

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ СЛАБО ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА  
 МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ С УЧЕТОМ  
 АНИЗОТРОПИИ ПРОВОДИМОСТИ

И. Б. Чекмарев

(Ленинград)

Известно, что если для ионизованного газа не выполняется условие  $\omega\tau \ll 1$ , где  $\omega$  — циклотронная частота заряженной частицы,  $\tau$  — среднее время между столкновениями (сильное магнитное поле, разреженная среда), то необходимо учитывать зависимость от магнитного поля коэффициентов переноса, которые приобретают анизотропный характер [1, 5, 6, 7, 8, 9]. В последние годы появились работы, где проводилось изучение течений ионизованного газа с учетом анизотропии коэффициентов вязкости и проводимости. Так, в статьях А. И. Губанова и Ю. П. Лунькина [2, 3] выведены основные уравнения магнитной плазмодинамики с учетом влияния магнитного поля на процессы переноса для полностью ионизованного газа и детально исследовано течение Куэтта. Влияние анизотропии проводимости на структуру ударной магнитогазодинамической волны и на волновые движения проводящей среды исследовалось в работах С. А. Каплана [4] и М. Лайтхилла [11]. В статье автора [10] изучалось влияние анизотропии проводимости на продольное течение слабо ионизованного газа в узком кольцевом канале при наличии радиального магнитного поля.

Рассмотрим стационарное течение слабо ионизованного газа между параллельными непроводящими пластинами в присутствии поперечного однородного магнитного поля  $B_0$ . Для упрощения решения задачи сделаем следующие предположения:

- 1) длина  $\lambda$  свободного пробега в газе много меньше поперечного размера канала  $2a$ , то есть выполняются условия сплошности среды;
- 2) степень ионизации газа мала;
- 3) для ионов выполняется условие  $\omega_i\tau_i \ll 1$ , что позволяет считать коэффициент вязкости  $\eta$  скалярной величиной, а также не учитывать эффект скольжения ионов относительно газа;
- 4) выполняется неравенство  $R_m = \sigma\mu V_c a \ll 1$ , где  $V_c$  — средняя скорость газа в канале; условия 2), 3) и 4) позволяют использовать уравнение тока в форме:

$$\mathbf{j} + \omega\tau (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \left( \omega\tau = \frac{B_0 e \tau}{m_e} \right)$$

(здесь  $\mathbf{k}$  — орт в направлении приложенного магнитного поля)

- 5) физические характеристики газа ( $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\epsilon$ ) можно считать постоянными.

При сделанных допущениях исходные уравнения рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} + \omega\tau (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = \vartheta \quad (3)$$

Будем считать, что однородное внешнее магнитное поле  $B_0 = \mu H_0$  параллельно оси  $z$ , а в направлениях осей  $x$  и  $y$  имеются постоянные перепады давления на единицу длины канала  $\partial p / \partial x = -P_x$ ,  $\partial p / \partial y = -P_y$  и внешние однородные электрические поля  $E_{0x}$  и  $E_{0y}$ . Тогда всем уравнениям системы (1) — (3) можно удовлетворить, если считать, что искомые величины зависят только от поперечной координаты  $z$ . При этом указанная система сводится к уравнениям:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{B_0}{\eta} j_y + \frac{P_x}{\eta} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{B_0}{\eta} j_x + \frac{P_y}{\eta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = j_x B_y - j_y B_x \quad (4)$$

$$j_x = -\frac{dH_y}{dz}, \quad j_y = \frac{dH_x}{dz} \quad (5)$$

$$j_x + \omega \tau j_y = \sigma (E_{0x} + B_0 v), \quad j_y - \omega \tau j_x = \sigma (E_{0y} - B_0 u) \quad (6)$$

$$E_z = B_x v - B_y u, \quad dE_z / dz = \vartheta / \varepsilon \quad (7)$$

$$E_x = E_{0x}, \quad E_y = E_{0y}, \quad B_z = B_0, \quad j_z = 0, \quad w = 0 \quad (8)$$

