Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. А. Свешников

(Ленинград)

1. Постановка вопроса. Наряду с широко и успешно применяемыми в технике приближенными методами анализа нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений, путем их линеаризации, в ряде случаев возникает необходимость и в точном решении задачи как для определения ошибки приближенных методов, так и для получения окончательного результата в случаях, не допускающих применения метода линеаризации.

Рассматривается поведение линейной динамической системы, на вход которой поступает нелинейная функция стационарного случайного процесса $X(t)$, т. е. системы, описываемой уравнением

$$\frac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1} Y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)\,Y(t) = n f_j[X(t)] \tag{1.1}$$

Вероятностные характеристики процесса $X(t)$ предполагаются известными. $Y(t)$ — искомая функция, характеризующая состояние системы, $a_l(t)$, $l = 1, \ldots, n$ — заданные функции времени; нелинейная функция $f_j(X)$ $(j = 1, 2, 3)$ для определенности здесь предполагается в одном из следующих трех видов:

$$f_1(X) = \operatorname{sign} X \tag{1.2}$$

$$f_2(X) = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sign}(X - a) + \operatorname{sign}(X + a)] \tag{1.3}$$

$$f_3(X) = \tfrac{1}{2}[(X + a)\operatorname{sign}(X + a) - (X - a)\operatorname{sign}(X - a)] \tag{1.4}$$

Первый соответствует нелинейному звену типа «да — нет»; второй — звену, работающему по типу «да-нет», но обладающему зоной нечувствительности; третий — звену, имеющему линейный участок и участок «насыщения». Наличие нелинейного звена на входе линейной динамической системы, с точки зрения теории случайных функций, делает всю задачу нелинейной, что усложняет решение задачи.

Решение уравнения (1.1) (считаем для простоты начальные условия нулевыми) может быть записано в виде

$$Y(t) = \int_0^t p(t, t_1)\, f_j[X(t_1)]\, dt_1 \tag{1.5}$$

Здесь $p(t, t_1)$ — весовая функция системы, выражаемая через систему независимых интегралов однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1). Возведя обе части (1.5) в степень m и применяя операцию нахождения математического ожидания к обеим частям полученного равенства, легко убедиться, что любой момент ординаты случайной функции $Y(t)$ может быть выражен через интеграл от выражений, содержащих смешанные моменты от случайной функции $f_j[X(t)]$. Например, для математического ожидания и дисперсии случайной величины $Y(t)$, получим

$$M[Y(t)] = y(t) = \int_0^t p(t, t_1) M\{f_j[X(t_1)]\} dt_1 \tag{1.6}$$

$$D[Y(t)] = \sigma_y^2 = \int_0^t \int_0^t p(t, t_1) p(t, t_2) M\{f_j[X(t_1)] f_j[X(t_2)]\} dt_1 dt_2 - y^2(t)$$

Вследствие сделанного с самого начала предположения о стационарности случайной функции $X(t)$ математическое ожидание $M\{f_j[X(t)]\}$ постоянная, а $M\{f_j[X(t_1)] f_j[X(t_2)]\}$ будет функцией $\tau = t_2 - t_1$ и не зависит от аргументов t_1 и t_2 в отдельности. Поэтому формулы (1.6) можно представить в виде

$$y(t) = M\{f_j(X(t))\} \int_0^t p(t, t_1) dt_1 \tag{1.7}$$

$$\sigma_y^2 = \int_0^t \left\{ \int_\tau^{2t-\tau} p(t, \xi - \tau) p(t, \xi + \tau) d\xi \right\} M\{f_j[X(t)] f_j[X(t+\tau)]\} d\tau \tag{1.8}$$

Таким образом, первые два момента решения уравнения (1.1) могут быть найдены, если известны математические ожидания

$$\mu_j = M\{f_j[X(t)]\}, \qquad \nu_j(\tau) = M\{f_j[X(t)] f_j[X(t+\tau)]\} \tag{1.9}$$

