Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Н. Н. Красовский, Э. А. Лидский

(Свердловск)

Рассматривается задача о выборе закона регулирования в системе, регулируемый объект которой подвержен случайным изменениям. Управляющее воздействие ξ формируется при условии минимума интегральной оценки качества, включающей заданную функцию от рассогласований координат x_i, от величины ξ и от скорости $\dot\xi$ изменения ξ в переходном процессе. Задача изучается на основе метода функций Ляпунова [1, 2], модифицированного в соответствии с принципами динамического программирования [3, 4]. Результаты обобщают исследования [5] на случай стохастических систем.

§ 1. Предварительные замечания. Рассмотрим регулируемую систему, в которой переходный процесс описывается стохастическими дифференциальными уравнениями возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i[x_1, \ldots, x_n, \xi, \eta(t)] \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь x_i — отклонения действительных значений координат регулируемой векторной величины от их предписанных (невозмущенных) значений $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, ξ — управляющее воздействие, вырабатываемое в регуляторе. Особенностью системы является то, что в процессе регулирования она подвержена случайным изменениям. В уравнении (1.1) это учитывается введением в число аргументов функций f_i случайной переменной $\eta(t)$.

Будем предполагать, что f_i — известные непрерывные функции своих аргументов, удовлетворяющие условиям Липшица в некоторой области G пространства $\{x, \xi, \eta\}$, $f_i[0, \ldots, 0, \eta(t)] = 0$, а переменная $\eta(t)$ описывает марковский случайный процесс [6] (стр. 79). В этом случае при известном правиле построения управления ξ в регуляторе уравнения (1.1) описывают случайный переходный процесс $x(t)$.

Правила формирования ξ в регуляторе будем определять из условия

$$J = \int_0^\infty M\{\omega[x_1(t), \ldots, x_n(t), \xi(t), \dot\xi(t)]\}\, dt = \min \tag{1.2}$$

где символ M обозначает математическое ожидание случайной величины ω, являющейся заданной неотрицательной функцией своих аргументов. Поскольку в условия (1.2) входит величина $\dot\xi$, будем искать уравнение оптимального регулятора в форме[1]

$$\dot{\xi} = \zeta[x_1, \ldots, x_n, \xi, \eta] \tag{1.3}$$

Целью настоящей статьи является исследование задачи об определении функции ζ, обеспечивающей устойчивость невозмущенного движения $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и минимизирующей величину (1.2).

§ 2. Постановка задачи. Обозначим символом $P[Q/L]$ вероятность события Q при условии L, символом $\boldsymbol{M}\{\omega/L\}$ — математическое ожидание случайной величины ω при условии L, символ $o(\Delta t)$ будет обозначать бесконечно малую более высокого порядка, чем Δt (малую величину Δt всегда будем предполагать положительной).

Опишем статистические свойства случайного аргумента $\eta(t)$. Ограничимся в этой статье случаем, когда можно указать две функции $q(\alpha)$ и $q(\alpha, \beta)$, описывающие изменения $\eta(t)$ во времени и имеющие следующий смысл [6] (стр. 231—245):

$$P[\eta(t + \Delta t) = \alpha / \eta(t) = \alpha] = 1 - q(\alpha)\Delta t + o(\Delta t) \tag{2.1}$$

$$P[\eta(t + \Delta t) = \beta, \eta(t + \Delta t) \neq \alpha / \eta(t) = \alpha] = q(\alpha, \beta)\Delta t + o(\Delta t) \tag{2.2}$$

$$(\alpha, \beta = 1, \ldots, m + 1)$$

т. е. вероятность сохранения значения $\eta(t)$ постоянным $(\eta(t) = \alpha)$ на малом интервале Δt приближенно равна $1 - q(\alpha)\Delta t$, а вероятность одной смены значения $\eta(t) = \alpha \to \eta(t + \Delta t) = \beta$ на этом интервале приближенно равна $q(\alpha, \beta)\Delta t$.

В соответствии с [6] (стр. 242) будем предполагать, что реализациями случайного процесса $\eta(t)$ являются ступенчатые функции $\eta^{(p)}(t)$ (за исключением множества реализаций нулевой вероятности, чем в дальнейшем всегда будем пренебрегать).

Если функция ζ в уравнениях (1.3) выбрана (непрерывна и удовлетворяет, например, условиям Липшица по x_i, ξ в области G допустимых отклонений x_i, ξ, η), то для каждой реализации $\eta^{(p)}(t)$ и для каждого начального условия $\{x_{i0}, \xi_0, t = t_0\}$ уравнения (1.1), (1.3) определяют непрерывную реализацию $x^{(p)}(x_0, \xi_0, t_0, t, \eta^{(p)})$, $\xi^{(p)}(x_0, \xi_0, t_0, t, \eta^{(p)})$ случайного решения $x(t)$, $\xi(t)$, описывающего переходный процесс в системе. Если этот случайный процесс рассматривать в пространстве $\{x_1, \ldots, x_n, \xi, \eta\}$, то он оказывается марковским случайным процессом. Будем обозначать символом $\{x(t), \xi(t), \eta(t)\} / x_0, \xi_0, \eta_0, t_0$ марковскую случайную вектор-функцию, порожденную начальными условиями $x_i = x_{i0}$, $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ при $t = t_0$ и являющуюся при $t \geqslant t_0$ решением уравнений (1.1), (1.3) в определенном выше смысле. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что функции f_i и ζ определены во всем пространстве $\{x, \xi\}$ (область G: $\{-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$, $-\infty < \xi < \infty$, $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2\}$).