Из (6) находим:

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} [(E_{0x} - \omega \tau E_{0y}) + B_0 (\omega \tau u + v)] \quad (9)$$

$$j_y = \frac{\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} [(E_{0y} + \omega \tau E_{0x}) + B_0 (\omega \tau v - u)]$$

Исключая из (4) с помощью (9) плотность тока, получаем для составляющих скорости систему уравнений

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{N^2}{a^2} u + \omega \tau \frac{N^2}{a^2} v = -\frac{P_x}{\eta} - \frac{N^2}{B_0 a^2} (E_{0y} + \omega \tau E_{0x}) \quad (10)$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{N^2}{a^2} v - \omega \tau \frac{N^2}{a^2} u = -\frac{P_y}{\eta} + \frac{N^2}{B_0 a^2} (E_{0x} - \omega \tau E_{0y})$$

где

$$M^2 = \frac{B_0^2 a^2 \sigma}{\eta}, \quad N^2 = \frac{M^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (11)$$

Четное относительно координаты  $z$  решение уравнений (10) имеет вид:

$$u = C_1 \operatorname{ch} \frac{\alpha N z}{a} \cos \frac{\beta N z}{a} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\alpha N z}{a} \sin \frac{\beta N z}{a} + A_1 \quad (12)$$

$$v = -C_2 \operatorname{ch} \frac{\alpha N z}{a} \cos \frac{\beta N z}{a} + C_1 \operatorname{sh} \frac{\alpha N z}{a} \sin \frac{\beta N z}{a} + A_2 \quad (13)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} + 1}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} - 1} \quad (14)$$

$$A_1 = \frac{1}{B_0^2 \sigma} (P_x + \omega \tau P_y) + \frac{E_{0y}}{B_0}, \quad A_2 = \frac{1}{B_0^2 \sigma} (P_y - \omega \tau P_x) - \frac{E_{0x}}{B_0} \quad (15)$$

Определяя постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  с помощью граничных условий

$$u = v = 0 \quad \text{при } z = a \quad (16)$$

находим

$$C_1 = -\frac{A_1 \operatorname{ch} \alpha N \cos \beta N + A_2 \operatorname{sh} \alpha N \sin \beta N}{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = \operatorname{sh}^2 \alpha N + \cos^2 \beta N \quad (17)$$

$$C_2 = -\frac{A_1 \operatorname{sh} \alpha N \sin \beta N - A_2 \operatorname{ch} \alpha N \cos \beta N}{\Delta_1}$$

Для объемных расходов газа  $Q_x$  и  $Q_y$  в направлениях осей  $x$  и  $y$  в результате вычислений получим

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_{-a}^a u dz = 2a \left( A_1 - \frac{A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_2}{M \Delta_1} \right) \\ Q_y &= \int_{-a}^a v dz = 2a \left( A_2 - \frac{-A_1 \Phi_2 + A_2 \Phi_1}{M \Delta_1} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \alpha \operatorname{sh} \alpha N \operatorname{ch} \alpha N + \beta \sin \beta N \cos \beta N \\ \Phi_2 &= \beta \operatorname{sh} \alpha N \operatorname{ch} \alpha N - \alpha \sin \beta N \cos \beta N \end{aligned} \quad (19)$$

Используя формулы (9), находим для полных токов в направлениях осей  $x$  и  $y$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-a}^a j_x dz = \frac{2a\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[ (E_{0x} - \omega \tau E_{0y}) + \frac{B_0}{2a} (\omega \tau Q_x + Q_y) \right] \\ I_y &= \int_{-a}^a j_y dz = \frac{2a\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[ (E_{0y} + \omega \tau E_{0x}) + \frac{B_0}{2a} (-Q_x + \omega \tau Q_y) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

При известных составляющих скорости  $u(z)$  и  $v(z)$  при помощи (5) и (9) могут быть найдены напряженности индуцируемого магнитного поля  $H_x$  и  $H_y$ . Напряженность индуцируемого электрического поля  $E_z$  и плотность объемного заряда  $\vartheta$  определяются из уравнений (7).

