Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

О. С. Рыжов, Ю. Д. Шмыглевский

(Москва)

При исследовании газовых течений в соплах Лаваля большие трудности представляет построение потока в окрестности самого узкого поперечного сечения канала, где совершается переход от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. В этой области движение газа описывается уравнениями смешанного эллиптико-гиперболического типа, общие свойства которых до настоящего времени изучены недостаточно. Как известно, расчет трансзвуковой части течения существенно упрощается в том частном случае, когда звуковой поверхностью является плоскость, перпендикулярная пересекающим ее линиям тока. В этом случае можно отдельно исследовать дозвуковую область течения, которая описывается уравнениями эллиптического типа, и сверхзвуковую, в которой течение подчиняется уравнениям гиперболического типа. Звуковая плоскость служит при этом одновременно характеристической поверхностью, разделяющей обе области движения газа. Исследованию трансзвуковых потоков с плоской поверхностью перехода через скорость звука посвящено большое количество работ [1-7].

Ниже выводятся общие условия, при которых поверхность перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым совпадает с характеристической поверхностью уравнений газовой динамики. Рассматриваемый случай является единственным, когда сверхзвуковое поле потока может быть рассчитано независимо от его дозвуковой части, так как смешанная задача для системы уравнений в частных производных, возникающая при построении трансзвуковых течений, распадается на чисто гиперболическую и чисто эллиптическую с данными на поверхности перехода.

Систему уравнений газовой динамики можно записать в виде

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0, \qquad v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

$$p = p(\rho,\ s)$$

Здесь v_i, p, ρ и s означают соответственно компоненты скорости потока, давление, плотность и энтропию в точке с декартовыми координатами x_i. Используется обычная тензорная запись сумм по повторяющимся индексам i, j, которые принимают значения 1, 2, 3.

Уравнения, определяющие $C_\pm$ — характеристические поверхности $x_3 = x_3(x_1,\ x_2)$ системы уравнений (1), запишутся как

$$v_j n_j \pm a = 0 \tag{2}$$

Здесь $a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$ — скорость звука, а n_j — компоненты нормали к этим поверхностям, для которых справедливы формулы

$$n_1 = \frac{1}{k}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \qquad n_2 = \frac{1}{k}\frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \qquad n_3 = -\frac{1}{k} \tag{3}$$

$$k = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2}$$

Система уравнений газовой динамики (1), приведенная к $C_{\pm}$-характеристикам, принимает вид

$$(v_i \pm a n_i)\frac{\partial p}{\partial x_i} + a\rho\,(a\delta_{ij} \pm n_i v_j)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \tag{4}$$

$$(\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j \text{ и } \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j)$$

Уравнения (4) содержат производные от искомых функций только вдоль соответствующих характеристических поверхностей.

Если $C_{\pm}$-характеристическая поверхность совпадает с звуковой поверхностью, то из формулы (2) следует, что она ортогональна в каждой своей точке к пересекающей ее линии тока; поэтому для компонент вектора скорости вдоль этой поверхности имеем