---

[1] Если в левую часть (1.2) величина $\dot{\xi}$ не входит, то уравнение для ξ целесообразно искать в форме идеального регулятора $\xi = \xi[x_1, \ldots, x_n, \eta]$. В число аргументов функции ζ (1.3) входит η. Это означает, что предполагается возможность измерения реализовавшихся значений $\eta(t)$ и передачи соответствующего сигнала в регулятор.

Величина (1.2) (теперь в более подробной записи)

$$J_\zeta[x_0, \xi_0, \eta_0] = \int_0^\infty M\{\omega[x(t), \xi(t), \dot{\xi}(t)] / x_0, \xi_0, \eta_0, t_0 = 0\}\, dt \tag{2.3}$$

при наших предположениях будет функцией от начальных условий x_0, ξ_0, η_0, $t_0 = 0$ (когда функция ζ в (1.3) фиксирована). Эту величину следует рассматривать также, как некоторый функционал J_ζ от ζ, поскольку функция ζ определяет по уравнениям (1.1), (1.3) решения $\{x(t), \xi(t), \eta(t)\}$, а поэтому и значение интеграла (2.3).

Задача заключается в определении функции $\zeta^\circ[x, \xi, \eta]$, удовлетворяющей следующим условиям.

Условие 2.1. Невозмущенное движение $x = 0$, $\xi = 0$ при $\zeta = \zeta^\circ$ в уравнениях (1.3) должно быть асимптотически устойчивым по вероятности[1] (определение 1.2 [7] (стр. 810)) относительно любых начальных возмущений x_{i0}, ξ_0.

Условие 2.2. Величина (2.3) должна быть конечной для любых начальных условий и при каждом начальном условии x_{i0}, ξ_0, η_0 должно быть

$$J_{\zeta^\circ}[x_0, \xi_0, \eta_0] = \min_\zeta J_\zeta[x_0, \xi_0, \eta_0] \tag{2.4}$$

по функциям ζ из некоторого определенного класса $\{\zeta\}$ функций. Таким классом в дальнейшем будем иметь множество непрерывных функций ζ, $\zeta[0, 0, \eta] = 0$.

---

[1] Приведем для полноты изложения эти определения.

Определение 2.1. Решение $x = 0$, $\xi = 0$ системы (1.1), (1.3) (невозмущенное движение) будем называть устойчивым по вероятности, если для любых, сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $q > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всякого решения системы (1.1), (1.3), которое в момент времени $t = t_0$ удовлетворяет неравенству $x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 + \xi_0^2 \leqslant \delta^2$ при $t > t_0$, будет выполняться условие

$$P[\varepsilon, t / \delta, t_0] > 1 - q$$

Здесь $P[\varepsilon, t / \delta, t_0]$ — вероятность того, что для момента времени $t > t_0$ выполняется неравенство

$$x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) + \xi^2(t) < \varepsilon^2$$

или неравенство

$$x_1^2(\tau) + \ldots + x_n^2(\tau) + \xi^2(\tau) < \varepsilon^2 \qquad \text{при } t_0 \leqslant \tau < t$$

если предполагать обрыв реализаций $x^{(p)}(t)$, $\xi^{(p)}(t)$ при выходе из ε — окрестности точки $x = 0$, $\xi = 0$.

Определение 2.2. Невозмущенное движение $x = 0$, $\xi = 0$ будем называть асимптотически устойчивым по вероятности, если оно устойчиво в смысле определения 2.1 и, кроме того, при любых $\varepsilon > 0$, $q > 0$ выполняется условие

$$P[x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) + \xi^2(t) < \varepsilon^2 \text{ при } t \geqslant t_0 + T[H_0, \varepsilon, q] /$$
$$/ x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 + \xi_0^2 \leqslant H_0] > 1 - q$$

Здесь H_0 — некоторая постоянная, ограничивающая начальные условия.

В этой статье ограничимся случаем, когда область допустимых отклонений x_{i0}, ξ_0 совпадает со всем пространством $\{x, \xi\}$ (постоянная H_0 может быть любым положительным числом).

Рассматриваемая задача относится к кругу статистических проблем оптимального регулирования (см. например [3, 8, 9]). Сформулированная нами задача обобщает на случай стохастических уравнений (1.1) проблему, изученную в работе [5] для линейных детерминированных систем.

§ 3. Метод решения. Опишем подход к решению задачи, основанный на методе функций Ляпунова. Приложение этого метода к задачам статистической устойчивости описано в статье [7].

В этом параграфе для задачи (2.4) развиваются соображения, намеченные в статьях [9, 10] для задач оптимального быстродействия, причем как и в [9, 10] здесь используются идеи теории динамического программирования [2, 3] (см. также в этой связи статью [5] IV). Предположим, что найдены функции $v^\circ(x_1, \ldots, x_n, \xi, \eta)$, $\zeta[x_1, \ldots, x_n, \xi, \eta]$, удовлетворяющие следующим условиям.

Условие 3.1. Функция $v^\circ(x, \xi, \eta)$ является определенно положительной ([1], стр. 80; [7] стр. 811) при всех x, ξ для тех значений η, которые может принимать случайная переменная $\eta(t)$; функция $v^\circ(x, \xi, \eta)$ допускает бесконечно большой низший предел ([11], стр. 36), т. е.

$$v^\circ(x, \xi, \eta) \geqslant w(x, \xi) > 0 \quad \text{при } \{x, \xi\} \neq 0,$$
$$w(x, \xi) \to \infty \quad \text{при } \{x, \xi\} \to \infty$$