Если первый и второй законы распределения случайной функции $X(t)$ известны, то нахождение μ_j и ν_j может быть выполнено по общим формулам вычисления математического ожидания, однако связанные с этим вычислением расчеты являются достаточно громоздкими даже для простейших законов распределения случайной функции $X(t)$. Предпочтительней будет другой способ расчета, при котором функция $f_j(X)$ представляется в виде преобразования Фурье от передаточной функции, соответствующей $f_j(X)$, что позволяет выразить математические ожидания в (1.9) через характеристические функции ординат $X(t)$. Однако для применения этого способа необходимо или предполагать существование интеграла Фурье для функции $f_j(X)$ (что, например, для нелинейности видов (1.2), (1.3) и (1.4) не имеет места), или выбирать соответствующую форму для контура интегрирования [1].

Этих трудностей можно избежать, если воспользоваться для интегрального представления правой части (1.1) методом, примененным еще А. А. Марковым [2] для доказательства предельных теорем теории вероятностей и основанным на использовании разрывного интеграла Дирихле, согласно которому имеет место равенство

$$\operatorname{sign} x = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \frac{du}{u} \tag{1.10}$$

Формула (1.7) позволяет получить для $f_j(X)$ интегральное представление, подстановка которого в (1.9) сразу дает для моментов функции $Y(t)$ выражение через характеристические функции ординат $X(t)$.

2. Вычисление моментов существенно нелинейных выражений типа $f_j[X(t)]$. В соответствии с (1.2) и (1.7) имеем

$$f_1[X(t)] = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iuX(t)}\frac{du}{u} \tag{2.1}$$

Следовательно

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} M[e^{iuX(t)}]\frac{du}{u} = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} E(u)\frac{du}{u} \tag{2.2}$$

где $E(u)$ — характеристическая функция $X(t)$.

Аналогичным образом для смешанного момента случайных величин $f_j[X(t_1)]$ и $f_j[X(t_2)]$ получим

$$\nu_1 = -\frac{1}{\pi_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int E(u_1, u_2)\frac{du_1 du_2}{u_1 u_2} \tag{2.3}$$

где $E(u_1, u_2)$ — характеристическая функция систем случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$.

Для нормального случайного процесса интеграл (2.2) может быть вычислен, а интеграл (2.3) значительно упрощен. Действительно, пусть x — математическое ожидание, σ_x^2 — дисперсия, а $k(\tau)$ — нормированная корреляционная функция случайного процесса $X(t)$, тогда

$$E(u) = \exp\left(-\frac{\sigma_x^2}{2}u^2 + iux\right) \tag{2.4}$$

$$E(u_1, u_2) = \exp\left(-\frac{\sigma_x^2}{2}[u_1^2 + u_2^2 + 2k(\tau)u_1u_2] + iu_1x + iu_2x\right) \tag{2.5}$$

и вместо (2.2) получим

$$\mu_1 = M\{f_1[X(t)]\} = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) \qquad \left(\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right) \tag{2.6}$$

При вычислении (2.3) заметим, что интеграл

$$J(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\{-au_1^2 - bu_2^2 - \gamma u_1u_2 + i(x_1u_1 + x_2u_2)\}\frac{du_1du_2}{u_1u_2} \tag{2.7}$$

дифференцированием по параметру γ, может быть преобразован к виду

$$J(\gamma) = -2\pi\int_0^{\gamma}\exp\left\{-\frac{ax_2^2 + bx_1^2 - \xi x_1x_2}{4ab - \xi^2}\right\}\frac{d\xi}{\sqrt{4ab - \xi^2}} + J(0) \tag{2.8}$$

где

$$J(0) = -\pi^2\Phi\left(\frac{x_1}{\sqrt{2a}}\right)\Phi\left(\frac{x_2}{\sqrt{2b}}\right) \tag{2.9}$$

