Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ФОРМЕ ОБОБЩЕННОГО ЗАКОНА ОМА В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОМ ГАЗЕ

В. Б. Баранов, Г. А. Любимов

(Москва)

При получении уравнений движения полностью ионизованного газа, а также соотношения, связывающего плотность тока с другими, определяющими задачу параметрами, часто пользуются моделью двухкомпонентной жидкости, состоящей из электронов и ионов. При этом иногда (см. например [1]) обе компоненты смеси и смесь в целом считаются идеальными жидкостями, в других случаях [2] при получении уравнения движения смеси учитывают члены, связанные с вязкостью, как внутри компонент, так и смеси в целом. В настоящей заметке рассматривается вопрос об учете вязкости компонент при получении уравнения для плотности тока. Это уравнение обычно называют обобщенным законом Ома. Попутно выписываются безразмерные критерии, от которых зависит форма обобщенного закона Ома в полностью ионизованном газе

Пусть газ состоит из электронов и однократно заряженных ионов; для простоты будем считать, что число электронов и ионов в единице объема одинаково и равно n; тогда при некоторых условиях [3] уравнения движения для каждой из компонент можно записать в виде

$$m_e n \frac{d_e \mathbf{v}_e}{dt} = -\nabla p_e - \operatorname{div} \pi_e - en\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_e \times \mathbf{H}]\right) + \mathbf{R}_e \tag{1}$$

$$m_i n \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla p_i - \operatorname{div} \pi_i + en\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_i \times \mathbf{H}]\right) + \mathbf{R}_i \tag{2}$$

$$\frac{d_e}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_e \nabla, \qquad \frac{d_i}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla$$

Здесь m_e, m_i — массы электрона и иона ($m_e \ll m_i$) $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_i$ — макроскопические скорости, p_e, p_i — парциальные давления, π_e, π_i — тензоры вязких напряжений для электронного и ионного газов соответственно [3], e — величина заряда электрона, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей. Взаимодействие между компонентами происходит в результате столкновений и сводится к некоторой усредненной силе $\mathbf{R}_\alpha$ ($\alpha = e, i$), равной среднему изменению импульса при столкновении частиц, принадлежащих разным компонентам ($\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i$).

Будем считать, что ионная и электронная температуры одинаковы ($m_e v_{ex}^2 \sim m_i v_{ix}^2$, v_{ex} и v_{ix} — скорости хаотического движения электронов и ионов). При этом $p_e \sim p_i$.

Если, кроме того, считать, что скорость относительного движения компонент мала по сравнению с хаотическими скоростями, то $p_i = p_e = {}^1/_2\, p$ (p — давление в смеси).

Умножая (1) на $-e/m_e$, (2) на e/m_i и складывая, получим

$$en\left(-\frac{d_e \mathbf{v}_e}{dt} + \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt}\right) = \frac{e}{m_e}\nabla p_e + \operatorname{div}\left(\frac{e}{m_e}\pi_e - \frac{e}{m_i}\pi_i\right) +$$

$$+ \frac{e^2 n}{m_e}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) - \frac{e}{m_e c}\mathbf{j} \times \mathbf{H} - \frac{e^2 n}{m_e}\frac{1}{\sigma}\mathbf{j} \qquad (m_e \ll m_i) \tag{3}$$

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau_e}{m_e}, \qquad \mathbf{j} = -en(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$$

Здесь σ — проводимость газа в отсутствие магнитного поля, $\mathbf{j}$ — плотность тока, τ_e — время между столкновениями электронов с ионами. В случае, когда в каждой из компонент имеет место максвелловское распределение скоростей

$$\mathbf{R}_e = -\frac{nm_e(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)}{\tau_e}$$

Поправки к этому выражению для распределений, близких к максвелловскому, даны в [3]; но эти поправки для дальнейших оценок несущественны.