Рассмотрим теперь два частных случая.

1) Пусть задан постоянный перепад давления на единицу длины канала  $P_x$  вдоль направления оси  $x$ , поддерживающий стационарное движение газа, а  $Q_y = I_y = E_{0x} = 0$ . Этот пример соответствует задаче о течении проводящего газа в бесконечно длинном канале с непроводящими стенками, ширина которого во много раз больше высоты. Условия  $Q_y = I_y = 0$  дают уравнения

$$A_2 - \frac{-A_1 \Phi_2 + A_2 \Phi_1}{M \Delta_1} = 0, \quad E_{0y} - B_0 \frac{Q_x}{2a} = 0 \quad (21)$$

При этом как следствие последнего из них имеем  $I_x = 0$ .

Из системы (21) при помощи (15) находим

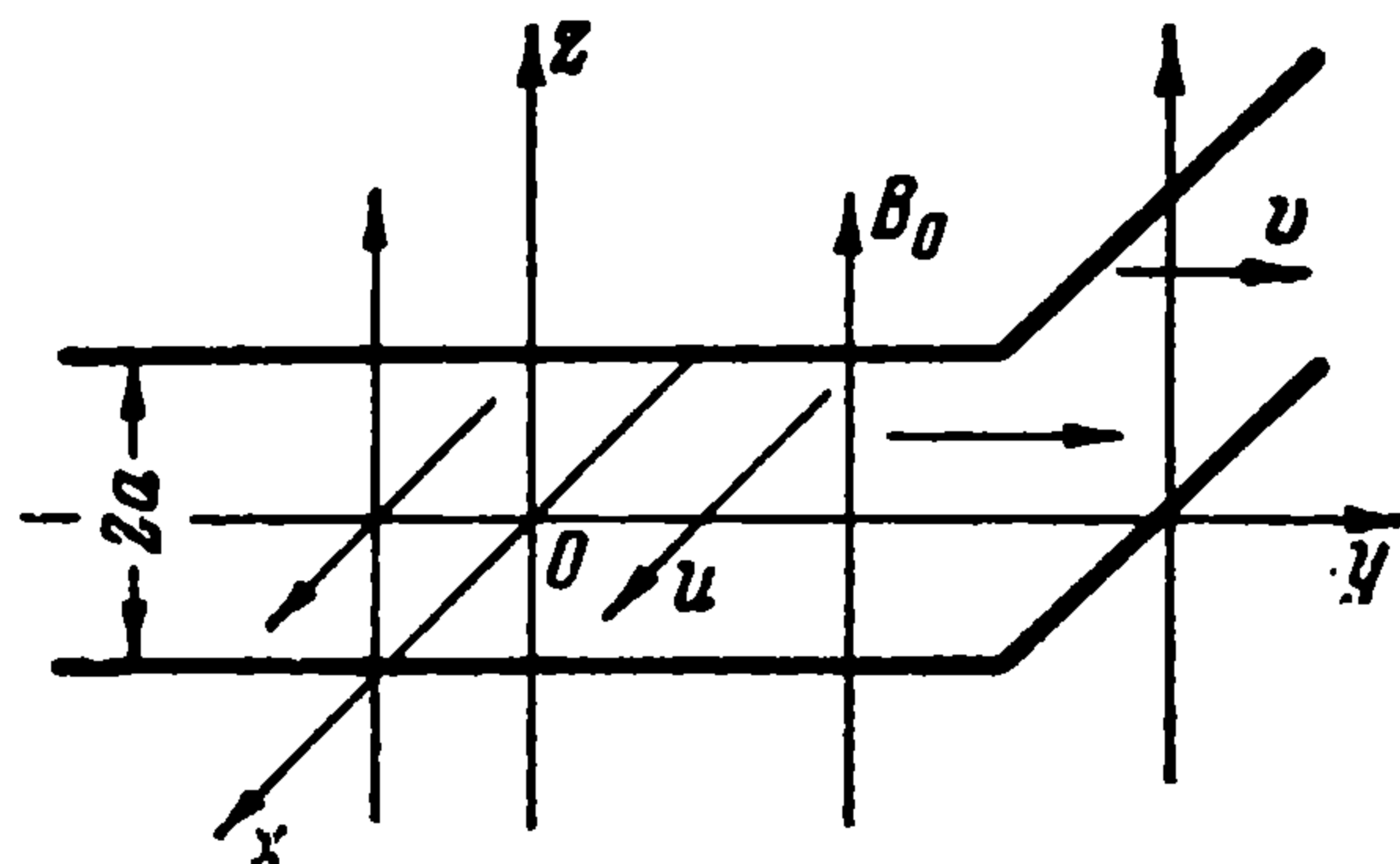
$$A_1 = \frac{M \Delta_1 (M \Delta_1 - \Phi_1) P_x a^2}{N^2 \Delta_2 \eta}, \quad A_2 = \frac{M \Delta_1 \Phi_2}{N^2 \Delta_2} \frac{P_x a^2}{\eta} \quad (22)$$

