Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ЗАДАЧЕ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ КОНСТРУИРОВАНИИ РЕГУЛЯТОРОВ

Ф. М. Кириллова

(Свердловск)

Даются необходимые и достаточные условия, при которых возможна стабилизация линейной системы при условии минимума интегральной средне-квадратической ошибки (относительно любых начальных возмущений). Выясняется многообразие начальных данных, для которых система может быть оптимально стабилизирована, если эти условия невыполнены.

1. Пусть система регулирования описывается уравнениями

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + b_k u \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где x_k — фазовые координаты, a_{kj}, b_k — постоянные параметры, u — вырабатываемое в регуляторе управляющее воздействие. Для системы (1.1) будем также применять матричную форму записи

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu$$

Предположим, что в начальный момент $t_0 = 0$ координаты системы $x(0) = x_0$. В качестве критерия оптимальности будем рассматривать функционал [1],

$$J(u) = \int_0^\infty V(u)\,dt, \qquad \left(V(u) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 + cu^2\right) \tag{1.2}$$

Здесь V — определенно-положительная форма. Требуется выбрать управление $u(x)$ так, чтобы функционал (1.2) достиг минимально возможного значения. Решение такой задачи — оптимальное управление $u_0 = u_0(x)$ делает систему (1.1) асимптотически устойчивой и обеспечивает минимальную интегральную ошибку $J(u_0)$ по отклонению траектории $x(t)$. Мы требуем отыскания управления не в виде функции времени t, а в виде функции координат системы $x_1, \ldots, x_n$. Это и есть задача об аналитическом конструировании регуляторов, которая рассматривалась в работах А. М. Летова [1]. Цель настоящей заметки — выяснить условия, при которых данная задача резрешима.

2. Рассмотрим вопрос о существовании для системы (1.1) допустимого управления.

Определение (2.1). Функцию $u(t)$ будем называть допустимым управлением, если $u(t)$ удовлетворяет неравенству $J(u) < +\infty$.

Введем обозначения. Если B — матрица порядка $(n \times n)$, c—n-мерный вектор, то символом $(Bc)_i$ будем обозначать i-тую компоненту их произведения. Пусть также символ $(a \cdot b)$ означает скалярное произведение векторов a и b.

Предположим сначала, что векторы

$$b,\ Ab,\ \ldots,\ A^{n-1}b \tag{2.1}$$

линейно независимы. В этом случае для любого начального условия x_0 можно построить допустимое управление.

В самом деле, если x_0 — фиксированная точка, то каково бы ни было $t > 0$, существует число $N(x_0, t)$ такое, что

$$\min_{(l\cdot x_0)=-1} \int_0^t (l \cdot F^{-1}(\tau)\, b)^2\, d\tau > \frac{1}{N^2(x_0, t)}, \qquad \sum_{i=1}^n l_i^2 \neq 0$$

Здесь $F(\tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (1.1), где положено $u \equiv 0$. Это означает [2] (стр. 629), что существует управление $u_1(\tau)$, которое переводит точку x_0 в начало координат за время $\tau = t$, причем

$$\int_0^t u_1^2(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{1}{N^2(x_0, t)}$$

Полагая

$$u^*(\tau) = \begin{cases} u_1(\tau) & (0 \leqslant \tau \leqslant t) \\ 0 & (t < \tau) \end{cases}$$

и вычисляя $J(u^*)$, приходим к заключению, что $u^*(\tau)$ — допустимое управление.

Пусть теперь среди векторов (2.1) только k линейно независимых $k < n$). Нетрудно видеть, что этим свойством обладают первые k векторов. Дополним систему

$$b,\ Ab, \ldots, A^{k-1}b \tag{2.2}$$

такими векторами $c^{(k+1)}, \ldots, c^{(n)}$, чтобы векторы

$$b,\ Ab, \ldots, A^{k-1}b,\ c^{(k+1)}, \ldots, c^{(n)}$$

образовали базис, и сделаем замену $x = Dy$, где матрица D имеет вид

$$D = \begin{Vmatrix} b_1 & (Ab)_1 & \ldots & (A^{k-1}b)_1 & c_1^{(k+1)} & \ldots & c_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & (Ab)_n & \ldots & (A^{k-1}b)_n & c_n^{(k+1)} & \ldots & c_n^{(n)} \end{Vmatrix}$$

