Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О НЕКОТОРЫХ КОСВЕННЫХ МЕТОДАХ ПОЛУЧЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ О ПОЛОЖЕНИИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Я. Н. Ройтенберг
(Москва)

При построении оптимальных систем автоматического управления алгоритм управления, вырабатываемый по методам теории динамического программирования или в соответствии с принципом максимума Л. С. Понтрягина, реализуется на основе информации о мгновенном положении управляемой системы в фазовом пространстве [1, 2].

Получение такой информации во многих случаях затруднительно, так как не всегда все фазовые координаты системы доступны измерению. Измерение некоторых фазовых координат часто невозможно, вследствие отсутствия сведений о положении системы ориентировки, относительно которой должно определяться положение управляемой системы. Так, например, на движущемся корабле может быть неизвестным направление истинной вертикали места, относительно которой должны определяться погрешности гироскопического маятника, или направление географического меридиана, относительно которого должны определяться погрешности гироскопического компаса.

В связи с этим представляет интерес изыскание косвенных методов определения положения управляемой системы в фазовом пространстве. Один из таких возможных методов рассматривается ниже для линейных стационарных и нестационарных управляемых систем.

1. Стационарные системы. Уравнения движения стационарной управляемой системы можно представить в следующем виде

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\, y_k = x_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь y_k — обобщенные координаты системы, $x_j(t)$ — приложенные к системе внешние силы. Через $f_{jk}(D)$ обозначены полиномы от D, коэффициенты которых предполагаются постоянными; $D = d / dt$ — оператор дифференцирования по времени.

Систему уравнений (1.1) можно представить в таком виде:

$$\begin{gathered} b_{j1}\, y_1^{(m_1)} + b_{j2} y_2^{(m_2)} + \ldots + b_{jn} y_n^{(m_n)} = \\ = \psi_j\left(y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_1, \ldots, y_n^{(m_n-1)}, \ldots, y_n\right) + x_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь верхним индексом $(m_k)\,(k = 1, \ldots, n)$ обозначен порядок старшей производной от y_k по времени, встречающейся в уравнениях (1.1). Функции ψ_j, входящие в уравнения (1.2), будут линейными функциями своих аргументов. Предполагая, что определитель

$$\Delta^* = |\, b_{jk} \,| \tag{1.3}$$

не равен нулю, можно разрешить систему уравнений (1.2) относительно старших производных $y_k^{(m_k)}$ и представить ее в виде

$$\begin{gathered} y_j^{(m_j)} = F_j\left(y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_1, \ldots, y_n^{(m_n-1)}, \ldots, y_n\right) + \\ + \frac{B_{1j}}{\Delta^*} x_1(t) + \ldots + \frac{B_{nj}}{\Delta^*} x_n(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{1.4}$$

где F_j — линейные функции своих аргументов, а B_{ij} — алгебраические дополнения элементов b_{ij} в определителе (1.3). Чтобы преобразовать систему уравнений (1.4) к форме Коши, введем новые переменные

$$z_1 = y_1, \ z_2 = \dot{y}_1, \dots, z_{m_1} = y_1^{(m_1-1)}, \dots, z_r = y_n^{(m_n-1)} \tag{1.5}$$

где

$$r = m_1 + m_2 + \dots + m_n \tag{1.6}$$

Новые переменные $z_1, \dots, z_r$ представляют собой фазовые координаты системы. Обозначим еще через $X_{\sigma_j}(t)$ входящие в правые части уравнений (1.4) линейные комбинации внешних сил

$$X_{\sigma_j}(t) = \frac{B_{1j}}{\Delta^*} x_1(t) + \dots + \frac{B_{nj}}{\Delta^*} x_n(t) \qquad (\sigma_j = \sigma_1, \dots, \sigma_n) \tag{1.7}$$

где

$$\sigma_1 = m_1, \qquad \sigma_2 = m_1 + m_2, \dots, \sigma_n = r \tag{1.8}$$

Уравнения (1.4) можно теперь представить в виде

$$\begin{gathered} \dot{z}_1 - z_2 = 0, \dots, \dot{z}_{m_1} - F_1(z_1, z_2, \dots, z_r) = X_{\sigma_1}(t), \dots, \\ \dot{z}_r - F_n(z_1, z_2, \dots, z_r) = X_{\sigma_n}(t) \end{gathered} \tag{1.9}$$