$$v_j = \mp a n_j \tag{5}$$

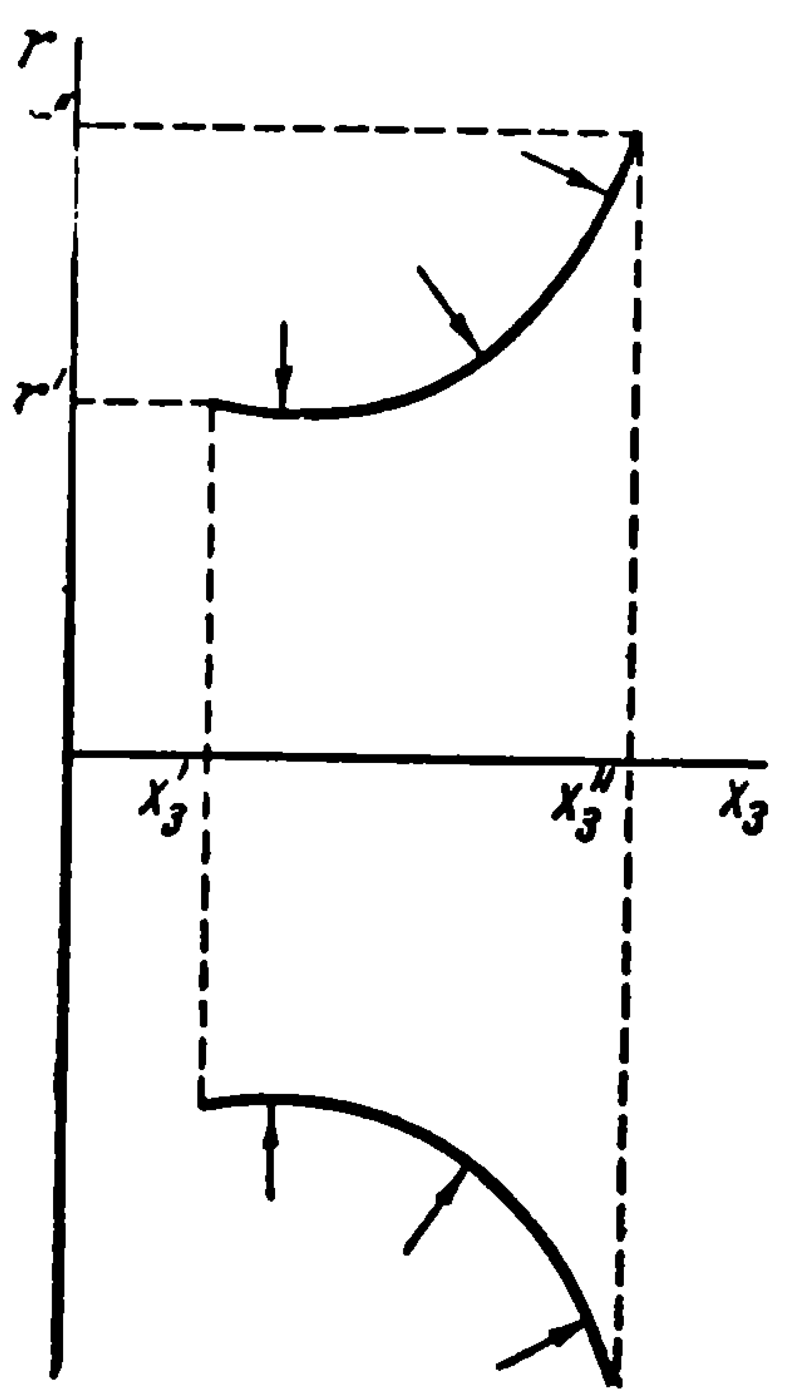
Воспользовавшись равенством (5), получим из уравнений (4)

$$(\delta_{ij} - n_i n_j)\frac{\partial a n_i}{\partial x_j} = 0$$

Учитывая соотношения (3), имеем окончательно

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_3 / \partial x_1}{\sqrt{1 + (\partial x_3 / \partial x_1)^2 + (\partial x_3 / \partial x_2)^2}} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_3 / \partial x_2}{\sqrt{1 + (\partial x_3 / \partial x_1)^2 + (\partial x_3 / \partial x_2)^2}} = 0 \tag{6}$$

Уравнение (6) является уравнением минимальных поверхностей. Оно выражает тот факт, что во всех точках средняя кривизна указанных поверхностей должна быть равна нулю. Теория уравнения (6) тесно связана с теорией аналитических функций комплексного переменного и хорошо разработана [8]. Существенно отметить, что это уравнение было выведено без каких-либо предположений о виде уравнения состояния среды и об отсутствии вихрей в потоке. Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.