Так как $A^k b$ выражается линейно через векторы системы (2.2)

$$A^k b = \mu_0 b + \mu_1 Ab + \ldots + \mu_{k-1} A^{k-1} b, \quad \sum_{i=0}^{k-1} \mu_k^2 \neq 0$$

то после элементарных преобразований получаем

$$\frac{dy_1}{dt} = \mu_0 y_k + u, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_1 + \mu_1 y_k, \quad \ldots, \quad \frac{dy_k}{dt} = y_{k-1} + \mu_{k-1} y_k \tag{2.3}$$

$$\frac{dy_{k+1}}{dt} = \alpha_{k+1,k+1} y_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+1,n} y_n, \cdots, \quad \frac{dy_n}{dt} = \alpha_{n,k+1} y_{k+1} + \cdots + \alpha_{nn} y_n$$

В этих уравнениях элементы α_{ij} определяются формулами

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^n D_{mi} (Ac^{(j)})_m$$

Здесь Δ — определитель матрицы D, а D_{mi} — алгебраическое дополнение ее элемента d_{mi}.

Из уравнений (2.3) следует, что управление u действует лишь на первые k координат; координаты $y_{k+1}, \ldots, y_n$ от u не зависят.

Введем в рассмотрение матрицу

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & \mu_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \mu_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots 1 & \mu_{k-1} \end{Vmatrix}$$

и обозначим k-мерный вектор $(1, 0, \ldots, 0)$ через b^*. Очевидно, векторы

$$b^*, \quad A_1 b^*, \ldots, A_1^{k-1} b^* \tag{2.4}$$

линейно независимы. Значит, для каждой точки подпространства $\{y_1, , \ldots, y_k\}$ существует допустимое управление. Вопрос о существовании допустимого управления для точек пространства $\{x_1, \ldots, x_n\}$ решается свойствами матрицы

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{k+1,\, k+1} & \ldots & \alpha_{k+1,\, n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n,\, k+1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

Если корни λ_i характеристического уравнения матрицы (2.5) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-k) \tag{2.6}$$

то для любого начального состояния системы (1.1) можно построить допустимое управление.

Действительно, в силу линейной независимости векторов (2.4) для каждой точки $(y_1^\circ, \ldots, y_k^\circ)$ подпространства $\{y_1, \ldots, y_k\}$ можно построить допустимое управление $u^*(\tau)$. А так как по предположению $\lim y_i = 0$ $(i = k+1, \ldots, n)$ при $t \to \infty$, то функция $u^*(\tau)$ является допустимым управлением и для точки $(y_1^\circ, \ldots, y_k^\circ, y_{k+1}, \ldots, y_n)$.

Пусть только m корней характеристического уравнения матрицы (2.5) удовлетворяют условию (2.6). В этом случае множество начальных данных системы (1.1), для которых существует допустимое управление, является подпространством $k+m$-го измерения.

В самом деле, начальные значения асимптотически устойчивых интегральных кривых уравнений (2.3) заполняют подпространство m-го измерения. Обозначим это подпространство через $\{y_s, \ldots, y_{s+m}\}$, $s > k$.

Нетрудно видеть, что прямая сумма подпространств

$$\{y_1, \ldots, y_k\} \text{ и } \{y_s, \ldots, y_{s+m}\}$$

состоит из точек, для которых можно построить допустимое управление $u^*(\tau)$. Как и выше, функция $u^*(\tau)$ является допустимым управлением для точки $(y_1, \ldots, y_k)$.

Справедливы и обратные утверждения.

Если допустимое управление существует для любого начального состояния системы (1.1), то или векторы (2.1) линейно независимы, или при некотором $k < n$ линейно независимы векторы (2.2) и матрица (2.5) удовлетворяет условию (2.6).