Так как функции $F_j(z_1, z_2, \dots, z_r)$ будут линейными функциями своих аргументов, то уравнения (1.9) можно переписать так:

$$\dot{z}_j + \sum_{k=1}^{r} a_{jk} z_k = X_j(t) \qquad (j = 1, \dots, r) \tag{1.10}$$

Заметим, что в уравнениях (1.10)

$$X_\mu(t) \equiv 0 \ \text{при} \ \mu \neq \sigma_l \qquad (l = 1, \dots, n) \tag{1.11}$$

Система скалярных уравнений (1.10) эквивалентна матричному уравнению

$$\dot{z} + az = X(t) \tag{1.12}$$

где

$$z = \| z_j \|, \qquad a = \| a_{jk} \|, \qquad X(t) = \| X_j(t) \| \tag{1.13}$$

Решение уравнений (1.12) можно получить при помощи методов операционного исчисления. Полагая

$$\zeta(p) \,\dot{\to}\, z(t), \qquad \Xi(p) \,\dot{\to}\, X(t) \tag{1.14}$$

и, учитывая, что $p\zeta(p) - pz(0) \,\dot{\to}\, \dot{z}(t)$, получим, в соответствии с (1.12), следующее уравнение в изображениях

$$\varphi(p)\zeta(p) = pz(0) + \Xi(p) \tag{1.15}$$

где

$$\varphi(p) = pE + a \tag{1.16}$$

а через E обозначена единичная матрица.

Обозначая через $\Phi(p)$ присоединенную матрицу для матрицы $\varphi(p)$, а через $\Delta(p)$ — определитель матрицы $\varphi(p)$, получим из (1.15)

$$\zeta(p) = \frac{p\Phi(p)}{\Delta(p)} z(0) + \frac{\Phi(p)\,\Xi(p)}{\Delta(p)} \tag{1.17}$$

Обозначим через $N(t)$ оригинал для следующего изображения

$$\frac{p\Phi(p)}{\Delta(p)} \,\dot{\to}\, N(t) \tag{1.18}$$

Функция $N(t)$ будет матрицей типа $r \times r$

$$N(t) = \| N_{jk}(t) \| \tag{1.19}$$

Элементы матрицы $N(t)$ имеют вид [3]

$$N_{jk}(t) = \sum_{\sigma}{}' \frac{e^{\varkappa_\sigma t}}{(q_\sigma - 1)!} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_\sigma - 1} \frac{\Phi_{jk}(p)}{\Delta_\sigma(p)} \right]_{p=\varkappa_\sigma} +$$

$$+ 2 \sum_{h}{}' \frac{e^{\varepsilon_h t}}{(q_{s'+h} - 1)!} \left\{ \operatorname{Re} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_{s'+h} - 1} \frac{\Phi_{jk}(p)}{\Delta_{s'+h}(p)} \right]_{p=\varepsilon_h + i\omega_h} \cos \omega_h t - \right.$$

$$\left. - \operatorname{Im} \left[\left(t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_{s'+h} - 1} \frac{\Phi_{jk}(p)}{\Delta_{s'+h}(p)} \right]_{p=\varepsilon_h + i\omega_h} \sin \omega_h t \right\} \tag{1.20}$$

Здесь $\varkappa_\sigma (\sigma = 1, \ldots, s')$ и $\varepsilon_h \pm i\omega_h (h = 1, \ldots, s'')$, где $s' + 2s'' = r$,— корни характеристического уравнения

$$\Delta(p) = 0 \tag{1.21}$$

Кратности корней обозначены через q_σ и $q_{s'+h}$ соответственно. Через $\Delta_\sigma(p)$ и $\Delta_{s'+h}(p)$ обозначены полиномы

$$\Delta_\sigma(p) = \frac{\Delta(p)}{(p - \varkappa_\sigma)^{q_\sigma}}, \qquad \Delta_{s'+h}(p) = \frac{\Delta(p)}{(p - \varepsilon_h - i\omega_h)^{q_{s'+h}}} \tag{1.22}$$