где

$$\Delta_2 = \Phi_1 (M \Delta_1 - \Phi_1) + \Phi_2 (M \Delta_1 \omega \tau - \Phi_2) \quad (23)$$

Расход в направлении оси  $x$  дается формулой:

$$Q_x = \frac{(M \Delta_1 - \Phi_1)^2 + \Phi_2^2}{N^2 \Delta_2} \frac{2P_x a^3}{\eta} \quad (24)$$

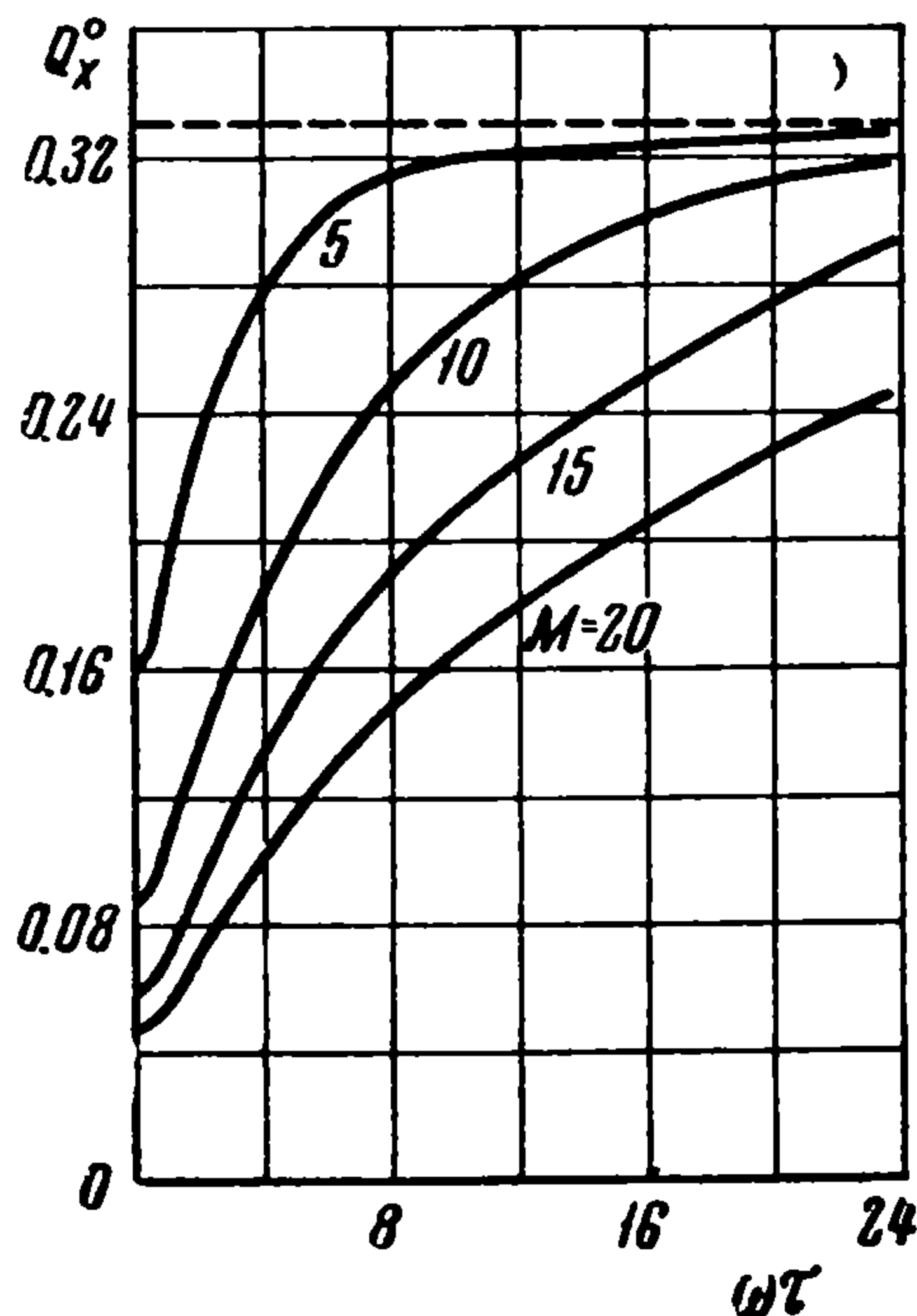


Фиг. 1

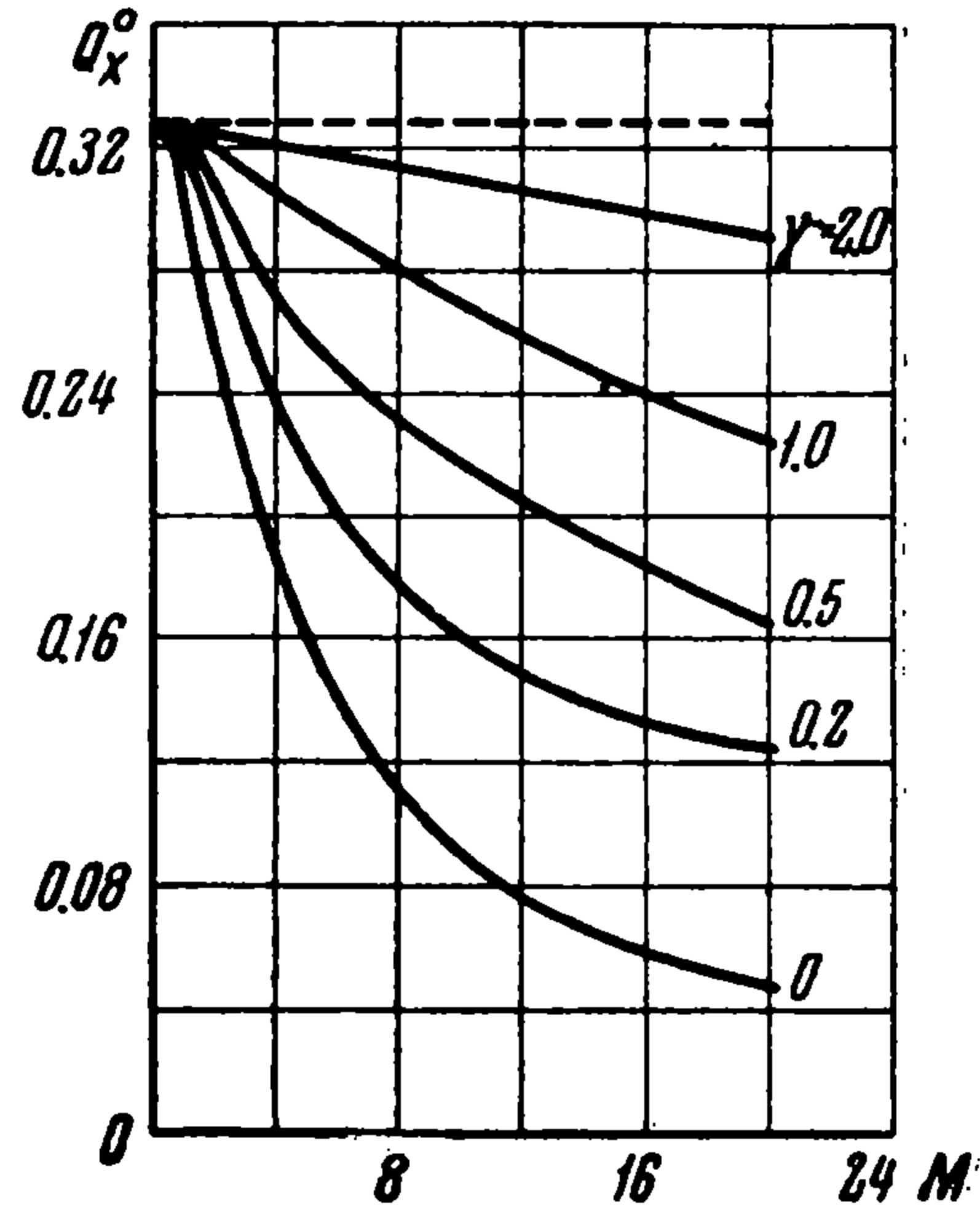
которая в случае  $M = \text{const}$ ,  $\omega\tau \rightarrow 0$  переходит в известное решение задачи Гартмана с изотропной проводимостью для равного нулю полного тока

$$Q_x = \frac{2P_x a^3}{\eta} \frac{M \operatorname{ch} M - \operatorname{sh} M}{M^2 \operatorname{sh} M} \quad (25)$$