Условие 3.2. Производная [9, 10] $(dM\{v^\circ\}/dt)_{\zeta^\circ}$ в силу уравнений (1.1), (1.3) при $\zeta = \zeta^\circ$ является функцией определенно отрицательной и равной $-\omega[x, \xi, \dot{\xi}]$, т. е. [1]

$$\left(\frac{dM\{v^\circ\}}{dt}\right) = -\omega[x_1, \ldots, x_n, \xi, \zeta^\circ] \tag{3.1}$$

Условие 3.3. Величина $dM\{v^\circ\}/dt + \omega[x, \xi, \zeta]$ достигает минимума при $\zeta = \zeta^\circ$, т. е.

$$\left(\frac{dM\{v^\circ\}}{dt}\right)_{\zeta^\circ} + \omega[x_1,\ldots,x_n, \xi, \zeta^\circ] = \min_{\zeta}\left[\left(\frac{dM\{v^\circ\}}{dt}\right)_{\zeta} + \omega[x_1, \ldots, x_n, \xi, \zeta]\right] \tag{3.2}$$

по ζ из допустимого класса функций $\{\zeta\}$.

Условие 3.4. Функция $v^\circ(x, \xi, \eta)$ допускает бесконечно малый высший предел ([1], стр. 81) и при условии $\omega[x, \xi, \eta] \to 0$ выполняется предельное соотношение $v^\circ[x, \xi, \eta] \to 0$.

Функцию v°, удовлетворяющую условиям 3.1—3.4, будем называть оптимальной функцией Ляпунова задачи (2.4). Функция ζ°, удовлетво-

---

1 В терминах теории вероятностных процессов производная $dM\{v^\circ\}/dt$ определяется бесконечно малым производящим оператором процесса [12]. Эта величина получается следующим образом: точка $x(t) = x$, $\xi(t) = \xi$, $\eta(t) = \eta$ порождает при $\tau > t$ пучок случайных реализаций $\{x(\tau), \xi(\tau), \eta(\tau)\}/x, \xi, \eta, t$; символ $dM\{v^\circ\}/dt$ есть как обычно предел отношения $\Delta M\{v^\circ\}/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, где

$$\Delta M\{v^\circ\} = M\{v^\circ(x(t+\Delta t), \xi(t+\Delta t), \eta(t+\Delta t))/x(t), \xi(t), \eta(t), t\} - \\ - v^\circ(x(t), \xi(t), \eta(t))$$

ряющая условиям 3.2 и 3.3, определяет оптимальный закон управления[1], т. е. при $\zeta = \zeta^\circ$ в уравнениях (1.3) для решений $\{x(t), \xi(t), \eta(t)\}$ выполняются условия 2.1 и 2.2. Действительно, асимптотическая устойчивость решения $x = 0$, $\xi = 0$ по вероятности (2.1) при условиях 3.1, 3.2, 3.4 следует из теорем статьи [7] (стр. 812—820). Эти теоремы доказаны в работе [7] для случайной функции $\eta(t)$ более частного вида, однако рассуждения сохраняют силу и для переменной $\eta(t)$ более общего вида, описанного выше. Доказательство аналогично доказательству, приведенному в статье [7], и мы его здесь повторять не будем. Отметим лишь, что из этого доказательства, наряду с асимптотической устойчивостью в смысле определения 1.2 [7], вытекает также вероятностная устойчивость решения $x = 0$, $\xi = 0$ в следующем смысле: для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $q > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$P\,[x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) + \xi^2(t) < \varepsilon^2 \text{ при } t \geqslant t_0 /$$
$$/\, x_{10}^2 + \ldots + x_{n_0}^2 + \xi_0^2 \leqslant \delta^2] > 1 - q.$$

Наметим доказательство того, что из условий 3.2 и 3.3, 3.4 вытекает выполнение требования 3.2.

Прежде всего из (3.1), усредняя по случайным величинам $\{x(t), \xi(t), \eta(t)\} / x_0, \xi_0, \eta_0, t_0 = 0$, будем иметь равенство

$$\left(\frac{dM\,\{v^\circ(x(t), \xi(t), \eta(t))\}}{dt}\right)_{\zeta^\circ} = M\left\{\left(\frac{dM\,\{v^\circ\}}{dt}\right)_{\zeta^\circ}\right\} = -M\{\omega\,[x(t)\,\xi(t), \zeta^\circ(t)]\} \qquad (3.3)$$

Из равенства (3.3) следует, что величина $M\{v^\circ(x(t), \xi(t), \eta(t))\}$ убывает с ростом t. Интегрируя (3.3) по времени t от $t_0 = 0$ до $t = T$, получим

$$M\{v^\circ(x(T), \xi(T), \eta(T))\}_{\zeta^\circ} - v^\circ(x_0, \xi_0, \eta_0) =$$
$$= -\int_0^T M\{\omega\,[x(t), \xi(t), \dot{\xi} = \zeta^\circ(t)]\}_{\zeta^\circ}\,dt \qquad (3.4)$$

Из равенства (3.4) заключаем, что интеграл в правой части этого равенства сходится при $T \to \infty$. Но это означает вследствие неотрицательности ω, что $\lim M\{\omega\} = 0$ при $t \to \infty$, т. е. по условию 3.4 монотонная функция $M\{v^\circ(x(t), \xi(t), \eta(t))\}$ имеет при $T \to \infty$ пределом число нуль[2].

Поэтому из (3.4) следует равенство

$$v^\circ(x_0, \xi_0, \eta_0) = \int_0^\infty M\{\omega\,[x(t), \xi(t), \dot{\xi}(t)]\}_{\zeta^\circ} dt \qquad (3.5)$$

т. е. величина $J_{\zeta^\circ}[x_0, \xi_0, \eta_0]$ является конечной и $J_{\zeta^\circ} = v^\circ$.