Штрихи у знаков сумм в выражении (1.20) указывают, что слагаемое под знаком суммы относится не к отдельному корню, а ко всей группе совпадающих между собой корней характеристического уравнения (1.21). На основании теоремы об умножении изображений, в соответствии с (1.18) и (1.14), будем иметь

$$\frac{\Phi(p)\,\Xi(p)}{\Delta(p)} \risingdotseq \int_0^t N(t - \tau)\, X(\tau)\, d\tau \tag{1.23}$$

Таким образом, согласно (1.17), (1.18) и (1.23) решение матричного дифференциального уравнения (1.12) будет следующим:

$$z(t) = N(t)\, z(0) + \int_0^t N(t - \tau)\, X(\tau)\, d\tau \tag{1.24}$$

Так как функции $X_\mu(t)$, у которых $\mu \neq \sigma_l$ $(l = 1, \ldots, n)$, тождественно равны нулю, то элементы матрицы z будут

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t)\, z_k(0) + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} N_{j\sigma_i}(t - \tau)\, X_{\sigma_i}(\tau)\, d\tau \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.25}$$

или, в соответствии с (1.7) (1.26)

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t)\, z_k(0) + \int_0^t \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} N_{j\sigma_i}(t - \tau) \frac{B_{li}}{\Delta^*} x_l(\tau)\, d\tau \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

Обозначая через $W_{jl}(t)$ функцию веса системы по координате z_j для воздействия x_l

$$W_{jl}(t) = \sum_{i=1}^{n} N_{j\sigma_i}(t) \frac{B_{li}}{\Delta^*} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, r \\ l = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

представим общее решение уравнений (1.10) в таком виде

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t)\, z_k(0) + \sum_{l=1}^{n} \int_0^t W_{jl}(t - \tau)\, x_l(\tau)\, d\tau \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.28}$$

Перейдем к вопросу об определении положения системы в фазовом пространстве в условиях, когда закон, по которому изменяются внешние силы $x_l(t)$ $(l = 1, \ldots, n)$ известен, а начальные значения фазовых координат $z_k(0)$ $(k = 1, \ldots, r)$ неизвестны.

Предположим при этом, что измерению доступна лишь одна фазовая координата z_s, причем положение начала отсчета неизвестно.

Выбирая новое произвольное начало отсчета и фиксируя его, измерим отклонения $S(t_1)$, $S(t_2), \ldots, S(t_{r+1})$ фазовой координаты z_s относительно нового начала отсчета в некоторые моменты времени $t_1, \ldots, t_{r+1}$.

Так как

$$S(t_i) = S^* + z_s(t_i) \qquad (i = 1, \ldots, r+1) \tag{1.29}$$

где S^* — отклонение нового начала отсчета относительно исходного начала отсчета, то, обозначая

$$S(t_{\mu+1}) - S(t_\mu) = L_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, r) \tag{1.30}$$

придем к следующим, не содержащим S^*, соотношениям между приращениями фазовой координаты z_s и результатами измерений L_μ

$$z_s(t_{\mu+1}) - z_s(t_\mu) = L_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, r) \tag{1.31}$$

Подставляя в (1.31) значения $z_s(t_{\mu+1})$ и $z_s(t_\mu)$, согласно (1.28), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно начальных значений $z_k(0)$ фазовых координат

$$\sum_{k=1}^{r} [N_{sk}(t_{\mu+1}) - N_{sk}(t_\mu)]\, z_k(0) = \qquad (\mu = 1, \ldots, r) \tag{1.32}$$

$$= L_\mu - \sum_{l=1}^{n} \int_0^{t_{\mu+1}} W_{sl}(t_{\mu+1} - \tau)\, x_l(\tau)\, d\tau + \sum_{l=1}^{n} \int_0^{t_\mu} W_{sl}(t_\mu - \tau)\, x_l(\tau)\, d\tau$$

Определив из (1.32) начальные значения $z_k(0)$ фазовых координат, можно, согласно (1.28), найти значения фазовых координат $z_j(t)$ для любого момента времени t.

