Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Чжан Сы-ин

(Шэньян, Китай)

Л. С. Понтрягин и его ученики [1] рассматривали общую задачу об оптимальном регулировании и получили «принцип максимума». Л. И. Розоноэр [2] вновь доказал принцип максимума иным путем, установил связь между методом динамического программирования Р. Беллмана и принципом максимума Понтрягина и показал аналогию этих уравнений с уравнениями аналитической механики (уравнениями Гамильтона и уравнениями Гамильтона — Якоби).

В настоящей работе получена формула для приращения функционала другим методом. Показано, что задачу об оптимальном регулировании можно решать вариационным методом при помощи множителей Лагранжа. Выясняется аналогия между уравнениями оптимального регулирования с уравнениями Лагранжа в аналитической механике. Рассматриваются некоторые частные случаи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_r;\ t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

которая описывает управляемый процесс системы автоматического регулирования. Здесь $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — параметры объекта автоматического регулирования, $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ — положения регулирующих органов.

Предполагается, что функции f_i непрерывны, ограничены для всех аргументов и имеют непрерывные частные производные первого порядка

$$\partial f_i / \partial x_s \quad (i, s = 1, \ldots, n), \qquad \partial f_i / \partial u_k \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, r \end{pmatrix}$$

Предполагается также, что $u_1, \ldots, u_r$ кусочно непрерывны и должны удовлетворять неравенствам

$$g_j(u_1, \ldots, u_r) \leqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

В дальнейшем будем называть $u_1, \ldots, u_r$ «допустимые управления».

Предположим, что в момент времени $t = t_0$ система находится в точке $x^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ фазового пространства. В работе [2] показано, что задачу об оптимальном регулировании можно свести к рассмотрению системы (1.1) (считаем, что в (1.1) уже введена новая переменная), в которой из допустимых управлений, переводящих систему (1.1) из точки $x(t_0) = x^\circ$, требуется выбрать $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ так, чтобы в заданный момент времени $t = T$ сумма

$$S = c_1 x_1(T) + \ldots + c_n x_n(T) \tag{1.3}$$

принимала минимальное (или максимальное) значение. Здесь c_i — некоторые постоянные.

2. Случай со свободным правым концом траектории. Рассмотрим случай, когда на $x_1, \ldots, x_n$ при $t = T$ не наложено ограничений.

Пусть $u_1, \ldots, u_r$ — оптимальные управления, т. е. они дают функционалу $S(T)$ (1.3) минимальное (или максимальное) значение. Из (1.1) имеем

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \delta u_k + \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Здесь ε_i — приращения, начинающиеся со второго порядка. Умножив обе части равенств соответственно на множители $\lambda_i(t)$, получим

$$\lambda_i \delta \dot{x}_i = \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + \lambda_i \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \delta u_k + \lambda_i \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Затем интегрируем обе части (2.2) от t_0 до T. Для левой части имеем

$$\int_{t_0}^{T} \lambda_i \delta \dot{x}_i dt = \lambda_i \delta x_i \Big|_{t_0}^{T} - \int_{t_0}^{T} \dot{\lambda}_i \delta x_i \, dt \tag{2.3}$$

Из условий

$$x_i(t_0) = x_i^{\circ} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

вытекает, что

$$\delta x_i(t_0) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

Кроме того, допустим

$$\lambda_i(T) = -c_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Отсюда следует

$$\lambda_i \delta x_i \Big|_{t_0}^{T} = -c_i \delta x_i(T)$$

Согласно этим условиям, после интегрирования (2.2) будем иметь

$$-c_i \delta x_i(T) = \int_{t_0}^{T} \left\{ \left[\lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + \dot{\lambda}_i \delta x_i + \lambda_i \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \delta u_k \right] + \lambda_i \varepsilon_i \right\} dt$$

$$(i = 1, \ldots, n) \tag{2.7}$$

Наконец, суммируя (2.7) по i, получим выражение для приращения функционала (1.3) при $t = T$

$$\Delta S(T) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta x_i(T) = -\int_{t_0}^{T} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{\lambda}_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_k} \delta u_k \right] + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i \right\} dt \tag{2.8}$$

Линейная часть уравнения (2.8) есть вариация функционала при $t = T$, т. е.

$$\delta S(T) = -\int_{t_0}^{T} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{\lambda}_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_k} \delta u_k \right] dt \tag{2.9}$$

Если для управлений $u_1, \ldots, u_r$ функционал S имеет минимальное (или максимальное) значение при $t = T$, то вариация функционала S

при $t = T$ должна равняться нулю, т. е. $\delta S(T) = 0$. Отсюда следует, что правая часть уравнения (2.9) должна также равняться нулю.

Множители $\lambda_i(t)$ выбираем так, чтобы

$$\dot{\lambda}_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \quad \text{или} \quad \dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.10}$$

При этом должны учитываться граничные условия (2.6). Кроме того, вследствие независимости вариаций $\delta u_1, \ldots, \delta u_r$, нужно, чтобы правая часть (2.6) равнялась нулю, и к условиям (2.10) нужно присоединить условия

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{2.11}$$

Таким образом совокупность равенств (2.10), (2.6), (2.11), (1.1) и (2.4) образует систему уравнений рассматриваемой задачи.