В дальнейшем, для некоторого упрощения формул будем предполагать, что вследствие большой массы ионов средняя скорость смеси совпадает со средней скоростью ионного газа ($m_i\mathbf{v}_i \gg m_e\mathbf{v}_e$). При этом имеют место соотношения

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_i, \qquad \mathbf{v}_e \sim \mathbf{v} - \frac{1}{en}\mathbf{j}$$

Используя эти соотношения, а также уравнение неразрывности

$$\frac{dn}{dt} + n\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

преобразуем уравнение (3) к виду:

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \mathbf{j}\operatorname{div}\mathbf{v} + (\mathbf{j}\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{j}\nabla)\frac{\mathbf{j}}{en} = -\frac{e^2n}{m_e}\frac{1}{\sigma}\mathbf{j} +$$
$$+\frac{e^2n}{m_e}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) - \frac{e}{m_e c}\mathbf{j}\times\mathbf{H} + \frac{e}{m_e}\nabla p_e + \operatorname{div}\left(\frac{e}{m_e}\pi_e - \frac{e}{m_i}\pi_i\right) \quad (4)$$

Будем считать, что характерное время задачи t много больше τ_e и τ_i — времени между столкновениями ионов с ионами ($t \gg \max\{\tau_e, \tau_i\}$). При этом в (4) можно пренебречь первым членом в левой части по сравнению с первым членом в правой части.

В задачах, в которых электромагнитное поле существенно влияет на движение, магнитные силы имеют порядок сил инерции

$$\rho V^2 \sim \frac{1}{c}jHL, \quad \text{или} \quad j \sim \frac{nm_iV^2c}{HL} \qquad (\rho = n(m_e + m_i) = nm_i) \quad (5)$$

Здесь V, L — характерные скорость и длина задачи. Если, кроме того, при движении существенны силы вязкости, то

$$\eta\frac{V}{L} \sim \rho V^2 \quad \text{или} \quad \eta \sim nm_iVL \qquad (\eta = 0.96nT\tau_i) \quad (6)$$

Здесь T — температура, значение η указано согласно [3].

Для оценки членов, связанных с вязкостью, в уравнении (4) достаточно оценить одну из компонент тензора, стоящего под знаком дивергенции в (4), так как остальные компоненты имеют тот же порядок величины[3]. Компоненту Π_{xx} этого тензора легко преобразовать к виду:

$$\Pi_{xx} = \frac{e}{m_e}\pi_{exx} - \frac{e}{m_i}\pi_{ixx} = 0{,}96\,enT\left\{\frac{\tau_e}{m_e}\left[\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{j_z}{en} - \right.\right.$$
$$-\frac{1}{3}\left(\operatorname{div}\mathbf{v} - \operatorname{div}\frac{\mathbf{j}}{en}\right) - a_2'\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{j_x}{en} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{j_y}{en}\right) -$$
$$\left. - 2\omega_e\tau_e a_2''\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{j_x}{en} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{j_y}{en}\right)\right] - \frac{\tau_i}{m_i}\left[\frac{\partial w}{\partial z} - \right. \quad (7)$$
$$\left.\left. - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{v} - b_2'\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - 2\omega_i\tau_i b_2''\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\right\}$$

Входящие в это выражение коэффициенты a_2', a_2'', b_2' и b_2'' являются функциями $\omega_e\tau_e$ и $\omega_i\tau_i$ (ω_i — ларморова частота ионов) и по порядку величины не превышают единицы во всем диапазоне изменения $\omega_e\tau_e$ и $\omega_i\tau_i$. В связи с этим в силу того, что

$$\frac{\tau_e}{\tau_i} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll 1 \tag{8}$$

(см., например, [3]) главными членами в (7) являются

$$\text{либо} \quad \frac{\tau_e}{m_e}\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \text{либо} \quad \frac{\tau_e}{m_e}\frac{\partial}{\partial z}\frac{j_z}{en}$$

Используя оценки (5), (6) и (8), для членов, входящих в выражение (4), получим

$$A_1 = \mathbf{j}\operatorname{div}\mathbf{v} \sim (\mathbf{j}\nabla)\mathbf{v} \sim \frac{enm_iV^2cV}{eHL^2} = enV\frac{\Omega^2}{\omega_i}$$

$$A_2 = (\mathbf{j}\nabla)\frac{\mathbf{j}}{en} \sim \frac{nm_iV^2cnm_iV^2c}{HLenLHL} = enV\frac{\Omega^3}{\omega_i^2}$$

$$A_3 = \frac{e^2n}{m_e}\frac{1}{\sigma}\mathbf{j} = \frac{\mathbf{j}}{\tau_e} \sim \frac{nm_iV^2c}{HL\tau_e} = enV\frac{\Omega}{\omega_i\tau_e}$$

$$A_4 = \frac{e^2n}{m_e}\mathbf{E} \gtrsim \frac{e^2n}{m_ec}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}] \sim enV\omega_e$$