2. Нестационарные системы. Уравнения движения нестационарной управляемой системы

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\, y_k = x_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

отличаются от уравнений (1.1) лишь тем, что коэффициенты полиномов $f_{jk}(D)$ будут не постоянными величинами, а некоторыми заданными функциями времени. Фазовые координаты z_j, определяемые соотношениями (1.5), будут теперь удовлетворять системе дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{z}_j + \sum_{k=1}^{r} a_{jk}(t)\, z_k = X_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.2}$$

которую можно получить аналогично (1.10).

Решение системы уравнений (2.2) имеет вид [4]

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, 0)\, z_k(0) + \sum_{l=1}^{n} \int_0^{t} W_{jl}(t, \tau)\, x_l(\tau)\, d\tau \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.3}$$

Здесь

$$W_{jl}(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}N_{j\sigma_i}(t,\tau)\frac{B_{li}(\tau)}{\Delta^*(\tau)}\qquad\begin{pmatrix}j=1,\ldots,r\\ l=1,\ldots,n\end{pmatrix}\tag{2.4}$$

а $N_{jk}(t,\tau)$ — элементы матрицы $N(t,\tau)=\theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, где $\theta(t)$ — фундаментальная матрица ($\theta^{-1}(t)$ — обратная матрица) однородного матричного уравнения, которое можно получить из (2.2) при $X_j(t)\equiv 0$ $(j=1,\ldots,r)$.

Аналогично системе (1.32) для определения начальных значений $z_k(0)$ фазовых координат по результатам описанных выше измерений будем иметь следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{r}[N_{sk}(t_{\mu+1},0)-N_{sk}(t_\mu,0)]z_k(0)=L_\mu-\sum_{l=1}^{n}\int_0^{t_{\mu+1}}W_{sl}(t_{\mu+1},\tau)x_l(\tau)\,d\tau+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}\int_0^{t_\mu}W_{sl}(t_\mu,\tau)x_l(\tau)\,d\tau\qquad(\mu=1,\ldots,r)\tag{2.5}$$

Для определения входящих в уравнения (2.5) функций $W_{sl}(t_\zeta,\tau)$, где t_ζ — некоторая фиксированная величина, должны быть, как видно из (2.4), известны функции $N_{s\xi}(t_\zeta,\tau)$, представляющие собой элементы матричной функции веса $N(t,\tau)$ для значения $t=t_\zeta$. Как известно

$$N_{s\xi}(t_\zeta,\tau)=Z_\xi(\tau)\tag{2.6}$$

где $Z_\xi(\tau)$ — интегралы построенной для системы (2.2) сопряженной системы уравнений

$$\frac{dZ_\xi}{d\tau}-\sum_{k=1}^{r}a_{k\xi}(\tau)Z_k=0\qquad(\xi=1,\ldots,r)\tag{2.7}$$

принимающие при $t=t_\zeta$ следующие значения:

$$Z_s(t_\zeta)=1,\quad Z_k(t_\zeta)=0\qquad(k=1,\ldots,s-1,s+1,\ldots,r)\tag{2.8}$$

Таким образом, для определения, входящих в уравнения (2.5) величин $N_{sk}(t_{\mu+1},0)$, $N_{sk}(t_\mu,0)$ и функций $W_{sl}(t_{\mu+1},\tau)$, $W_{sl}(t_\mu,\tau)$ $(\mu=1,\ldots,r)$. необходимо проинтегрировать систему уравнений (2.7) $r+1$ раз, полагая в условиях (2.8), соответственно, $t_\zeta=t_1,\ldots,t_{r+1}$.

По нахождении из (2.5) начальных значений $z_k(0)$ фазовых координат можно, согласно (2.3), определить положение системы в фазовом пространстве для любого наперед заданного момента времени t^*, что потребует предварительного вычисления функций веса $N_{jk}(t^*,\tau)$ для значений $j=1,\ldots,r$, для чего придется проинтегрировать систему уравнений (2.7) r раз, полагая в условиях (2.8) $t_\zeta=t^*$, а $s=1,\ldots,r$, соответственно. Из изложенного вытекает также и метод решения рассматриваемой задачи при помощи электронных вычислительных устройств.

Поступила 27 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R. Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957.
2. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. Усп. матем. наук, 1959, т. XIV, вып. I, стр. 3.
3. Булгаков Б. В. Колебания. Гостехиздат, 1949, т. I, стр. 164.
4. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи теории динамического программирования. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4, стр. 656.