Предположим теперь от противного, что существует функция

---

[1] Предполагается, что функции v° и ξ° являются достаточно гладкими для того, чтобы можно было говорить о существовании решений уравнений (1.1) и (1.3), а также иметь право использовать производную $dM\{v^\circ\}/dt$ и выполнять рассматриваемые далее преобразования (3.3)—(3.9).

[2] Мы ограничиваемся естественным случаем, когда из $M\{\omega\} \to 0$ можно заключить, что $M\{v^\circ\} \to 0$.

$\zeta^*[x, \xi, \eta] \neq \zeta^\circ[x, \xi, \eta]$ такая, что при $\zeta = \zeta^*$ в уравнениях (1.3) решения $\{x(t), \xi(t), \eta(t)\}_{\zeta^*}$ (1.1), (1.3) дают для некоторого начального условия x_0, ξ_0, η_0 (при $t_0 = 0$) неравенство

$$J_{\zeta^*}[x_0, \xi_0, \eta_0] < J_{\zeta^\circ}[x_0, \xi_0, \eta_0] \tag{3.6}$$

Из условия (3.2) следует, что

$$\left(\frac{dM\{v^\circ\}}{dt}\right)_{\zeta^*} \geqslant -\omega[x, \xi, \dot{\xi} = \zeta^*] \tag{3.7}$$

Усредняя (3.7) по случайным величинам

$$\{x(t), \xi(t), \eta(t)\}_{\zeta^*} / x_0, \xi_0, \eta_0, t_0 = 0$$

и интегрируя по t, аналогично предыдущему будем иметь неравенство

$$\begin{gathered} M\{v^\circ(x(T), \xi(T), \eta(T))\}_{\zeta^*} - v^\circ(x_0, \xi_0, \eta_0) \geqslant \\ \geqslant -\int_0^T M\{\omega[x(t), \xi(t), \zeta^*(t)]\}_{\zeta^*} dt \end{gathered} \tag{3.8}$$

Из (3.6) следует, что при $T \to \infty$ интеграл в правой части (3.8) сходится, т. е. справедливо неравенство

$$v^\circ(x_0, \xi_0, \eta_0) \leqslant \int_0^\infty M\{\omega[x(t), \xi(t), \zeta^*(t)]\}_{\zeta^*} dt = J_{\zeta^*}[x_0, \xi_0, \eta_0] \tag{3.9}$$

Действительно, из сходимости интеграла в правой части (3.8) следует, что $\lim M\{\omega\}_{\zeta^*} = 0$ при $t \to \infty$, т. е. по 3.4 (см. сноску на стр. 424) $\lim M\{v^\circ\}_{\zeta^*} = 0\ (t \to \infty)$. Неравенство (3.9) противоречит (3.5) и нашему предположению (3.6). Противоречие доказывает утверждение об оптимальности ζ°.

Итак, задача сводится к определению функций $v^\circ(x, \xi, \eta)$ и $\zeta^\circ[x, \xi, \eta]$.

§ 4. Уравнения для оптимальных функций v°, ζ°. Уравнения для v° и ζ° выводятся из условий (3.1) и (3.2). При этом необходимо знать, однако, выражение для $dM\{v^\circ\}/dt$ через правые части уравнений (1.1), (1.3) и через статистические характеристики $q(\alpha)$ и $q(\alpha, \beta)$ (2.1), (2.2) случайной функции $\eta(t)$. Найдем это выражение. Будем для упрощения рассуждений предполагать, что $\eta(t)$ может принимать лишь значения в конечных пределах $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$, $\eta_1 > -\infty$, $\eta_2 < \infty$.

При вычислении производной $dM\{v^\circ\}/dt$ как предела

$$\frac{dM\{v^\circ\}}{dt} = \lim \frac{\Delta M\{v^\circ\}}{\Delta t} \quad \text{при } \Delta t \to 0 \tag{4.1}$$

можно, подсчитывая $\Delta M\{v^\circ\}$, пренебрегать членами, имеющими порядок малости $o(\Delta t)$. Но если пренебречь вероятностями порядка $o(\Delta t)$, то можно рассуждать следующим образом:

Пусть в момент t реализовались значения $x(t) = x$, $\xi(t) = \xi$, $\eta(t) = \eta$, $v^\circ(t) = v^\circ(x(t), \xi(t), \eta(t))$; тогда в течение интервала времени Δt $(t \leqslant \tau \leqslant t + \Delta t)$ могут произойти следующие взаимнопротивоположные [13] события.

Событие A,— величина $\eta(\tau)$, $t \leqslant \tau \leqslant t + \Delta t$ сохранит свое значение, т. е. $\eta(t) = \eta(\tau) = \eta(t + \Delta t) = \text{const} = \eta$; по равенству (2.1) вероятность

$$P(A) \approx 1 - q(\eta)\Delta t$$

Событие B, — величина $\eta(\tau)$ при $t \leqslant \tau \leqslant t + \Delta t$ сменит один раз свое значение; по равенству (2.2) вероятность

$$P(B) \approx q(\eta)\,\Delta t$$

Событие B в свою очередь распадется на несовместимые ([13], стр. 424) события B_k, когда величина $\eta(\tau)$ меняет свое значение один раз на новое значение $\eta(t + \Delta t) = \beta_k$, где $\beta_k (k = 1, \ldots, m)$ — набор значений $\eta(\tau)$, отличных от η; по равенству (2.2) вероятность

$$P(B_k) \approx q(\eta,\ \beta_k)\,\Delta t$$

В случае, если осуществится событие A, уравнения (1.1), (1.3) будут работать на отрезке Δt как обыкновенные дифференциальные уравнения и приращение функции v° в этом случае $\Delta_A v^\circ$ будет вычисляться по известным правилам ([1], стр. 80—90)

$$\Delta_A v^\circ \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^\circ(x,\ \xi,\ \eta)}{\partial x_i}\,\Delta x_i + \frac{\partial v^\circ(x,\ \xi,\ \eta)}{\partial \xi}\,\Delta \xi \approx$$

$$\approx \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^\circ(x,\ \xi,\ \eta)}{\partial x_i}\,f_i[x,\ \xi,\ \eta] + \frac{\partial v^\circ(x,\ \xi,\ \eta)}{\partial \xi}\,\zeta[x,\ \xi,\ \eta]\right]\Delta t \qquad (4.2)$$