Поэтому вместо (2.3) с учетом (2.5) и (2.9) получим

$$\nu_1(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^{k(\tau)}\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_x^2(1+\xi)}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \Phi^2\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) \tag{2.10}$$

При $x = 0$ интеграл в (2.10) вычисляется элементарно, что дает

$$\nu_1(\tau) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arc}\sin k(\tau) \tag{2.11}$$

Аналогичным образом могут быть вычислены моменты нелинейного выражения $f_2[X(t)]$, которое на основании (1.7) и (1.10) может быть представлено в виде

$$f_2[X(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\exp[iu(X-a)] + \exp[iu(X+a)]\}\frac{du}{u} \tag{2.12}$$

Находя математическое ожидание обеих частей равенства, получим

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iau}E(u)\frac{du}{u} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iau}E(u)\frac{du}{u}\right\}$$

Так как умножение характеристической функции на $\exp[\pm iau]$ эквивалентно прибавлению к математическому ожиданию $\pm a$, то для нормального случайного процесса на основании (2.2) и (2.6) получим

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+a}{\sigma_x}\right) + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_x}\right)\right] \tag{2.13}$$

Аналогично замена (2.12) в произведении $f_2[X(t_1)]\, f_2[X(t_2)]$ дает

$$\nu_2 = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\{\exp[ia(u_1+u_2)] + \exp[ia(u_1-u_2)]\}\, E(u_1, u_2)\frac{du_1 du_2}{u_1 u_2}$$

Используя и в этом случае интеграл (2.8), получим

$$\nu_2 = \frac{1}{\pi}\left\{\int\limits_0^{k(\tau)}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\exp\left(-\frac{(x^2+a^2)}{\sigma_x^2(1-\xi)}\right) + \right.\right. \tag{2.14}$$
$$\left.\left. + \exp\left(-\frac{(x^2+a^2)-(x^2-a^2)\xi}{\sigma_x^2(1-\xi^2)}\right)\right] + \pi\left[\Phi\left(\frac{x+a}{\sigma_x}\right) + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_x}\right)\right]^2 \Phi\left(\frac{x+a}{\sigma_x}\right)\right\}$$

При $x=0$ последняя формула упрощается и принимает вид

$$\nu_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{k(\tau)}\left[\exp\left(-\frac{a^2}{\sigma_x^2(1+\xi)}\right) + \exp\left(-\frac{a^2}{\sigma_x^2(1-\xi)}\right)\right]\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.15}$$

Для нелинейного выражения (1.4), используя (1.10), имеем

$$f_3[X(t)] = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[iu(X+a)](X+a)\frac{du}{u} - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[iu(X-a)](X-a)\frac{du}{u}\right\} \tag{2.16}$$

Вычисляя математические ожидания частей равенства и учитывая что

$$M\{e^{iuX(t)}X(t)\} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial u}E(u)$$

получим

$$\mu_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{a}{i}(e^{iau}+e^{-iau})E(u) - (e^{iau}-e^{-iau})\frac{\partial E(u)}{\partial u}\right\}\frac{du}{u}$$

что для нормального закона дает

$$\mu_3 = \frac{1}{2}\left[(x+a)\Phi\left(\frac{x+a}{\sigma_x}\right) - (x-a)\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_x}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}\right) - \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}\right)\right] \tag{2.17}$$

Используя (2.16) для вычисления $\nu_3(\tau)$, в случае нормального случайного процесса с нулевым математическим ожиданием, получим