Если множество начальных данных, для которых можно построить допустимое управление, является подпространством k-го измерения, то или векторы (2.2) линейно независимы и корни характеристического уравнения матрицы (2.5) удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1,\ldots,n-k)$, или среди векторов (2.2) только k_1 линейно независимых $(k_1 < k)$ и $k - k_1$ корней характеристического уравнения матрицы (2.5) обладают свойством (2.6).

Эти утверждения следуют из предыдущих рассуждений.

Когда построено допустимое управление $u^*(\tau)$ — функция времени, можно утверждать, что существует допустимое управление, как функция координат системы, то есть $u^*(\tau) = u(x(\tau))$. Заметим при этом, что, если допустимое управление $u(x)$ существует для начального условия $x(0) = x_0$, то допустимое управление существует также для некоторой области начальных данных; а именно, оно существует для точек $x(x_0, u^*, t)$ траектории системы (1.1), где положено $u = u^*(\tau)$, $t > 0$.

3. Докажем, что справедлива

Теорема 3.1. Если для области G_0 начальных данных x_0 существует допустимое управление $u(x)$, то для области G_0 оптимальное управление $u_0(x)$ также существует и имеет вид

$$u_0(x) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \tag{3.1}$$

Здесь p_i — некоторые постоянные величины, определяемые принятым функционалом и параметрами системы.

Доказательство. Воспользуемся результатами работы [3], (стр. 248). Согласно этой работе минимизация функционала (1.2) приводит к решению следующей вариационной задачи. Определить

$$\min_u \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M(x)}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} + V(u)\right] = 0 \qquad (M(x_0) = \min_u J(u),\ x_0 \in G_0) \tag{3.2}$$

причем оптимальное управление u_0 — решение задачи (3.2).

Следовательно, оптимальное управление удовлетворяет уравнениям

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial M(x)}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + b_k u\right) + a_k x_k^2\right] + cu^2 = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial M(x)}{\partial x_k} b_k + 2cu = 0 \tag{3.3}$$

В рассматриваемом случае $V(u)$ — определенно положительная форма. Поэтому, если удастся найти определенно положительную квадратичную форму $M(x)$ и управление

$$u_0 = -\frac{1}{2c}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial M(x)}{\partial x_k} b_k = \sum_{k=1}^{n} p_i x_i$$

которые являются решением задачи (3.2), то

$$[M(x)]_{t=0} = \min_u J(u) = J(u_0)$$

Действительно, из (3.3) имеем

$$\frac{dM(x)}{dt} = -V(u) \tag{3.4}$$

Это значит, что для системы (1.1) существует определенно положительная форма $M(x)$, полная производная которой по времени в силу (1.1) есть функция определенно отрицательная.

По теореме Ляпунова [4], (стр. 32) система (1.1) асимптотически устойчива; поэтому $M(x) = 0$ при $t = +\infty$.

Следовательно, при интегрировании (3.4) по t от 0 до $+\infty$ имеем

$$[M(x)]_{t=0} = \int_0^\infty V(u_0)\,dt$$

Предположим, что для некоторого начального условия x_0 минимум функционала (1.2) достигается при управлении $u^*(x) \neq u_0(x)$, то есть

$$J(u_0) > J(u^*) \tag{3.5}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{dM(x)}{dt} + V(u^*) \geqslant 0$$

Поэтому $[M(x)]_{t=0} = J(u_0) \leqslant J(u^*)$, что противоречит (3.5).

Значит, существование оптимального управления будет доказано, если мы покажем, что существует определенно положительная квадратичная форма $M(x)$ и линейная функция $u = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$, которые удовлетворяют условию (3.2). Введем вспомогательную систему

$$\frac{dx_k}{dt} = \theta \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \theta b_k\xi + (1-\theta)\,u_k - (1-\theta)\,x_k \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{3.6}$$

где θ — положительный параметр, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Пусть требуется выбрать $u_1, \ldots, u_n, \xi$ так, чтобы функционал

$$J^{(1)}(u,\xi) = \int_0^\infty V^{(1)}(u,\xi)\,dt = \int_0^\infty \Big[\sum_{k=1}^{n} (a_kx_k^2 + (1-\theta)\,u_k^2) + \theta c\xi^2\Big]dt$$

достиг минимально возможного значения.