Если осуществится событие B_k, то очевидно [1]

$$\Delta_{Bk} v^\circ = v^\circ(x,\ \xi,\ \beta) - v^\circ(x,\ \xi,\ \eta) + O(\Delta t) \qquad (4.3)$$

Учитывая (4.2) и (4.3), получим формулу для математического ожидания $\Delta M\{v^\circ\}$ (с точностью до $o(\Delta t)$)

$$\Delta M\{v^\circ\} \approx P(A)\,\Delta_A v^\circ + \sum_{k=1}^{m} P(B_k)\,\Delta_{B_k} v^\circ =$$

$$= \Delta t \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^\circ(x,\ \xi,\ \eta)}{\partial x_i}\,f_i[x,\ \xi,\ \eta] + \frac{\partial v^\circ(x,\ \xi,\ \eta)}{\partial \xi}\,\zeta[x,\ \xi,\ \eta] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} q(\eta,\ \beta_k)\,[v^\circ(x,\ \xi,\ \beta_k) - v^\circ(x,\ \xi,\ \eta)]\right] \qquad (4.4)$$

Будем иметь равенство

$$\Delta M\{v^\circ\} \approx \Delta t \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^\circ(x,\ \xi,\ \eta)}{\partial x_i}\,f_i[x,\ \xi,\ \eta] + \frac{\partial v^\circ(x,\ \xi,\ \eta)}{\partial \xi} \times \right.$$

$$\left. \times\,\zeta[x,\ \xi,\ \eta] + \sum_{k=1}^{m} q(\eta,\ \beta_k)\,v^\circ(x,\ \xi,\ \beta_k) - q(\eta)\,v^\circ(x,\ \xi,\ \eta)\right] \qquad (4.5)$$

---

[1] Символ $O(\Delta t)$ обозначает бесконечно малую, которая имеет порядок малости не ниже, чем Δt, т. е. во всяком случае $O(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

так как по условиям (2.1), (2.2) справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{m} q(\eta, \beta_k) = q(\eta)$$

Разделив (4.5) на Δt и переходя к пределу (4.1), получим

$$\frac{dM\{v^\circ\}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^\circ(x, \xi, \eta)}{\partial x_i} f_i[x, \xi, \eta] + \frac{\partial v^\circ(x, \xi, \eta)}{\partial \xi} \zeta[x, \xi, \eta] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} v^\circ(x, \xi, \beta_k) q(\eta, \beta_k) - q(\eta) v^\circ(x, \xi, \eta) \tag{4.6}$$

Теперь можно записать уравнения для v° и ζ°. Вследствие (3.1) и (4.6) первое уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^\circ(x, \xi, \eta)}{\partial x_i} f_i[x, \xi, \eta] + \frac{\partial v^\circ(x, \xi, \eta)}{\partial \xi} \zeta^\circ[x, \xi, \eta] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} v^\circ(x, \xi, \beta_k) q(\eta, \beta_k) - q(\eta) v^\circ(x, \xi, \eta) + \omega[x, \xi, \zeta^\circ] = 0 \tag{4.7}$$

Второе уравнение получается из (4.7) дифференцированием по ζ, так как согласно предыдущему (стр. 423) при $\zeta = \zeta^\circ$ левая часть (4.7) достигает минимума. Запишем это второе уравнение

$$\frac{\partial v^\circ(x, \xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega[x, \xi, \zeta^\circ]}{\partial \zeta} = 0 \tag{4.8}$$

Если величина ζ°, кроме того, стеснена дополнительным условием, например — $|\zeta^\circ| \leqslant 1$, то следует искать минимум левой части (4.7), учитывая это условие.

Итак, задача свелась к решению уравнений (4.7), (4.8). Это — уравнения в частных производных и решение их в общем случае весьма затруднительно. Можно указать однако приближенный способ решения уравнений (4.7), (4.8).

§ 5. Приближенный способ решения уравнений для v° и ζ°. Опишем метод решения рассматриваемой оптимальной задачи, основанный на введении параметра ϑ. Этот метод был намечен в детерминированном случае в статье [10]. Рассмотрим вместо системы уравнений (1.1), (1.3) вспомогательную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i[x, \xi, \eta; \vartheta] \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \frac{d\xi}{dt} = \zeta[x, \xi, \eta; \vartheta] \tag{5.1}$$

и будем для этой системы решать задачу определения стабилизирующей функции ζ°, минимизирующей функционал

$$J_\zeta[x_0, \xi_0, \eta_0; \vartheta] = \int_0^\infty M\{\psi[x(t), \xi(t), \dot{\xi}(t); \vartheta] / x_0, \xi_0, \eta_0, t_0 = 0\} dt \tag{5.2}$$

При этом функции φ_i, ψ и статистические характеристики $q(\alpha; \vartheta)$, $q(\alpha, \beta; \vartheta)$ случайной переменной $\eta(t, \vartheta)$ должны быть подобраны так, чтобы при $\vartheta = 0$ задача решалась легко и чтобы при изменении ϑ от

0 до 1 система (5.1) непрерывно переходила в первоначальную систему (1.1), (1.3) (при $\vartheta = 1$).

