2, x_3 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} x_1''(y' - 2t) + x_1'(y'' + 1) = y''\Bigg[t^2 - ty' &+ \frac{m_1^2}{2(\gamma + 1) M_1^2} y'^2 - \frac{2}{M_1^2} ty' + \\ &+ \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{(\gamma + 1) M_1^2} y\Bigg] + ty' - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{m_1^2}{M_1^2} y \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$x_2''(y' - 2t) + x_2'(y'' + 1) = -t^2 y'' + 2ty' - 2y$$

$$x_3''(y' - 2t) + x_3'(y'' + 1) = ty' - 2y$$

при граничных условиях

$$x_1(t) = x_2(1) = x_3(1) = 0, \quad x_2'(1) = -2\frac{M_1^2 + 4}{M_1^2}, \quad x_2'(1) = -2, \quad x_3'(1) = 0$$

Из (2.9) легко получить асимптотическое представление F_2 при больших t

$$F_2 = -\frac{W_1 m_1^5}{(\gamma + 1) M_1^4} \frac{2\sqrt{3}}{45} (9\varphi^3 + \varphi\varphi'^2 - 2\varphi^2\varphi'')(-t)^{5/2} + \ldots \tag{2.10}$$

и установить общую структуру F_2 при больших t

$$F_2 = b_1(-t)^{5/2} + b_2(-t)^2 + b_3(-t)^{3/2}\ln(-t) + \ldots \tag{2.11}$$

Здесь b_k — некоторые функции θ, λ (представление которых в явном виде не требуется). Член с $\ln(-t)$ появляется за счет $x_1(t)$. Рассмотрим «пограничный слой» в окрестности конуса Маха $r = r_1$. По-прежнему будем искать F в виде (2.3), только здесь $\varphi(\theta, \lambda)$ будет некоторая неопределенная пока функция, λ — параметр, характеризующий порядок скоростей на выходе из «пограничного слоя». Уравнения (2.4), (2.5), (2.9) сохраняют свой вид; меняются только граничные условия. При $t = 0$, соответствующем конусу Маха, $F_k = \partial F_k / \partial t = 0$. Для $y(t)$ получается формула

$$y(t) = \frac{1}{c}\left\{t + \frac{1}{3c}\left[(1 - 2ct)^{3/2} - 1\right]\right\} \tag{2.12}$$

где c — произвольная постоянная. Граничные условия (2.9) имеют вид

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = x_3'(0) = 0$$

При малых t имеем $y(t) = {}^1/_2 t^2 + \ldots$; решение однородного уравнения $x_0''(y' - 2t) + x_0'(y'' + 1) = 0$ имеет вид

$$x_0 = \frac{t^3}{3} + \ldots, \qquad x_1 = \frac{(\gamma + 4)(m_1^2 - 1) + 3}{6(\gamma + 1) M_1^2} t^2 \ln(-t) + \ldots, \qquad x_2, \quad x_3 \sim O(t^3)$$

Отсюда следует, что разложение (2.3) при переходе к $r_1 - r$, θ при малых t совпадает с (2.2), что подтверждает правильность (2.3). При больших t решение ведет себя аналогично случаю ударной волны. В частности, сохраняется формула (2.11).

3. Если теперь при больших t в (2.3) перейдем к $r_1 - r$ и θ, то оказывается, что члены $\lambda^k F_k(\theta, t, \lambda)$ будут одного и того же порядка $O(\lambda^{1/2})$, и из (2.3) получим

$$\begin{aligned} F = W_1 - \lambda^{1/2}\varphi^{1/2}\frac{W_1}{\gamma+1}\frac{m_1^4}{M_1^4}\frac{8\sqrt{3}}{9}\Big\{(r_1 - r)^{3/2} + {} \\ + \frac{9}{20} m_1\left[1 + \frac{\varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}{9\varphi^2}\right](r_1 - r)^{5/2} + \ldots\Big\} + O(\lambda) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} w = W_1 - \lambda^{1/2}\varphi^{1/2}\frac{W_1}{\gamma+1}\frac{m_1^{5/2}}{M_1^4}\frac{4\sqrt{3}}{9} \times \\ \times \left\{(r_1 - r)^{1/2} + \frac{5\varphi^2 + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}{12\varphi^2}(r_1 - r)^{3/2} + \ldots\right\} + O(\lambda) \end{aligned} \tag{3.2}$$