Система (3.6) при любом значении параметра $\theta \geqslant 0$ имеет допустимое управление для каждого начального состояния, если допустимое управление существует для первоначальной системы (1.1). При $\theta = 1$ система (3.6) превращается в систему (1.1).

Пусть $x_0 \in G_0$. Мы покажем, что для уравнений (3.6) оптимальное управление существует при значении θ из промежутка $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

В самом деле, при $\theta = 0$ из (3.6) получаем

$$\frac{dx_k}{dt} = -x_k + u_k \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{3.7}$$

Так как управление u_k действует лишь на координату x_k, то вместо того, чтобы минимизировать функционал $J^{(1)}(u,\xi)$, будем искать минимум отдельно по каждому k для выражений

$$\int_0^\infty (a_kx_k^2 + u_k^2)\,dt$$

Из уравнений (3.3) имеем

$$a_kx_k^2 + u_k^2 + \frac{\partial M(x)}{\partial x_k}(-x_k + u_k) = 0, \qquad 2u_k + \frac{\partial M(x)}{\partial x_k} = 0$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial M(x)}{\partial x_k}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial M(x)}{\partial x_k}\right)x_k - 4a_kx_k^2 = 0$$

Значит,

$$u_k = (1 \pm \sqrt{1+a_k})\,x_k$$

Так как оптимальное управление u_k° должно делать систему (3.7) асимптотически устойчивой, то

$$u_k^\circ = (1 - \sqrt{1 + a_k})\, x_k \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

Запишем уравнения (3.3) для системы (3.6)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_k}\Big[\theta \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \theta b_k\xi - (1-\theta)\, x_k + (1-\theta)\, u_k\Big] + V^{(1)}(u, \xi) = 0$$

$$2u_k + \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n), \qquad 2\xi c + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_k} b_k = 0$$

Отсюда для определения функции $M^{(1)}(x)$ получаем соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_k}\Big[\theta \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \theta b_k\xi - (1-\theta)\, x_k + (1-\theta)\, u_k + $$
$$+ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 + \frac{\theta}{4}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_k} b_k\Big)^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_k}\Big)^2 = 0 \tag{3.9}$$

Предположим, что решение задачи (3.2) даст некоторая определенно положительная форма

$$M^{(1)}(\theta, x) = \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}(\theta)\, x_i x_j, \qquad (b_{ij} = b_{ji}) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

и управления

$$u_k^\circ(\theta, x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial M^{(1)}(\theta, x)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)}(\theta)\, x_i$$

$$\xi^\circ(\theta, x) = -\frac{1}{2c} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M^{(1)}(\theta, x)}{\partial x_k} b_k = \sum_{k=1}^{k} p_i(\theta)\, x_i \tag{3.10}$$

где $p_i^{(k)}(\theta)$ и $p_i(\theta)$ при фиксированном θ — постоянные величины.

Продифференцируем (пока формально) (3.9) по θ; получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial M^{(1)}}{\partial \theta}\Big[\theta \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \theta\xi b_k - (1-\theta)\, x_k + (1-\theta)\, u_k\Big] = \tag{3.11}$$
$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_k}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + x_k\Big) - \frac{1}{4}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_k} b_k\Big)^2 - \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_k}\Big)^2\Big]$$

Законность операции дифференцирования будет обоснована, если из (3.11) удастся определить коэффициенты формы $\partial M^{(1)}(\theta, x) / \partial\theta$. Для решения этой задачи следует подставить в (3.11) форму $M^{(1)}(\theta, x)$ и приравнять коэффициенты при одинаковых членах x_i, $x_i x_j$. Покажем, что таким путем действительно для коэффициентов формы $\partial M^{(1)}(\theta, x) / \partial\theta$ получаются уравнения, имеющие однозначное решение $db_{ij}(\theta) / dt$. Обозначим якобиан системы уравнений для определения $db_{ij}(\theta) / d\theta$, полученной из (3.11), через $W(\theta)$.