Используя уравнения, описывающие изменение оптимальных функций $v^\circ(x, \xi, \eta; \vartheta)$, $\zeta^\circ[x, \xi, \eta; \vartheta]$ задачи (5.1), (5.2) при изменении ϑ, можно таким путем найти оптимальное решение первоначальной задачи. Для того чтобы получить указанные уравнения, достаточно составить уравнения (4.7) и (4.8) (но для задачи (5.1), (5.2)) и продифференцировать эти уравнения по ϑ. Хотя получающиеся уравнения также являются сложными, однако, исходя из начальных решений v° и ζ° при $\vartheta = 0$, можно организовать процедуру приближенного численного решения их. Этот подход к задаче оказывается также полезным по той причине, что, непрерывно изменяя задачу с изменением ϑ, мы пойдем по интересующей нас ветви решения $v^\circ(x, \xi, \eta; \vartheta)$, $\zeta^\circ[x, \xi, \eta; \vartheta]$, которая, исходя из известного устойчивого начального решения $v^\circ(x, \xi, \eta; 0)$, $\zeta^\circ[x, \xi, \eta; 0]$ при $\vartheta = 0$, будет давать и при $\vartheta > 0$ устойчивую оптимальную систему. (Функция $v^\circ(x, \xi, \eta; \vartheta)$ при $\vartheta > 0$ будет получаться определенно положительной.) Непрерывная деформация системы полезна также для выяснения вопроса о существовании решения оптимальной задачи[1].

§ 6. Задача выбора параметров линейной системы, минимизирующих квадратичный критерий качества. Цель настоящего параграфа — проиллюстрировать подход к решению задачи, поставленной в § 4. Рассмотрим систему[2], описываемую линейными уравнениями (1.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(\eta)\, x_j + m_i \xi \qquad (i = 1, 2) \tag{6.1}$$

и будем искать закон регулирования

$$\dot{\xi} = \zeta[x_1, x_2, \xi, \eta(t)] \tag{6.2}$$

из условия минимума квадратичного функционала (2.3)

$$J_\zeta[x_{10}, x_{20}, \xi_0, \eta_0] =$$
$$= \int_0^\infty M\{[x_1^2(t) + x_2^2(t) + \xi^2(t) + \dot{\xi}^2(t)] / x_{10}, x_{20}, \xi_0, \eta_0, t_0 = 0\}\, dt = \min.$$

Ограничимся случаем, когда переменная $\eta(t)$ принимает лишь два значения: $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$, с вероятностями перехода

$$P[\eta_i \to \eta_j \text{ за время } \Delta t] = p_{ij}\Delta t + o(\Delta t) \qquad (i \neq j) \tag{6.3}$$

Тогда функции $q(\alpha)$ и $q(\alpha, \beta)$ (стр. 421) имеют вид

$$q(\eta_1) = p_{12}, \qquad q(\eta_2) = p_{21}$$
$$q(\eta_1, \beta) = q(\eta_1) = p_{12} \quad \text{при } \beta = \eta_2$$
$$q(\eta_2, \beta) = q(\eta_2) = p_{21} \quad \text{при } \beta = \eta_1$$

[1] Эти положения иллюстрируются ниже на примере минимизации квадратичного функционала в линейной системе (см. § 6 — § 7).

[2] Соображения, развитые в этом параграфе для системы двух уравнений (6.1), можно обобщить на системы n-го порядка, однако выкладки весьма усложняются.

Исследование задачи о выборе параметров линейной системы, обеспечивающих хорошее качество ее, было выполнено Н. Г. Четаевым [2].

Задача минимума квадратичного критерия качества была поставлена и изучалась А. А. Красовским и А. А. Фельдбаумом (см. монографию [14], где приведена соответствующая библиография).

Метод функций Ляпунова в приложении к проблеме оптимального качества регулируемых систем излагается в статье Дж. Бертрама и Р. Каллмана [15].

Запишем уравнения (4.7), (4.8) для задачи (6.3)

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial v^\circ(x_1, x_2, \xi, \eta_l)}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{2} a_{ij}(\eta_l)x_j + m_i\xi\right] + \frac{\partial v^\circ(x_1, x_2, \xi, \eta_l)}{\partial \xi}\zeta^\circ[x_1, x_2, \xi, \eta_l] +$$
$$+ p_{lk}[v^\circ(x_1, x_2, \xi, \eta_k) - v^\circ(x_1, x_2, \xi, \eta_l)] +$$
$$+ x_1^2 + x_2^2 + \xi^2 + (\zeta^\circ[x_1, x_2, \xi, \eta_l])^2 = 0 \quad (l = 1, 2;\ k \neq l) \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial v^\circ(x_1, x_2, \xi, \eta_l)}{\partial \xi} + 2\zeta^\circ[x_1, x_2, \xi, \eta_l] = 0 \quad (l = 1, 2) \tag{6.5}$$

Разрешая уравнения (6.5) относительно ζ° и подставляя результаты в уравнения (6.4), получим уравнения в частных производных для оптимальной функции Ляпунова

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial v^\circ(x, \xi, \eta_l)}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{2} a_{ij}(\eta_l)x_j + m_i\xi\right] + p_{lk}[v^\circ(x, \xi, \eta_k) - v^\circ(x, \xi, \eta_l)] -$$
$$- \frac{1}{4}\left[\frac{\partial v^\circ(x, \xi, \eta_l)}{\partial \xi}\right]^2 = -x_1^2 - x_2^2 - \xi^2 \quad (l = 1,2;\ k \neq l) \tag{6.6}$$

Искать решение этих уравнений следует в виде квадратичных форм (как и в детерминированном случае [5], статья IV)

$$v^\circ(x_1, x_2, \xi, \eta_l) = \sum_{i, j=1}^{2} [b_{ij}(\eta_l)x_i x_j + b_i(\eta_l)x_i\xi] + c(\eta_l)\xi^2 \quad (l = 1, 2) \tag{6.7}$$

После подстановки правой части (6.7) в уравнения (6.6), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x_i и ξ, получим систему квадратных уравнений для коэффициентов b_{ij}, b_i, c.