$$A_5 = \frac{e}{m_e}\nabla p_e \lesssim \frac{e}{m_ec}\mathbf{j}\times\mathbf{H} \sim \frac{e}{m_ec}\frac{nm_iV^2c}{HL}\,H = enV\frac{m_i}{m_e}\Omega$$

$$A_6 = \frac{\partial}{\partial x}\left[0.96\,enT\frac{\tau_e}{m_e}\frac{\partial w}{\partial z}\right] \sim 0.96\,nT\tau_i\frac{e}{m_e}\frac{\tau_e}{\tau_i}\frac{V}{L^2} = \eta\frac{e}{m_e}\frac{V}{L^2}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \sim enV\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\,\Omega$$

$$A_7 = \frac{\partial}{\partial x}\left[0.96\,enT\frac{\tau_e}{m_e}\frac{\partial}{\partial z}\frac{j_z}{en}\right] \sim 0.96\,nT\tau_i\frac{\tau_e}{\tau_i}\frac{nm_ieV^2c}{HLenm_eL^2} = \eta\frac{\tau_e}{\tau_i}\frac{m_i}{m_e}\frac{eV^2c}{eHL^3} \sim en\,V\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\frac{\Omega^2}{\omega_i}$$

$$\left(\Omega = \frac{V}{L} = \frac{1}{t},\ \frac{\Omega}{\omega_i} \sim \frac{v_e - v_i}{V}\right)$$

Здесь Ω — характерная частота задачи, порядок отношения Ω/ω, указан на основании (5).

Легко видеть, что относительные значения членов, входящих в (4), определяются значениями безразмерных параметров Ω/ω_i и $\omega_e\tau_e$

В зависимости от этих параметров обобщенный закон Ома будет иметь тот или иной вид.

1°. Случай $\Omega/\omega_i \ll 1$, $\omega_e\tau_e \ll 1$.

Сравнивая члены A_1 с A_6 и A_2 с A_7, получим

$$\frac{A_1}{A_6} \sim \frac{A_2}{A_7} \sim \frac{\Omega}{\omega_i}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$$

т. е. членами A_1 и A_2 можно пренебречь по отношению к A_6 и A_7 при $\Omega/\omega_i \lesssim 1$. Кроме того, при выполнении этого неравенства $A_6 \gtrsim A_7$.

а) При $\Omega / \omega_i \sim \omega_e \tau_e$ имеем $A_4 \gg A_5$ и $A_3 \sim A_4$. Сравнивая члены A_4 с A_6 в силу (8), получим

$$\frac{A_6}{A_4} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\, \frac{\Omega}{\omega_e} \sim \frac{\Omega}{\omega_i} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll 1 \tag{9}$$

т. е. членами, связанными с вязкостью, можно пренебречь. Обобщенный закон Ома имеет вид

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]\right) \tag{10}$$

Эта форма закона Ома используется в магнитной гидродинамике.

б) При $\Omega / \omega_i \ll \omega_e \tau_e$ имеем $A_3 \ll A_4$ и закон Ома принимает вид

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{H} \tag{11}$$

Эта форма используется в магнитной гидродинамике при изучении движений бесконечно проводящих сред.

в) При $\omega_e \tau_e \ll \Omega/\omega_i \ll 1$ имеем $A_3 \gg A_4$ и член A_6 надо сравнивать с членом A_3; получим

$$\frac{A_6}{A_3} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\, \omega_i \tau_e \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\, \omega_e \tau_e \ll 1 \tag{12}$$

т. е. членами, связанными с вязкостью, можно пренебречь, и закон Ома примет вид

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{13}$$

Эта форма совпадает с законом Ома для твердых неподвижных проводников.

2°. Случай $\Omega / \omega_i \ll 1$, $\omega_e \tau_e \sim 1$. При этом выполняется неравенство $\Omega / \omega_i \ll \omega_e \tau_e$ и он аналогичен случаю 1°, б)

3°. Случай $\Omega / \omega_i \ll 1$, $\omega_e \tau_e \gg 1$. Аналогичен 1°, б).

4°. Случай $\Omega / \omega_i \sim 1$, $\omega_e \tau_e \ll 1$. При этом имеют место соотношения $A_4 \sim A_5, A_3 \gg A_4$, а также выполняется соотношение (12), поэтому этот случай аналогичен 1°, в).