На фиг. 2 показан график зависимости расхода  $Q_x^\circ = Q_x / (2P_x a^3 : \eta)$  от величины  $\omega\tau$  по формуле (24) при разных значениях числа Гартмана  $M$ . Если изменяется только напряженность внешнего магнитного



Фиг. 2



Фиг. 3

поля  $H_0$ , то величина  $\gamma = \omega\tau / M$  остается постоянной и характеризует степень разреженности среды. График зависимости расхода  $Q_x^\circ$  от числа Гартмана  $M$  для этого случая показан на фиг. 3. Несмотря на то, что полный расход  $Q_y$  и полный ток  $I_y$  равны нулю, в газе в результате анизотропного характера проводимости возникают поперечные течения и электрические токи.

2) Во втором примере предположим, что среда и токи могут свободно протекать как в направлении оси  $x$ , так и в направлении оси  $y$ . Положим для простоты  $P_y = E_{0y} = E_{0x} = 0$ , а величину  $P_x$  будем считать заданной. Тогда получим, что

$$A_1 = \frac{1}{M^2} \frac{P_x a^2}{\eta}, \quad A_2 = -\frac{\omega\tau}{M^2} \frac{P_x a^2}{\eta} = -\omega\tau A_1 \quad (26)$$

$$Q_x = \frac{2P_x a^3}{\eta} \frac{(M\Delta_1 - \Phi_1) + \omega\tau\Phi_2}{M^3\Delta_1}, \quad I_x = \frac{2P_x a}{B_0} \frac{\Phi_2}{M\Delta_1}$$

$$Q_y = -\frac{2P_x a^3}{\eta} \frac{\omega\tau(M\Delta_1 - \Phi_1) - \Phi_2}{M^3\Delta_1}, \quad I_y = -\frac{2P_x a}{B_0} \frac{M\Delta_1 - \Phi_1}{M\Delta_1} \quad (27)$$