Если найдено решение этой системы уравнений $\{b_{ij}, b_i, c\}$, для которого формы (6.7) являются определенно положительными, то в соответствии с результатами § 4 оптимальная функция ζ° определяется из уравнений (6.5) в виде линейной формы

$$\zeta^\circ = -\frac{1}{2}[b_1(\eta_l)x_1 + b_2(\eta_l)x_2 + 2c(\eta_l)\xi] \quad (l = 1, 2) \tag{6.8}$$

7. Проблема существования оптимального закона управления для задачи (6.3). Обсудим здесь вопрос о существовании решения v° системы уравнений в частных производных (6.6). Система уравнений (6.1) не всегда может быть стабилизирована выбором закона управления (6.2) при заданных a_{ij} и m_i, тем более не всегда существуют решения уравнений

(6.6), являющиеся определенно положительными функциями $v^\circ(x, \xi, \eta)$. Будем называть закон регулирования $\dot\xi = \zeta^{(q)}$ допустимым, если при этом законе регулирования система (6.1) асимптотически устойчива по вероятности и интеграл (6.3) имеет конечную величину для любого начального условия. Проблема существования допустимого (и оптимального) управления в детерминированном случае изучена Ф. М. Кирилловой. В этой статье мы не будем останавливаться на выяснении вопроса о существовании допустимого управления для стохастической системы (6.1), так как этому вопросу будет посвящена специальная статья. Отметим здесь лишь, что для того, чтобы при некотором законе управления $\dot\xi = \zeta^{(q)}$ система была асимптотически устойчива по вероятности и чтобы интеграл (6.3) был конечным, достаточно, чтобы существовала определенно положительная функция v, имеющая определенно отрицательную производную $dM\{v\}/dt$, причем v и $dM\{v\}/dt$ удовлетворяют определенным оценкам [7] (стр. 815—823), характерным для квадратичных форм.

Основной целью настоящего параграфа является доказательство существования оптимального управления при условии, что существует допустимое управление.

Составим вспомогательную систему уравнений [1]

$$\frac{dx_i}{dt} = \vartheta\left[\sum_{j=1}^{2} a_{ij}(\eta)\,x_j + m_i\,\xi\right] - (1-\vartheta)\,x_i \qquad (i = 1, 2;\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1) \tag{7.1}$$

$$\dot\xi = \zeta\,[x_1,\ x_2,\ \xi,\ \eta;\ \vartheta] \tag{7.2}$$

где требуется выбрать правило (7.2) построения управляющего воздействия ξ так, чтобы при каждом $\vartheta \in [0, 1]$ система была асимптотически устойчива (по вероятности) и чтобы минимизировался функционал

$$J_\zeta\,[x_{10},\ x_{20},\ \xi_0,\ \eta_0,\ \vartheta] = \int_0^\infty M\,\{[x_1^2(t) + x_2^2(t) + \xi^2(t) + \dot\xi^2(t)]\,/\,x_{10},\ x_{20},\ \xi_0,\ \eta_0,\ t_0 = 0\}\,dt = \min \tag{7.3}$$

При $\vartheta = 0$ задача решается сразу, так как основные уравнения имеют вид

$$-\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v^\circ(x, \xi, \eta)}{\partial x_i}\,x_i + \frac{\partial v^\circ(x, \xi, \eta)}{\partial \xi}\,\zeta^\circ\,[x, \xi, \eta] = -x_1^2 - x_2^2 - \xi^2 - (\zeta^\circ\,[x, \xi, \eta])^2$$

$$2\zeta^\circ\,[x, \xi, \eta] = -\frac{\partial v^\circ(x, \xi, \eta)}{\partial \xi} \tag{7.4}$$

и этим уравнениям можно удовлетворить, выбирая

$$v^\circ = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + c\xi^2 \tag{7.5}$$

[1] В рассматриваемом случае вопрос о существовании оптимального управления можно решать проще непосредственно, однако приведем рассуждения, применимые в более общем случае и иллюстрирующие подход к задаче, описанной выше в § 5.

где для коэффициентов b_{ii} и c после подстановки (7.5) в (7.4) получаются уравнения $2b_{ii} = 1$, $c^2 = 1$, имеющие положительные решения

$$b_{11} = \frac{1}{2}, \quad b_{22} = \frac{1}{2}, \quad c = 1 \tag{7.6}$$

Если при некотором $\vartheta > 0$ задача о существовании оптимальной функции Ляпунова v° имеет решение, то это решение — определенно положительная функция v° — удовлетворяет уравнениям, соответствующим в нашем случае (7.1) — (7.2) уравнениям (6.6), т. е.