где w — компонента скорости по оси oz в случае ударной волны. В случае конуса Маха получаем

$$\begin{aligned} F = W_1 + \lambda^{1/2}\psi^{1/2}\frac{W_1}{\gamma+1}\frac{m_1^4}{M_1^4}\frac{8\sqrt{3}}{9} \times \\ \times \left\{(r_1 - r)^{3/2} + \frac{9}{20} m_1\left[1 + \frac{\psi'^2 - 2\psi\psi''}{9\psi^2}\right](r_1 - r)^{5/2} + \ldots\right\} + O(\lambda) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} w = W_1 + \lambda^{1/2}\psi^{1/2}\frac{W_1}{\gamma+1}\frac{m_1^{5/2}}{M_1^4}\frac{4\sqrt{3}}{9} \times \\ \times \left\{(r_1 - r)^{1/2} + \frac{5\psi^2 + \psi'^2 - 2\psi\psi''}{12\psi^2}(r_1 - r)^{3/2} + \ldots\right\} + O(\lambda) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\left(\psi^{1/2}(\theta, \lambda) = \frac{3}{2\sqrt{2c}}\,\varphi^{1/2}(\theta, \lambda)\right)$$

Выражения (3.1), (3.3); (3.2), (3.4) отличаются лишь знаком при $\lambda^{1/2}$ и тем, что φ заменено на ψ. Из этих выражений следует, что если они сходятся при малых, но конечных значениях $(r_1 - r)^{1/2}$ и представляют собой линейное решение, которое имеет место во «внутренней» части течения, то его формальное аналитическое продолжение до $r = r_1$ дает нулевое значение для потенциала и скоростей возмущения при $r = r_1$. В линейной теории показывается, что $w - W_1$ есть гармоническая функция переменных

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - m_1^2 r^2}}{m_1 r}, \quad \theta$$

Но любая гармоническая функция, обращающаяся в нуль при $\alpha = 1$ $(r = r_1)$, может быть представлена в виде

$$w - W_1 = c_0 \ln \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^n} - \alpha^n\right)(c_{n1} \cos n\theta + c_{n2} \sin n\theta)$$

где c_0, c_{n1}, c_{n2} — постоянные. В окрестности конуса Маха она разлагается в ряд по степеням $(r_1 - r)^{1/2}$

$$w = W_1 + \left[-c_0\sqrt{2} + \sum 2\sqrt{2n}\,(c_{n1}\cos n\theta + c_{n2}\sin n\theta)\right] \times$$
$$\times \left\{(r_1 - r)^{1/2} + \frac{-5c_0 + \sum 2n\,(5 + 4n^2)(c_{n1}\cos n\theta + c_{n2}\sin n\theta)}{12\left[-c_0 + \sum 2n\,(c_{n1}\cos n\theta + c_{n2}\sin n\theta)\right]}(r_1 - r)^{3/2} + \ldots\right\}$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{3.5}$$