В предельном случае  $M = \text{const}$ ,  $\omega\tau \rightarrow 0$  найденные выражения переходят в формулы другого режима движения в задаче Гартмана, в котором равна нулю напряженность электрического поля:

$$Q_x = \frac{2P_x a^3}{\eta} \frac{M \operatorname{ch} M - \operatorname{sh} M}{M^3 \operatorname{ch} M}, \quad I_y = -\frac{2P_x a}{B_0} \frac{M \operatorname{ch} M - \operatorname{sh} M}{M \operatorname{ch} M} \quad (28)$$

График зависимости отношения расхода  $Q_y$ , возникающего из-за анизотропии проводимости поперечного потока, к расходу  $Q_x$  основного потока от величины  $\omega\tau$  показан на фиг. 4. Как при  $\omega\tau \rightarrow 0$ , так и при больших  $\omega\tau$  поперечное течение исчезает.

Из приведенных фигур, а также из анализа формул следует, что при больших значениях  $\omega\tau$  полученные решения асимптотически приближаются к обычным решениям соответствующей задачи для непроводящей жидкости:

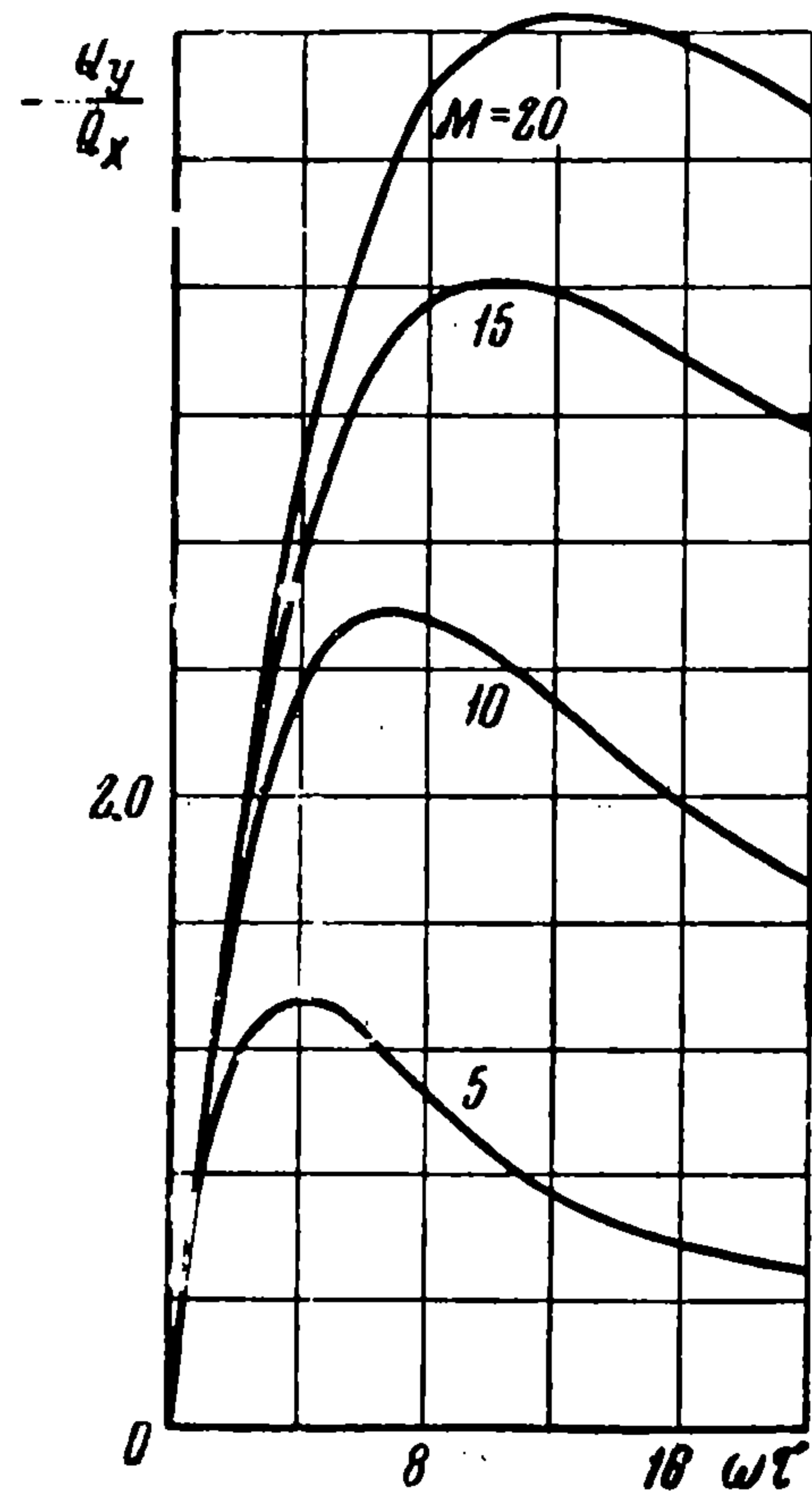
$$u = \frac{P_x a^2}{\eta} \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{z}{a} \right)^2 \right], \quad Q_x = \frac{2P_x a^3}{\eta} \frac{1}{3} \quad (29)$$