$$\nu_3 = -\frac{a^2+\sigma^2 k}{\pi}\int_0^k \exp\left(-\frac{a^2}{\sigma^2(1+\xi)}\right)\left[1-\frac{2a^2(1+k)}{(a^2+\sigma^2 k)(1-\xi)}+\right.$$
$$\left.+\frac{2k}{a^2+\sigma^2 k}\frac{a^2(1-\xi)^2-\sigma^2(1-\xi^2)}{(1-\xi^2)^2}\right]\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}-$$
$$-\frac{a^2-\sigma^2 k}{\pi}\int_0^k \exp\left(-\frac{a^2}{\sigma^2(1-\xi)}\right)\left[1-\frac{2a^2(1-k)}{(a^2-\sigma^2 k)(1+\xi)}-\right.$$
$$\left.-\frac{2k}{a^2-\sigma^2 k}\frac{a^2(1+\xi)^2-\sigma^2(1-\xi^2)}{(1-\xi^2)^2}\right]\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}+$$
$$+\frac{\sigma^2(1+k^2)}{\pi\sqrt{1-k^2}}\left[\exp\left(-\frac{a^2}{\sigma^2(1-k)}\right)-\exp\left(-\frac{a^2}{\sigma^2(1+k)}\right)\right] \tag{2.18}$$

Найденные выше моменты нелинейных выражений $f_j[X(t)]$ позволяют вычислить математическое ожидание и дисперсию решения уравнения (1.1), определяемые формулами (1.7) и (1.8).

3. Примеры применения метода 1°. В качестве простейшего примера применения разбираемого в данной работе метода рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt}Y(t) = m + n\,\mathrm{sign}\,X(t) \tag{3.1}$$

к которому, например, приближенно сводится исследование отклонения $Y(t)$ оси гироскопа направления вследствие наличия сухого трения в оси подвеса, если гироскоп установлен на корабле так, что его горизонтальная ось подвеса совпадает с диаметральной плоскостью корабля. В этом случае постоянные m и n определяются конструктивными параметрами гироскопа, а случайная функция $X(t)$ — угловая скорость бортовой качки. Угол крена корабля $\theta(t)$ с достаточной точностью можно считать стационарной нормальной случайной функцией времени, корреляционная функция которой определяется равенством

$$K_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right) \tag{3.2}$$

где постоянные α, β и σ_θ зависят от характера волнения моря и параметров корабля.

Так как интегрирование уравнения (3.1) при нулевых начальных условиях дает

$$Y(t) = mt + n\int_0^t \mathrm{sign}\,X(t_1)\,dt_1 \tag{3.3}$$

то, применяя формулы (2.6), (2.11), (1.7) и (1.8), получим

$$y(t) = mt, \qquad \sigma_y^2 = 4\pi n^2\int_0^t (t-\tau)\,\mathrm{Arc\,sin}\,k(\tau)\,dt \tag{3.4}$$

где в соответствии с (3.2)

$$k(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$$

При $t \gg 1/\alpha$ верхний предел у интеграла (3.4) можно считать бесконечным, что дает

$$\sigma_y^2 \approx at - b \qquad \left(a = 4\pi n^2\int_0^\infty \mathrm{Arc\,sin}\,k(\tau)\,d\tau,\quad b = 4\pi n^2\int_0^\infty \tau\,\mathrm{Arc\,sin}\,k(\tau)\,d\tau\right) \tag{3.5}$$

Если в данном примере воспользоваться методом статистической линеаризации [3], т. е. произвести приближенную замену

$$\mathrm{sign}\,X(t) = AX(t) + B \tag{3.6}$$

выбрав постоянные A и B, исходя из требования равенства первых и вторых моментов левой и правой части (3.6), то мы получим

$$\sigma_y^2 = 2n^2A^2\sigma_\theta^2\,[1 - k_\theta(t)] \tag{3.7}$$

Следовательно, в данном случае применение метода статистической линеаризации дает даже качественно неверный результат: вместо линейной зависимости от времени мы получаем выражение (3.7), стремящееся к постоянной величине $2n^2A^2\sigma_\theta^2$.