Если разложения (3.2), (3.4) справедливы при малых, но конечных значениях $(r_1 - r)^{1/2}$, то (3.5) должно совпадать с (3.4), если коэффициент при $(r_1 - r)^{1/2}$ продолжителен, и с (3.2), если этот коэффициент отрицателен, т. е. должны иметь место равенства

$$-\lambda^{1/2}\varphi^{1/2}\frac{W_1}{\gamma + 1}\frac{m_1^{5/2}}{M_1^4}\frac{4\sqrt{3}}{9} = -c_0\sqrt{2} + \sum 2\sqrt{2}\,n\,(c_{n1}\cos n\theta + c_{n2}\sin n\theta) \tag{3.6}$$

$$\frac{5\varphi^2 + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}{\varphi^2} = \frac{-5c_0 + \sum 2n\,(5 + 4n^2)(c_{n1}\cos n\theta + c_{n2}\sin n\theta)}{-c_0 + \sum 2n\,(c_{n1}\cos n\theta + c_{n2}\sin n\theta)} \quad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{3.7}$$

Аналогично для ψ. Представляя левую часть (3.7) в виде $5 - (\varphi'/\varphi)^2 - 2(\varphi'/\varphi)'$, легко установить, что (3.7) есть следствие (3.6) (то же для ψ). (Этот факт был также проверен автором для частных случаев: треугольной пластинки под углом атаки и кругового конуса.)

Вышесказанное дает основание считать, что (3.1), (3.3) представляют F при малых, но конечных $(r_1 - r)^{1/2}$. В частности, отсюда следует, что обычная линейная теория дает правильный результат для F и скоростей возмущения внутри конуса Маха. Запишем теперь (2.3) при больших t, с учетом (2.7), (2.12), (2.11) в виде

$$F = W_1 + \lambda^2 F_1 + \lambda^3 F_2 + \ldots =$$
$$= W_1 + \lambda^2\left[a_1(-t)^{3/2} + a_2(-t) + a_3(-t)^{1/2} + a_4 + a_5(-t)^{-1/2} + \ldots\right] +$$
$$+ \lambda^3\left[b_1(-t)^{5/2} + b_2(-t^2) + b_3(-t)^{3/2}\ln(-t) + \ldots\right] + \ldots \tag{3.8}$$

Здесь $a_k = a_k(\theta, \lambda)$ — коэффициенты разложения F_1 по убывающим степеням t. При переходе к $r_1 - r$ и θ при больших t из (3.8) получим

$$F = W_1 + \lambda^{1/2}\left[\frac{a_1}{\varphi^{3/2}}(r_1 - r)^{3/2} + \frac{b_1}{\varphi^{5/2}}(r_1 - r)^{5/2} + \ldots\right] +$$
$$+ \lambda\left[\frac{a_2}{\varphi}(r_1 - r) + \ldots\right] + \lambda^{3/2}\ln\lambda\left[-\frac{b_3}{\varphi^{3/2}}(r_1 - r)^{3/2} + \ldots\right] + \tag{3.9}$$
$$+ \lambda^{3/2}\left[\frac{a_3}{\varphi^{1/2}}(r_1 - r)^{1/2} + \ldots\right] + \lambda^2\left[a_4 + \ldots\right] + \lambda^{5/2}\left[a_5\varphi^{1/2}(r_1 - r)^{-1/2} + \ldots\right] + \ldots$$

Здесь коэффициенты $a_k(\theta, \lambda)$, $b_k(\theta, \lambda)$ могут быть, в свою очередь, представлены в виде рядов по λ и $\ln\lambda$. Из разложения (3.9), представляющего F при малых, но конечных $(r_1 - r)^{1/2}$, следует, что при формальном аналитическом продолжении каждого члена разложения до конуса Маха $(r = r_1)$ потенциал скоростей возмущения $(F - W_1)$ обращается в нуль при $r = r_1$ вплоть до величин $O(\lambda^2)$. Члены, имеющие порядок выше, чем λ^2, обращаются в бесконечность при $r \to r_1$.

Это означает, что ряд по степеням $\lambda^{1/2}$ и $\ln\lambda$, представляющий $F - W_1$ во «внутренней» части течения, при формульном аналитическом продолжении до $r = r_1$ должен обращаться в нуль при $r = r_1$ при учете членов, больших $O(\lambda^2)$. Члены разложения, имеющие порядок выше, чем λ^2, обращаются в бесконечность (определенного порядка) при $r \to r_1$.