Таким образом, с увеличением величины  $\omega\tau$  вследствие уменьшения при этом эффективной проводимости газа влияние магнитного поля на основной поток ослабевает. С другой стороны, анизотропия проводимости приводит к существенному усложнению картины течения, выражающемуся в появлении поперечных потоков, индуцированного электрического поля и объемного электрического заряда.

Поступила 4 III 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершман Б. И., Гинзбург В. Л. О влиянии магнитного поля на конвективную неустойчивость в атмосферах звезд и в земной ионосфере. *Астрономический журнал*, т. XXXII, № 3, 201 (1955).
2. Губанов А. И., Лунькин Ю. П. Уравнения магнитной плазмодинамики. *Журнал технической физики*, т. XXX, № 9, 1046 (1960).
3. Губанов А. И., Лунькин Ю. П. Куэттовское течение в магнитной плазмодинамике. *Журнал технической физики*, т. XXX, № 9, 1053 (1960).
4. Каплан С. А. Влияние анизотропии проводимости в магнитном поле на структуру ударной волны в магнитной газодинамике. *ЖЭТФ*, т. 38, № 1, 252 (1960).
5. Каулинг Т. *Магнитная гидродинамика*. ИИЛ, М., 1959.
6. Кантровитц А. Р., Петчек Г. Е. Вводный обзор магнитной гидродинамики. В сборнике «Магнитная гидродинамика», Атомиздат, М., 1958.
7. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред*. Гостехтеоретиздат, М., 1957.
8. Петчек Г. Е. Аэродинамическая диссипация. В сборнике «Космическая газодинамика», ИИЛ, М., 1960.
9. Спитцер Л. *Физика полностью ионизованного газа*. ИИЛ, М., 1957.
10. Чекареев И. Б. Влияние анизотропии проводимости на стационарное течение несжимаемого вязкого ионизованного газа между коаксиальными цилиндрами при наличии радиального магнитного поля. *Ленинградский политехн. институт им. М. И. Калинина, Научно-техн. информац. бюлл. № 7, раздел физ. мат. наук*, стр. 81, 1960 г.
11. Lighthill M. J. Studies on magneto-hydrodynamic waves and other anisotropic waves motions. *Philos. transactions Roy. Soc. London, Series, A, v. 252, № 1014* (1960)



Фиг. 4