Если при некотором значении $\theta \geqslant 0$ задача (3.2) имеет своим решением форму $M^{(1)}(\theta, x)$, тогда правая часть соотношения (3.11) является некоторой квадратичной формой. Левая же часть (3.11) есть полная производная функции $\partial M^{(1)}(\theta, x) / \partial\theta$, вычисленная в силу уравнений (3.6) при рассматриваемом значении θ. Так как $M^{(1)}(\theta, x)$ — определенно положительная форма и при управлениях (3.10) вследствии (3.9) производная ее $dM^{(1)}(\theta, x) / dt$ определенно отрицательная квадратичная форма, то система (3.6) при данном θ асимптотически устойчива. Поэтому [4], (стр. 61), коэффициенты $db_{ij}(\theta)/d\theta$ для $\partial M^{(1)}(\theta, x)\partial\theta$ могут быть однозначно определены из (3.11), как некоторые функции от $b_{ij}(\theta), i, j = 1, \ldots, n$, и параметра θ:

$$\frac{db_{ij}(\theta)}{d\theta} = \Phi_{ij}(b_{s,e}(\theta), \theta), \qquad (s, e = 1, \ldots, n) \tag{3.12}$$

Исходя из соотношения (3.11), можно показать, что функции Φ_{ij} зависят непрерывно от b_{ij} и θ при всех тех значениях b_{ij} и θ, когда якобиан $W(\theta)$ неравен нулю. Это дает возможность определить коэффициенты $b_{ij}(\theta)$ при значениях параметра из всего рассматриваемого промежутка $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. В соответствии с выше сказанным для этого достаточно показать, что якобиан $W(\theta)$ отличен от нуля, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, и что ни при каких i, j и θ_1 невозможны соотношения

$$\lim b_{ij}(\theta) = \infty \quad \text{при } \theta \to \theta_1 - 0 \tag{3.13}$$

Рассмотрим решение системы (3.12) с начальным условием $\theta = 0$, $b_{ij}(0)$ (коэффициенты $b_{ij}(0)$ для $M^{(1)}(0, x)$ вполне определяются формулами (3.8)). Это решение существует по крайней мере в достаточно малой окрестности $0 \leqslant \theta \leqslant \mu$ точки $\theta = 0$. Наша задача — показать, что оно может быть продолжено для всех θ из промежутка $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Выберем допустимое управление $u(\theta, x)$, $\xi(\theta, x)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$J^{(1)}(u(\theta, x),\ \xi(\theta, x)) \leqslant E, \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1) \tag{3.14}$$

где $E = \text{const} > 0$. Такой выбор допустимого управления возможен на основании результатов § 2 настоящей статьи и условия теоремы.

Предположим, что решение уравнений (3.12) продолжаемо лишь в окрестности $0 \leqslant \theta < \theta_1 < 1$ точки $\theta = 0$. Это может произойти в двух случаях. Именно: если при $\theta \to \theta_1 - 0$ система (3.6) теряет асимптотическую устойчивость, и, значит, коэффициенты $\partial M^{(1)}(\theta, x)/\partial\theta$, вообще говоря, нельзя определить в виде (3.12) при $\theta = \theta_1$, или если при $\theta \to \theta_1 - 0$ имеют место равенства (3.13).

Рассмотрим первый случай. Тогда форма $M^{(1)}(\theta, x)$ должна терять свойство определенной положительности при $\theta \to \theta_1 - 0$. Это невозможно, так как $M^{(1)}(\theta, x)$ доставляет минимум для (1.2), то есть первый случай отпадает. Если бы имели место равенства 3.13, то при θ, достаточно близких к θ_1, мы имели бы

$$J^{(1)}(u^\circ(\theta, x),\ \xi^\circ(\theta, x)) > E$$

что невозможно в силу того, что допустимое управление $u(\theta, x)$, $\xi(\theta, x)$ удовлетворяет неравенству (3.14). Теорема доказана.

Автор выражает признательность Н. Н. Красовскому за ценные советы.

Поступила 13 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов (I, II, III), Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 4, 5, 6.
2. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования, ПММ. 1959, т. XXIII, вып. 4.
3. Bellman R. Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, М.— Л., 1952.