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial v^\circ}{\partial x_i}\left[\vartheta \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j - (1-\vartheta)\,x_i + m_i\xi\vartheta\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial v^\circ}{\partial \xi}\right]^2 +$$
$$+ p_{lk}\,[v^\circ(x, \xi, \eta_k; \vartheta) - v^\circ(x, \xi, \eta_l; \vartheta)] = -x_1{}^2 - x_2{}^2 - \xi^2 \qquad (l = 1, 2;\ k \neq l)$$

Рассмотрим, как должно изменяться решение v° этих уравнений с изменением параметра ϑ. Для этой цели продифференцируем формально эти уравнения по ϑ. Обозначая производную $\partial v^\circ / \partial\vartheta$ символом $\alpha\,[x, \xi, \eta; \vartheta]$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\left[\vartheta \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j + \vartheta m_i\xi - (1-\vartheta)\,x_i\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial v^\circ}{\partial \xi}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \tag{7.7}$$
$$+ p_{lk}\,[\alpha(x, \xi, \eta_k; \vartheta) - \alpha(x, \xi, \eta_l; \vartheta)] = F_l(x, \xi; \vartheta) \qquad (l = 1, 2;\ k \neq l)$$

где F_l — некоторая квадратичная форма переменных x_1, x_2, ξ. Если при $\vartheta^* \geqslant 0$ задача имеет решение, то система уравнений (7.1) в силу результатов статьи [7] (стр. 815—820) будет асимптотически устойчива в средне квадратичном. Но в таком случае уравнения (7.7) при $\vartheta = \vartheta^*$ будут иметь решение — квадратичную форму $\alpha(x_1, x_2, \xi, \eta; \vartheta)$. Действительно, эти уравнения можно записать в виде

$$\left(\frac{dM\{\alpha\}}{dt}\right)_{(7.1)(7.2)} = F_l(x, \xi; \vartheta) \tag{7.8}$$

где символ $(dM\{\alpha\}/dt)_{(7.1)(7.2)}$ обозначает производную функции α в силу оптимальной системы (7.1), (7.2) при $\vartheta = \vartheta^*$.

Из результатов статьи [7] следует также, что при наших условиях решение α уравнения (7.8) существует. Если в уравнениях (7.7) приравнять члены при одинаковых степенях x_i и ξ, то получим систему дифференциальных уравнений для функций $b_{ij}(\vartheta, \eta)$, $b_i(\vartheta, \eta)$, $c(\vartheta, \eta)$ (см. стр. 429). На основании предыдущих рассуждений следует, что полученную систему уравнений можно разрешить относительно производных $db_{ij}/d\vartheta$, $db_i/d\vartheta$, $dc/d\vartheta$, которые являются коэффициентами функции α. Теперь для доказательства существования решения оптимальной задачи (6.3), т. е. задачи (7.4) при $\vartheta = 1$, достаточно проверить, что указанные дифференциальные уравнения для b_{ii}, b_i, c можно проинтегрировать по ϑ на отрезке $[0, 1]$, исходя из начальных условий (7.6). Однако можно видеть, что интегрирование это было бы невозможно лишь в том случае, если бы при подходе к какому-то значению $\vartheta = \vartheta^*$ нельзя было бы разрешить уравнения (7.7) или если бы какой-нибудь коэффициент $b_{ij} \to \infty$, $b_i \to \infty$, $c \to \infty$ при $\vartheta \to \vartheta^* - 0$. Однако эти неприятности возможны лишь для таких ϑ^*, при подходе к которым система (7.1), (7.2) будет либо терять асимптотическую устойчивость в среднем, либо, когда $v^\circ(x, \xi, \eta; \vartheta)$ будет неограниченно возрастать в конечных точках x, ξ при $\vartheta \to \vartheta^* - 0$. Но в первом случае функция v° должна терять свойство определенной положительности при $\vartheta \to \vartheta^* - 0$. Однако эти изменения v° исключены, поскольку при $\vartheta < \vartheta^*$ функция v° равна оптимальному значению функционала J_ζ, который в точках x, ξ, лежащих на круге единичного радиуса, ограничен равномерно по $\vartheta \in [0, 1]$ и снизу (вследствие ограниченности коэффициентов системы (7.1), (7.2)) и сверху (так как для системы (6.1), (6.2), а следовательно, и для системы (7.1), (7.2) существует по нашему предположению допустимое управление $\zeta^{(q)}$, для которого значение функционала I_ζ не меньше I_ζ°, т. е. $v^\circ \leqslant I_{\zeta(q)}$; это допустимое управление получается для системы (7.1), (7.2), если положить $\zeta^{(q)} = \vartheta\zeta - (1 - \vartheta)\xi$, где ζ — допустимое управление для первоначальной задачи.

Из приведенных рассуждений вытекает возможность продолжить решения уравнений (7.6) до значения $\vartheta = 1$, т. е. вытекает существование оптимального решения задачи (6.3). Сформулированное выше утверждение доказано.

Заметим в заключение, что численное интегрирование дифференциальных уравнений для b_{ij}, b_i, c на отрезке $v \in [0, 1]$ позволяет найти приближенное значение оптимальной функции Ляпунова v°.

Поступила 7 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М. — Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат М., 1956.
3. Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ, М, 1960.
4. Bellman R. Dinamic programming and stochastic control processes. Inform. and Control. vol. 5, p. 228—239, 1958.
5. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов, 1—IV, Автомат. и телемеханика. 1960, т. 21, вып. 4—6; 1961, т. 22, вып. 4.
6. Дуб Дж. Вероятностные процессы. ИЛ, М., 1956.
7. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
8. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Одна статистическая задача оптимального управления, ДАН СССР, 1959, т. 128, № 5.
9. Красовский Н. Н. Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. I.
10. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
11. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Гостехиздат, М., 1959.
12. Дынкин Е. Б. Инфинитезимальные операторы марковских процессов. Теория вероятности и ее применение, 1956, т. I, № 1.
13. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Гостехиздат. М., 1954.
14. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз. 1959.
15. Kalman R. E. a Bertram I. E. Control System Analysis and Design Via the «Second Method» of Lyapunov. Paper Amer. Soc. Mech. Engrs. № 2, 1959.