4. Предположим, что известно решение линейной задачи при условии, что потенциал и скорости возмущения равны нулю при $r = r_1$. В окрестности $r = r_1$ каждое такое решение можно представить в виде

$$F = W_1\left[1 - \frac{2}{3} m_1^{5/2} A(\theta)(r_1 - r)^{3/2} + \ldots\right] \tag{4.1}$$

(Множитель $W_1 \frac{2}{3} m_1^{5/2}$ выделен для удобства сравнения с результатом Лайтхилла [4].) С другой стороны, из (3.1) и (3.3) имеем

$$F = W_1 - [\lambda\varphi_0(\theta)]^{1/2} \frac{W_1}{\gamma+1} \frac{m_1^4}{M_1^4} \frac{8\sqrt{3}}{9} (r_1 - r)^{3/2} + \ldots \tag{4.2}$$

$$F = W_1 + [\lambda\psi_0(\theta)]^{1/2} \frac{W_1}{\gamma+1} \frac{m_1^4}{M_1^4} \frac{8\sqrt{3}}{9} (r_1 - r)^{3/2} + \ldots \tag{4.3}$$

Для тех θ, где $A(\theta) > 0$, т. е. поток сжимается в окрестности $r = r_1$, приравнивая коэффициенты при $(r_1 - r)^{3/2}$ в (4.2) и (4.1), получим

$$\lambda\varphi_0(\theta) = \frac{3}{16}(\gamma + 1)^2 \frac{M_1^8}{m_1^5} A^2(\theta) \tag{4.4}$$

Для $r_s(\theta)$ получается формула

$$m_1 r_s(\theta) = m_1[r_1 + \lambda\varphi_0(\theta) + \ldots] = 1 + \frac{3}{16}(\gamma + 1)^2 M_1^8 m_1^{-4} A^2(\theta) + \ldots \tag{4.5}$$

которая совпадает с формулой Лайтхилла [4].

Для тех θ, где $A(\theta) < 0$, т. е. поток расширяется в окрестности $r = r_1$, приравнивая коэффициенты при $(r_1 - r)^{3/2}$ в (4.3) и (4.1), получим аналогично (4.4) величину $\lambda\psi_0(\theta)$, которая входит в решение в «пограничном слое» и остается неопределенной. Эта функция характеризует скорость расширения потока в окрестности конуса Маха. Полученное совпадение с результатом Лайтхилла объясняется тем, что метод Лайтхилла дает правильно главный член в окрестности ударной волны. Если преобразовать решение Лайтхилла в окрестности ударной волны к переменным t и θ в «пограничном слое», то получим

$$F = W_1 + W_1 \frac{3}{32}(\gamma + 1)^3 M_1^{12} m_1^{-6} A^4(\theta)\left[t - \frac{8}{9}\left(1 - \frac{3}{4}t\right)^{3/4} + \frac{4}{3}\right] + \ldots \tag{4.6}$$

Из соотношения (2.3) получается

$$F = W_1 + \lambda^2 F_1 + \ldots =$$

$$= W_1 + \frac{8}{3}\frac{W_1}{\gamma+1}\frac{m_1^4}{M_1^4}\lambda^2\varphi^2\left[t - \frac{8}{9}\left(1 - \frac{3}{4}t\right)^{3/2} - \frac{8}{9}\right] + \ldots \tag{4.7}$$

Хотя на ударной волне, при $t = 1$, потенциал скоростей возмущения $F - W_1$ не обращается в нуль по формуле (4.6), но производные $\partial F / \partial t$, определяющие положение скачка, получаются из (4.6) и (4.7) одинаковыми. Тем самым полученные результаты подтверждают возможность применения метода Лайтхилла к задаче определения положения ударной волны.