2°. В качестве более сложного примера рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d^2\beta(t)}{dt^2} - p\frac{d}{dt}\alpha(t) = -k_1 \operatorname{sign} X_1(t),\quad \frac{d^2}{dt^2}\alpha(t) + q\frac{d}{dt}\beta(t) = k_2 \operatorname{sign} X_2(t) \tag{3.8}$$

где p, q, k_1 и k_2 — постоянные, а $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — независимые нормальные стационарные функции времени. К подобной системе уравнений, например, приближенно сводится исследование поведения гировертикали, установленной на качающемся корабле при наличии сухого трения в осях подвеса гироскопа. В этом случае $X_1(t)$ — угловая скорость килевой качки корабля, $X_2(t)$ — угловая скорость бортовой качки корабля, а коэффициенты уравнений определяются конструктивными параметрами гироскопа. Для решения системы (3.8) удобно ввести комплексную переменную

$$\zeta(t) = \frac{1}{\sqrt{q}}\alpha(t) + i\frac{1}{\sqrt{p}}\beta(t) \tag{3.9}$$

после чего исходную систему уравнений можно заменить одним уравнением

$$\frac{d^2}{dt^2}\zeta(t) - i\lambda\frac{d}{dt}\zeta(t) = -i\varkappa_1 \operatorname{sign} X_1(t) + \varkappa_2 \operatorname{sign} X_2(t) \tag{3.10}$$

где

$$\lambda = \sqrt{pq},\qquad \varkappa_1 = \frac{k_1}{\sqrt{p}},\qquad \varkappa_2 = \frac{k_2}{\sqrt{q}}$$

Решением уравнения (3.10) при нулевых начальных условиях будет

$$\zeta(t) = \frac{1}{i\lambda}\int_0^t [e^{i\lambda(t-t_1)} - 1]\,[\varkappa_2 \operatorname{sign} X_2(t_1) - i\varkappa_1 \operatorname{sign} X_1(t_1)]\,dt_1 \tag{3.11}$$

Учитывая (3.9), математические ожидания и дисперсии функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ можно определить из соотношений

$$M[\alpha(t)] = \frac{1}{2}\sqrt{q}\,\{M[\zeta(t)] + M[\zeta^*(t)]\},\qquad M[\beta(t)] = \frac{1}{2i}\sqrt{p}\,\{M[\zeta(t)] - M[\zeta^*(t)]\} \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{q}D[\alpha(t)] + \frac{1}{p}D[\beta(t)] = M\{|\zeta(t)|^2\} - \frac{1}{q}\{M[\alpha(t)]\}^2 - \frac{1}{p}\{M[\beta(t)]\}^2 \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{q}D[\alpha(t)] - \frac{1}{p}D[\beta(t)] = \frac{1}{2}M\{[\zeta(t)]^2 + [\zeta^*(t)]^2\} - \frac{1}{q}\{M[\alpha(t)]\}^2 + \frac{1}{p}\{M[\beta(t)]\}^2$$

Воспользовавшись интегральным представлением (1.10), все математические ожидания, входящие в (3.12) и (3.13), можно выразить через характеристические функции ординат случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$. Так как эти вычисления полностью аналогичны выкладкам предыдущего параграфа, то приведем окончательные результаты, полученные для нормальных случайных процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями. В этом случае

$$M[\zeta(t)] = 0,\quad \text{или } M[\alpha(t)] = 0,\qquad M[\beta(t)] = 0$$

$$M\{|\zeta(t)|^2\} = \frac{4}{\pi\lambda^2}\int_0^t \left\{(t-\tau)(\cos\lambda\tau + 1) + \frac{1}{\lambda}[\sin\lambda\tau - \sin\lambda(t-\tau) - \sin\lambda t]\right\} \times$$
$$\times [\varkappa_2^2 \operatorname{Arc}\sin k_2(\tau) + \varkappa_1^2 \operatorname{Arc}\sin k_1(\tau)]\,d\tau \tag{3.14}$$

$$M\{[\zeta(t)]^2\} = -\frac{4}{\pi\lambda^2}\int_0^t \left\{(t-\tau) + \frac{1}{i\lambda}\left[1 + \frac{1}{2}e^{i\lambda\tau} - \frac{1}{2}e^{i\lambda t} + \frac{1}{2}e^{i\lambda(2t-\tau)} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - e^{i\lambda(t-\tau)}\right]\right\}[\varkappa_2^2 \operatorname{Arc}\sin k_2(\tau) - \varkappa_1^2 \operatorname{Arc}\sin k_1(\tau)]\,d\tau \tag{3.15}$$

где $k_1(\tau)$ и $k_2(\tau)$ — нормированные корреляционные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ соответственно. Формулы (3.14) и (3.15) совместно с (3.13) позволяют вычислить значения дисперсий $D[\alpha(t)]$ и $D[\beta(t)]$.