Введем функцию

$$H = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n \tag{2.12}$$

Тогда указанная система приведется к системе уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_i = \partial H / \partial \lambda_i, \qquad x_i(t_0) = x_i^\circ \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.13}$$

$$\dot{\lambda}_i = -\partial H / \partial x_i, \qquad \lambda_i(T) = -c_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.14}$$

$$\partial H / \partial u_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{2.15}$$

Условия (2.15) означают, что при оптимальных управлениях $u_1, \ldots, u_r$ функция H будет иметь экстремум.

Из изложенного вытекает, что задачу об оптимальном регулировании можно решать методом множителей Лагранжа $\lambda_i(t)$. В самом деле задачу можно свести к определению экстремума интеграла

$$S = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} c_i \dot{x}_i \, dt \tag{2.16}$$

при условии

$$\dot{x}_i - f_i(x_1, \ldots, x_n; \; u_1, \ldots, u_r; \; t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.17}$$

Для решения этой задачи составим новую функцию

$$L = \sum_{i=1}^{n} c_i \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) \tag{2.18}$$

Если для $u_1, \ldots, u_r$ и соответствующих им $x_1, \ldots, x_n$ интеграл (2.16) принимает экстремальное значение, то по методу Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{2.20}$$

Кроме того, уравнения (1.1) или (2.17) можно представить в виде

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.21}$$

Уравнения (2.19) и (2.20) представляют собой не что иное, как уравнения (2.10) и (2.11) или (2.14) и (2.15).

Здесь следует отметить, что применяя метод Лагранжа, нужно тщательно определять граничные условия (2.6) для дифференциальных уравнений (2.19).

Уравнения (2.19), (2.20) и (2.21) имеют вид уравнений Лагранжа в аналитической механике. Кроме того, между функциями H и L имеет место также соотношение

$$H = -L + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \tag{2.22}$$

3. Некоторые другие случаи. I°. При $t = T$ на $x_i(T)$ $(i = 1, \ldots, n)$ наложены некоторые ограничения;

1) *Первый случай.* При $t = T$ функции $x_i(T)$ $(i = 1, \ldots, n)$ могут быть подчинены условию $F(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$. Здесь ограничимся рассмотрением случая

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{при } t = T \tag{3.1}$$

Чтобы $\delta S(T) = 0$, согласно (2.9), должно быть

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{\lambda}_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) \delta x_i + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_k} \delta u_k = 0 \qquad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.2}$$

Условие (3.1) можно считать новым уравнением связи; тогда, предполагая существование производных $\partial F / \partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, из выражения первой вариации функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ для $\delta x_i(T)$ $(i = 1, \ldots, n$ вытекает соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \delta x_n = 0 \tag{3.3}$$

Оно будет дополнительным условием для δx_i $(i = 1, \ldots, n)$ в равенствах (3.2). В (3.3) не все $\partial F/\partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ равны нулю. В противном случае функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ не содержала бы ни одной переменной $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть, например, $\partial F / \partial x_n$ не равна нулю, тогда из (3.3) следует

$$\delta x_n = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \delta x_{n-1}\right) \Big/ \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

Подставляя это выражение в первую сумму равенства (3.2), получим

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[\dot{\lambda}_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right] \delta x_i +$$

$$+ \left[\dot{\lambda}_n + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right] \left[-\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \delta x_{n-1}\right) \Big/ \frac{\partial F}{\partial x_n}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left[\dot{\lambda}_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\dot{\lambda}_n + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right) \Big/ \frac{\partial F}{\partial x_n}\right] \delta x_i$$

Выберем $\lambda_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, так, чтобы

$$\dot{\lambda}_n + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x_n}, \qquad \dot{\lambda}_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{3.4}$$

или объединяя запись

$$\dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.5}$$

Тогда, если вместе с (3.5) выполняются равенства (2.11)

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

то $\delta S(T) = 0$ согласно (3.2) и (2.9). В рассматриваемом случае уравнения (3.5) получаются вместо (2.10). Граничные условия для (3.5) принимаются по-прежнему в виде (2.6). Если ввести функцию

$$H^\circ = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i - F \tag{3.6}$$

то получим канонический вид уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H^\circ}{\partial \lambda_i}, \quad \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H^\circ}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\partial H^\circ}{\partial u_k} = 0 \quad (k=1, \ldots, r) \tag{3.7}$$

В этом случае задачу можем решать также методом Лагранжа. Поступим следующим образом. Составим функцию

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \lambda_{n+1} F \tag{3.8}$$

вместо функции (2.18). Из уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{3.9}$$

получим

$$\dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \lambda_{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.10}$$

а также уравнения (2.11).