5°. Случай $\Omega / \omega_i \sim 1$, $\omega_e \tau_e \sim 1$. При этом члены A_3, A_4 и A_5 имеют один и тот же порядок. Сравнивая A_6 с A_4, приходим к оценке (9), следовательно, членами, связанными с вязкостью, можно пренебречь. Закон Ома принимает вид

$$\frac{e^2 n}{m_e}\,\frac{1}{\sigma}\,\mathbf{j} + \frac{e}{m_e c}\,\{\mathbf{j} \times \mathbf{H} - c \nabla p_e\} - \frac{e^2 n}{m_e}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) = 0 \tag{14}$$

Эта форма закона Ома используется в задачах о движениях газа с анизотропной проводимостью.

6°. Случай $\Omega / \omega_i \sim 1$, $\omega_e \tau_e \gg 1$. При этом имеет место неравенство (9), а также неравенство $A_3 \ll A_4$. Закон Ома имеет вид:

$$\frac{1}{c}\,\mathbf{j} \times \mathbf{H} - \nabla p_e - en\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) = 0 \tag{15}$$

7°. Случай $\Omega / \omega_i \gg 1$, $\omega_e \tau_e \ll 1$. При этом $A_2 \gg A_1$, $A_7 \gg A_6$, $A_5 \ll A_3$, $A_5 \gg A_4$. Сравнивая A_7 и A_3, получим

$$\frac{A_7}{A_3} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\, \Omega \tau_e \sim \frac{\tau_i}{t} \ll 1 \tag{16}$$

т. е. членами, связанными с вязкостью, можно пренебречь.

Сравнивая A_2 и A_7, получим

$$\frac{A_2}{A_7} \sim \frac{\Omega}{\omega_i} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$$

Следовательно, при $1 \ll \Omega / \omega_i \lesssim \sqrt{m_i / m_e}$ имеет место $A_2 \lesssim A_7 \ll A_3$ и закон Ома имеет форму (13). Если же $\Omega / \omega_i > \sqrt{m_i / m_e}$, то $A_3 \sim A_2$ и закон Ома имеет вид

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \tau_e (\mathbf{j} \nabla) \frac{\mathbf{j}}{en} \tag{17}$$

8°. Случай $\Omega / \omega_i \gg 1$, $\omega_e \tau_e \sim 1$. При этом $A_3 \sim A_5$, $A_2 \gg A_1$, $A_7 \gg A_6$, $A_5 \gg A_4$. Сравнивая A_7 с A_3, имее мсоотношение (16), а сравнивая A_2 с A_5, получим

$$\frac{A_2}{A_5} \sim \frac{\Omega^2}{\omega_i^2} \frac{m_e}{m_i} \sim \frac{\Omega^2 \omega_i^2 \tau_i^2}{\omega_i^2 \omega_e^2 \tau_e^2} \sim \frac{\tau_i^2}{t^2} \ll 1 \tag{18}$$

Следовательно, закон Ома имеет вид

$$\mathbf{j} + \frac{\tau_e e}{m_e c} \{\mathbf{j} \times \mathbf{H} - c \nabla p_e\} = \sigma \mathbf{E} \tag{19}$$

9°. Случай $\Omega / \omega_i \gg 1$, $\omega_e \tau_e \gg 1$. При этом имеют место соотношения 16) и (18), а также $A_3 \ll A_5$, следовательно, закон Ома принимает вид

$$\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \nabla p_e - en \mathbf{E} = 0 \tag{20}$$

Если

$$|\mathbf{E}| \sim \frac{1}{c} |\mathbf{v} \times \mathbf{H}|$$

то в уравнениях (19) и (20) член, содержащий $\mathbf{E}$, может быть опущен.

Таким образом, членами, связанными с вязкостью, можно всегда пренебрегать при получении закона Ома для полностью ионизованного газа из двухкомпонентной модели. Если нарушаются соотношения (6), т. е. вязкими напряжениями можно пренебречь в уравнениях движения, то все оценки, связанные с вязкими членами в законе Ома, только усилятся и этими членами в законе Ома и подавно можно пренебречь.

Поступила 4 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1 Каулинг Т. Магнитная гидродинамика, ИЛ, 1959.
2. Губанов А. И., Лунькин Ю. П. Уравнения магнитной плазмодинамики, ЖЭТФ, т. 30, вып. 9, 1960
3 Брагинский С. И. Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме. ЖЭТФ, т. 33, вып. 2, 1957.