Аналогичным образом задача может быть доведена до конца и при других видах нелинейностей, стоящих в правых частях системы уравнений (3.8).

4. **Применение метода к более сложным задачам.** Усложнение задач сравнительно с рассмотренными выше примерами возможно по трем направлениям. Во-первых, можно отказаться от нормальности и стационарности случайных функций, входящих в уравнение нелинейным образом. Это обобщение не вносит каких-либо принципиальных трудностей. Отличие заключается только в том, что характеристические функции, появляющиеся в процессе вычисления дисперсий решений исследуемых уравнений, будут выражаться более сложно. Во-вторых, можно перейти к рассмотрению нелинейных выражений типа гистерезисных характеристик, например вида

$$f[X(t)] = \begin{cases} +1, & \text{если } X(t) > a \text{ или } -a \leqslant X(t) \leqslant a, \text{ но } X(t) \text{ вошла в интервал, } (-a,\ a), \text{ пересекая уровень } X(t) = a \text{ сверху} \\ -1, & \text{если } X(t) < -a \text{ или } -a \leqslant X(t) \leqslant a, \text{ но } X(t) \text{ вошла в интервал } (-a,\ a), \text{ пересекая уровень } X(t) = -a \text{ снизу} \end{cases} \qquad (4.1)$$

Нелинейности подобного вида также можно явно выразить через ординаты функции $X(t)$, однако получающееся при этом интегральное представление оказывается более сложным, чем для нелинейностей, рассмотренных в данной работе, и нахождение математического ожидания и дисперсии решения уравнения значительно усложняется.

Третьим направлением, по которому можно идти в порядке усложнения задачи, будет рассмотрение таких уравнений, у которых аргументами существенно нелинейных выражений будут не случайные функции с заданными вероятностными характеристиками, а алгебраические суммы этих функций и искомых решений уравнений. Примерами задач подобного типа является уравнение

$$\frac{d}{dt} Y(t) = m + nf_j[X(t) - Y(t)] \qquad (4.2)$$

или уравнение

$$\frac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)\,Y(t) = f_j[X(t) - Y(t)] \qquad (4.3)$$

которые отличаются от уравнений (3.1) и соответственно (1.1) только правыми частями.

Общего метода решения этих задач не удается получить так просто, как для задач, у которых аргументами нелинейных функций являются заданные случайные функции. Тем не менее изложенный в данной работе способ может оказаться полезным для получения приближенного решения и в этом случае, если решение исследуемого уравнения может считаться малым сравнительно с ординатами возмущающей случайной функции. В этом случае решение уравнения типа (4.3) можно искать методом последовательных приближений, сущность которого состоит в следующем. Сперва искомая функция, входящая в аргументы нелинейностей, отбрасывается и определяются моменты решений полученных уравнений так же, как это было сделано выше для математических ожиданий и дисперсий. После этого расчет повторяется снова, однако при этом вместо характеристических функций заданных случайных функций подставляются характеристические функции алгебраических сумм этих функций и решений уравнений, найденных в первом приближении. Так как при этом характеристические функции уже не будут нормальными, то для их вычисления можно воспользоваться рядом Эджворта [4], сохранив в нем те члены, которые могут оказать заметное влияние на результат. Найденные таким образом моменты решения во втором приближении можно использовать для получения следующих приближений. Как всегда, при этом получение каждого следующего приближения связано с большей трудоемкостью. Поэтому в задачах указанного типа данный метод может быть рекомендован в основном, когда требуется оценить порядок величины погрешности первого приближения, приемлемость которого можно предполагать из общих соображений.