Рассмотрим теперь множитель λ_{n+1}. Неоднородными уравнениями для λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ будут дифференциальные уравнения (3.10). Их частные решения u_i имеют вид

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^{(j)}(t) \int_{t_0}^{T} \frac{1}{D(\tau)} \sum_{l=1}^{t} D_{lj}(\tau)\, \lambda_{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_l}\, d\tau \qquad (D = \det \| \lambda_S^{(l)} \|) \tag{3.11}$$

Здесь $\lambda_1^{(l)}, \ldots, \lambda_n^{(l)}$ — фундаментальная система, D_{lj} — минор в определителе D элемента $\lambda_l^{(j)}$ со знаком. Из (3.11) видно, что для частных решений λ_{n+1} можно считать произвольной постоянной. Пусть

$$\lambda_{n+1} = 1 \tag{3.12}$$

Тогда уравнения (3.10) будут иметь одинаковый вид с (3.5). Кроме того, в выражении (3.8) для функции Φ следует также положить $\lambda_{n+1} = 1$. Аналогичным путем можно решать задачу, если имеется несколько ограничений (3.1), т. е.

$$F_S(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (S = 1, \ldots, m,\ m < n) \tag{3.13}$$

2) *Второй случай.* Пусть при $t = T$ все $x_i(T)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ фиксированы, а для $x_n(T)$ нужно получить минимальное (максимальное)

значение. Например, для некоторой регулирующей системы требуется иметь наименьший переходный процесс.

В этом случае нужно обратить внимание на граничные условия уравнений Эйлера. При $t = T$ все $x_i(T)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ фиксированы, поэтому $\delta x_i(T) = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Следовательно, здесь уже нельзя определить $\lambda_i(T)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$; имеем только

$$\lambda_n(T) = -1 \tag{3.14}$$

Таким образом, в этом случае получаем следующие дифференциальные уравнения с граничными условиями

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_r;\ t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.15}$$

$$\dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{3.16}$$

$$x_i(t_0) = x_i^{\circ} \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad x_i(T) = x_i^1 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

Здесь x_i^1 $(i = 1, \ldots, n-1)$ — фиксированные значения.

Для решения этих дифференциальных уравнений пока нет общих методов; в некоторых работах приведены решения нескольких линейных задач, рассмотренных различными способами.

2°. Построим одно соотношение, полезное для решения некоторых линейных систем.

1) Для системы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + \sum_{k=1}^{r} b_{ik}(t)\, u_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.17}$$

имеем

$$\delta\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, \delta x_j + \sum_{k=1}^{r} b_{ik}(t)\, \delta u_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.18}$$

Умножив это равенство на $\lambda_i(t)$ и интегрируя от t_0 до T, получим

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \delta x_i(T) = -\int_{t_0}^{T} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{\lambda}_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ji}\right) \delta x_i + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{jk} \delta u_k\right] dt \tag{3.19}$$

Как известно, чтобы функционал (1.3) имел минимальное значение, необходимо, чтобы $\Delta S \geqslant 0$. Выберем $\lambda_i(t)$ так, что

$$\dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ji} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.20}$$

Тогда чтобы выполнялось условие $\Delta S \geqslant 0$, необходимо

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{jk} \delta u_k \leqslant 0 \tag{3.21}$$

Пусть

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{r} b_{ik} u_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.22}$$

Тогда условие (3.21) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_k}\, \delta u_k \leqslant 0 \tag{3.23}$$

Отсюда, если ввести функцию $H = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$, имеем

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial H}{\partial u_k} \delta u_k \leqslant 0, \quad \text{или} \quad \Delta H \leqslant 0 \tag{3.24}$$

Это значит, что при управлениях, оптимальных для минимального (максимального) значения функционала S, функция H принимает максимальное (минимальное) значение. Если в этом случае задачу решать методом Лагранжа, то из уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

опять получится система (3.20). Но из

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

имеем

$$\partial H / \partial u_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{3.25}$$

Это условие означает, что оптимальные управления $u_1, \ldots, u_r$ дают функции H экстремальное значение; однако при этом нельзя определить, какое именно, максимальное или минимальное.

2) Для линейной системы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + \varphi_i(u_1, \ldots, u_r) = f_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.26}$$

будет справедливо изложенное выше для системы (3.17).

3) системы (3.17) и (3.26) можно записать в общем виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + X_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.27}$$

Умножив (3.27) и (3.20) на λ_i и x_i соответственно и складывая по i, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \lambda_i x_j - a_{ji} \lambda_j x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$$

Второй член левой части исчезает, поэтому имеем [3]

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \tag{3.28}$$

Интегрируя от t_1 до t_2, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Big|_{t_2} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Big|_{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \Big) dt \tag{3.29}$$

Этим соотношением можно пользоваться повторно при решении задачи, если в конкретных примерах выбирать различные соответствующие значения t_1 и t_2.

Поступила 27 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. Усп. матем. наук, 1959, т. XIV, вып. I.
2. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем (I, II, III). Автоматика и телемеханика, № 10, 11, 12, 1959, т. XX.
3. Цянь Сюэ-сэнь. Техническая кибернетика. т. XIII, ИИЛ, 1956.