5. Автор исследовал влияние завихренности потока на компоненты скорости в «пограничном слое» и на выходе из него, исходя из полной системы уравнений для трех компонент скорости и энтропии [6], и получил, что влияние энтропии на компоненты скорости в «пограничном слое» проявляется в членах порядка $O(\lambda^4)$, на выходе из него $O(\lambda^3)$, где $\lambda = \varepsilon^4$ — для удлиненного тела, ε — относительная толщина, $\lambda = \delta^2$ — для тонких тел, δ — угол атаки и т. д. Энтропия всюду в потоке $O(\lambda^3)$.

6. Хорошо известно, что порядок скоростей возмущения при обтекании удлиненного тела различен около поверхности тела и в «средней» части течения. Так, например, для кругового конуса потенциал скоростей возмущения $F - W_1$ в «средней» части течения имеет порядок $O(\mu^2)$, а вблизи тела $O(\mu^2 \ln \mu)$, где $\mu = \operatorname{tg} \varepsilon$, ε — полураствор конуса. Строго говоря, около поверхности удлиненного тела имеется «пограничный слой». Автор исследовал этот «пограничный слой» для кругового конуса при нулевом угле атаки.

Потенциал F принимался в виде

$$F = W_1 + F_{2,1}(\tau)\mu^2 \ln \mu + F_2(\tau)\mu^2 + F_{4,1}(\tau)\mu^4 \ln \mu + \ldots \qquad (\tau = r\mu^{-1}) \tag{6.1}$$

Вычисления показали, что функции $F_{k,l}(\tau)$ $F_k(\tau)$ будут суммами произведений положительных степеней $\ln \tau$ и степеней τ. Эти функции позволяют разделить r и μ при всех r и, следовательно, возможно представление F в виде единого разложения по степеням μ и $\ln \mu$ для решения вблизи поверхности тела и в «средней» части течения, т. е. этот «пограничный слой» будет несущественным.

Иначе обстоит дело с «пограничным слоем» вблизи ударной волны (конуса Маха). В выражение для $F_1(t, \theta, \lambda)$ входит член $(1 - {}^3/_4 t)^{3/2}$, который не допускает единого разложения, так как при $|t| < {}^4/_3$ это выражение разлагается в ряд по степеням t, а при $|t| > {}^4/_3$ — по степеням t^{-1} (ударной волне соответствует $t = 1$). По этой причине «пограничный слой» вблизи ударной волны носит существенный характер.

7. Практические выводы из вышесформулированных результатов заключаются в том, что для получения приближений высшего порядка в задаче обтекания конических тел нужно потенциал скоростей возмущения искать в виде ряда по малому параметру и требовать, чтобы каждый член этого разложения обращался бы в нуль на конусе Маха для невозмущенного потока вплоть до членов $O(\varepsilon^8)$ для удлиненных тел и $O(\delta^4)$ для тонких тел (где ε — относительная толщина, δ — угол атаки или другой удобный параметр). Имеются основания предполагать, что этот результат сохранится и для общего случая обтекания тел, расположенных внутри конуса Маха, построенного для невозмущенного однородного сверхзвукового потока газа.

Автор благодарит С. В. Фальковича за существенные замечания по рассмотренным вопросам.

Поступила 20 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Dyke M. D. First-and Second-Order Theory of Supersonic Flow past Bodies of Revolution. J. A. S., 1951, v. 18, No 3.
2. Broderick I. B. Supersonic Flow past Round Pointed Bodies of Revolution, Qart. J. Mech. Appl. Math., 1949, v. 2.
3. Moore F. K. Second Approximation to Supersonic Conical Flows, J. A. S., 1950, v. 17, No. 6.
4. Lighthill M. J. The Shock Strenth in Supersonic «Conical Flows», Phil. Mag., 1949, v. 40, sevenths, No 311.
5. Булах Б. М. К теории конических течений, ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.
6. Булах Б. М. Замечание к докладу А. Ферри «Новая теоретическая работа по сверхзвуковой аэродинамике в Бруклинском политехническом институте». ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3