Поясним сказанное на примере уравнения (4.2), к которому при $j = 1$ сводится, например, уравнение, определяющее отклонение гировертикали с контактной характеристикой коррекции, установленной на качающемся корабле. В этом случае нормальная случайная функция $X(t)$, характеризующая случайные отклонения маятника-корректора, обладает дисперсией значительно большей, чем дисперсия угла $Y(t)$, характеризующего отклонения гировертикали. Поэтому применение метода последовательных приближений представляется допустимым. Опуская в первом приближении $Y(t)$ в правой части (4.2), получим уравнение (3.1), дисперсия решения которого определяется (3.6). Для получения корреляционной функции $Y(t)$ в первом приближении, необходимой для нахождения дисперсии $Y(t)$ во втором приближении, достаточно уравнение (3.4) умножить почленно на такое же уравнение, написанное при другом значении аргумента t, и после замены (1.10) найти математическое ожидание обеих частей полученного равенства. После преобразований, аналогичных преобразованиям, которые были выполнены в пп. 2 и 3, для корреляционной функции $Y(t)$ получим

$$K_y(t_1, t_2) = \frac{2n^2}{\pi} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \operatorname{Arc\,sin} k(\xi - \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{4.4}$$

Аналогичные выкладки дают для первого приближения корреляционной функции связи $R_{xy}(t_1, t_2)$ случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{t_2} k(t_1 - \xi)\, d\xi \tag{4.5}$$

Для получения моментов $Y(t)$ третьего, четвертого и более высокого порядка необходимо взять произведение трех, четырех и т. д. выражений типа (3.4) для различных значений аргумента t и определить математическое ожидание обеих частей полученных равенств. Порядок вычисления при этом останется прежним, но число интегрирований увеличится, что усложняет сам процесс вычисления. Для получения моментов $Y(t)$ во втором приближении исходным будет уравнение

$$Y_2(t) = mt + \frac{n}{\pi i} \int_0^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iu[X(\xi) - Y_1(\xi)]\} \frac{du}{u}\, d\xi$$

где индексами 1 и 2 отмечены первое и второе приближения. Так как дисперсия $Y_1(t)$ мала сравнительно с дисперсией $X(t)$, разность

$$Z(\xi) = X(\xi) - Y_1(\xi)$$

можно считать нормальной случайной функцией. Поэтому, повторяя выкладки п. 2, для дисперсии $Y_2(t)$ получим

$$D[Y_2(t)] = \frac{2\pi^2}{\pi} \int_0^{t} \int_0^{t} \operatorname{Arc\,sin} k_z(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

где $k_z(t_1, t_2)$ — нормированная корреляционная функция $Z(t)$, определяемая равенством

$$k_z(t_1, t_2) = \frac{\sigma_x^2 + K_y(t_1, t_2) - R_{xy}(t_1, t_2) - R_{yx}(t_1, t_2)}{\sqrt{\{\sigma_x^2 + D[Y_1(t_1)] - 2R_{yx}(t_1, t_1)\}\{\sigma_x^2 + D[Y_1(t_2)] - 2R_{yx}(t_2, t_2)\}}}$$

где $K_y(t_1, t_2)$ и $R_{xy}(t_1, t_2)$ предполагаются взятыми по первому приближению. Аналогичным образом могут быть получены и следующие приближения.

Поступила 10 X 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Д а в е н п о р т В. Б. и Р у т В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. ИИЛ, 1960.
2. М а р к о в А. А. Исчисление вероятностей. Госиздат, М., 1924.
3. К а з а к о в И. Е. Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных систем. Автоматика и телемеханика, 1956, т. XVII, № 5.
4. К р а м е р Г. Математические методы статистики. ИИЛ, 1948.