Теорема. Пусть имеется произвольный замкнутый контур, на который опирается поверхность перехода через скорость звука, являющаяся одновременно характеристической поверхностью уравнений газовой динамики. Тогда эта поверхность будет обладать минимальной площадью среди всех поверхностей, которые можно натянуть на данный контур, причем вектор скорости в каждой точке будет ортогонален к ней.

Если контур образован плоской кривой, то звуковая поверхность, проходящая через него, также будет плоской, а касательные к линиям тока в точках пересечения с ней будут параллельны между собой [1-7].

Звуковая поверхность может проходить и не через один контур. Такие случаи часто встречаются в прикладных задачах. В качестве примера, когда границей поверхности перехода служат две замкнутые кривые, рассмотрим истечение газа со звуковой скоростью из кольцеобразного отверстия, расположенного в периферийной части осесимметрического сопла (фигура). Здесь поверхность перехода заключена между двумя окружностями, находящимися в плоскостях, перпендикулярных к оси канала, которую мы совместим с осью x_3. Пусть первая окружность находится на расстоянии x_3' от начала координат и имеет радиус r', вторая — на расстоянии x_3'' и имеет радиус r''. Уравнение минимальной поверхности, проходящей через обе окружности, будет иметь вид $x_3 = x_3(r)$ где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Поэтому из соотношения (6) следует

$$r\frac{d^2x_3}{dr^2} + \left(\frac{dx_3}{dr}\right)^3 + \frac{dx_3}{dr} = 0$$

Обращая в этом уравнении роли зависимой и независимой переменных, имеем

$$r\frac{d^2r}{dx_3^2} = 1 + \left(\frac{dr}{dx_3}\right)^2 \tag{7}$$

Общее решение уравнения (7) можно представить в виде

$$r = c_1 \operatorname{ch}\frac{x_3 - c_2}{c_1} \tag{8}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Они определяются из соотношений

$$r' = c_1 \operatorname{ch}\frac{x_3' - c_2}{c_1}, \qquad r'' = c_1 \operatorname{ch}\frac{x_3'' - c_2}{c_1} \tag{9}$$

Как видно из формулы (8), звуковая поверхность в рассматриваемом случае образуется вращением цепной линии вокруг оси сопла. Существенно отметить, однако, что в рассматриваемой задаче через две данные точки $A'(x_3', r')$ и $A''(x_3'', r'')$ не всегда проходит одна и только одна экстремаль (8). Как показывает решение системы уравнений (9), в зависимости от относительного положения этих точек таких экстремалей может быть две, одна или ни одной. В случае, когда через точки A' и A'' нельзя провести экстремали (8), минимальными поверхностями служат диски, перпендикулярные оси сопла и отстоящие на расстоянии x_3' и x_3'' от начала координат.

Нетрудно проверить, что в аналогичной задаче об истечении газа из отверстий, расположенных симметрично относительно оси канала в периферийной части плоско-параллельного сопла, звуковыми поверхностями будут плоскости, соединяющие края отверстий. Решение такой задачи всегда существует и единственно.

Поступила 13 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. О плоско-параллельных воздушных течениях через каналы при околозвуковых скоростях. Матем. сб., 1933, т. 40, № 1.
2. Görtler H. Zum Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen. ZAMM, 1939, Bd. 19, № 6.
3. Астров В., Левин Л., Павлов Е., Христианович С. О расчете сопел Лаваля. ПММ, 1943, т. VII, вып. 1.
4. Guderley K. G. Störungen in ebenen und rotationssymmetrischen Schall- und Überschallparallelstrahlen. ZAMM, 1947, Bd. 25/27, № 7.
5. Овсянников Л. В. Исследование газовых течений с прямой звуковой линией. Тр. ЛК ВВИА, 1950, вып. XXXIII.
6. Рыжов О. С. К переходу от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым в соплах Лаваля. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
7. Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д. Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. Вычислит. матем., 1957, сб. № 2.
8. Курант Р., Гильберт Д. Методы матем. физики, тт. 1 и 2, ГИТТЛ, 1951