Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД МЕХАНИКИ В ТЕОРИИ АБСОЛЮТНО УПРУГОГО УДАРА МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. И. Киргетов

(Москва)

Исследование движения материальных систем на базе использования основного уравнения механики (аналитический метод в механике) обладает несомненными преимуществами, так как позволяет вести такое исследование без рассмотрения реакций связей системы, что в большинстве случаев значительно упрощает задачу. Это относится и к исследованию удара и в частности удара, происходящего в системе при наложении на нее односторонних связей. Однако, применение основного уравнения механики в последнем случае с самого начала наталкивается на трудность, связанную с неясностью способа замыкания вытекающих из него уравнений удара. В работе [1] показано, как эта трудность преодолевается в простейшем случае, когда на систему налагается связь, выражаемая аналитически одним неравенством, не зависящим от времени явно. Целью предлагаемой работы является обобщение метода на общий случай.

1. Система из n материальных точек с массами m_i, стесненных гладкими связями

$$\sum p_{\alpha i} v_i + p_\alpha = 0 \qquad (1.1)$$

движется в пространстве относительно неподвижной декартовой системы координат ($m_1 = m_2 = m_3$ — масса первой точки системы; $m_4 = m_5 = m_6$—масса второй точки и т. д. v_1, v_2, v_3— составляющие скорости первой точки системы; v_4, v_5, v_6 — составляющие скорости второй точки и т. д.)

В некоторый момент движения системы на нее налагаются гладкие односторонние связи

$$\sum r_{\beta i} v_i + r_\beta \geqslant 0 \qquad (1.2)$$

Тогда в системе происходит удар и как следствие его — скачкообразное изменение скоростей точек системы.

Примечание: Уравнения (1, 1) (1.2) взяты зависящими от скоростей. Это, конечно, не значит, что все связи должны зависеть от скоростей. Однако, для краткости выкладок удобно все уравнения связей привести к указанному единообразному виду. Из этих же соображений в работе используется сквозная нумерация переменных.

Исходя из удара как процесса, длящегося малое, но все же конечное время, предположим, что в течение всего удара связи (1.2) остаются неизменно наложенными на систему и что основное уравнение механики при этом остается неизменно выполненным. Тогда нетрудно показать, что применительно к идеализированному удару, длительность которого равна нулю (с ним только и имеет дело классическая механика), основное уравнение механики преобразуется к виду

$$\sum m_i (v_i - v_{i0})\, \delta x_i = 0 \qquad (1.3)$$

где v_{i0} — скорости точек системы перед ударом. «Возможные перемещения» системы δx_i удовлетворяют соотношениям

$$\sum p_{\alpha i}\delta x_i = 0, \quad \sum r_{\beta i}\delta x_i = 0 \tag{1.4}$$

Отсюда следует ряд уравнений удара. Однако, добавление к ним уравнений (1.1) связей системы не замыкает полученную систему уравнений. Число уравнений, нехватающее для этого, равно числу уравнений, налагающихся на систему односторонних связей. Сами уравнения односторонних связей для замыкания системы уравнений удара использованы быть не могут, так как не дают достаточных ограничений на состояние системы после удара. Значит, сделанных выше предположений относительно удара недостаточно и последний нуждается в доопределении.

Замечание: С подобным положением вещей мы уже сталкивались в [2]. Там для замыкания системы уравнений удара нехватало одного уравнения и в качестве такого доопределяющего уравнения там было использовано условие сохранения при ударе живой силы системы, что было вполне естественно, так как ни связи системы, ни налагающаяся на систему связь в [2] от времени не зависели. В условиях предлагаемой работы такое решение вопроса отсутствует, так как здесь вполне допускается зависимость связей от времени. Кроме того, здесь мы имеем дело со случаем, когда налагающиеся связи выражаются несколькими неравенствами и, следовательно, для замыкания системы уравнений требуется несколько дополнительных условий.

Итак, в условиях предлагаемой работы аналитический метод исследования удара непосредственно применен быть не может, так как наперед неясно, как следует замкнуть уравнения происходящего в системе удара. Поэтому за исходный следует взять какой-то другой принцип. В качестве такового мы вместе с [3] принимаем следующее положение.

Абсолютно упругий удар, происходящий в системе при наложении на нее односторонних связей, состоит из последовательности двух фаз: первой пассивной фазы, когда удар протекает абсолютно неупруго, и когда происходит накопление реакций, и второй фазы, когда импульсом реакций, накопленных на первой фазе удара, происходит взрывное освобождение системы от односторонних связей.

Возможность такого толкования абсолютно упругого удара в частном случае систем со связями, не зависящими от времени, когда налагающаяся связь выражается одним неравенством, также не зависящим от времени, была установлена в [1]. Физическая наглядность этого толкования позволяет думать, что и в общем случае удар протекает точно так же. Именно по этой причине сформулированное выше положение здесь принимается за общее определение абсолютно упругого удара. К такому определению склоняет также его безотносительность к каким-либо предположениям, касающимся количества и качества (в смысле зависимости от времени) налагающихся на систему односторонних связей, что позволяет в самом общем случае рассчитать величины изменений, происходящих вследствие удара в скоростях точек системы, и, отправляясь отсюда, указать требуемый пока еще неизвестный способ замыкания вытекающих из общего уравнения механики уравнений удара.

2. В соответствии с принятым определением абсолютно упругого удара рассмотрим две его фазы последовательно. Будем следовать при этом методике работы [1].

На первой фазе удар протекает абсолютно неупруго, т. е. таким образом, что налагающиеся на систему связи (1.2) сохраняются до конца фазы включительно. Это значит, что в конце первой фазы удара скорости системы u_i должны удовлетворять соотношениям

$$\sum r_{\beta i} u_i + r_\beta = 0 \tag{2.1}$$

Кроме того, очевидно, должны выполняться соотношения

$$\sum p_{\alpha i} u_i + p_\alpha = 0 \tag{2.2}$$

ибо уравнения связей системы не могут нарушаться в процессе удара.

Состояние системы в конце первой фазы удара описывается уравнением

$$\sum m_i (u_i - v_{i0})\, \delta x_i = 0 \tag{2.3}$$

в котором v_{i0} обозначают скорости системы перед ударом, а «возможные перемещения» δx_i подчинены условиям

$$\sum p_{\alpha i} \delta x_i = 0, \qquad \sum r_{\beta i} \delta x_i = 0$$

Примечание. Вполне может случиться, что налагающихся на систему односторонних связей столько, что общее число уравнений (1.1) и (1.2) равно или превосходит $3n$. Например материальная точка, движущаяся свободно в пространстве, может быть соединена гибкими нерастяжимыми нитями с любым числом точек этого пространства и таким образом, что в некоторые моменты движения этой точки будут натягиваться одновременно три или больше нитей. В этом случае скорости системм в конце первой фазы удара определяются просто уравнениями (2.1) и (2.2).

Из уравнения (2.3) и соотношений для «возможных перемещений» немедленно вытекают уравнения

$$m_i (u_i - v_{i0}) + \sum \lambda_\alpha p_{\alpha i} + \sum \mu_\beta r_{\beta i} = 0 \tag{2.4}$$

где λ_α и μ_β — неопределенные множители. Найдем их. Для этого значения u_i из (2.4) подставим в уравнения (2.2), получим

$$\sum a_{\alpha\gamma} \lambda_\alpha + \sum b_{\beta\gamma} \mu_\beta = 0$$

Здесь

$$a_{\alpha\gamma} = \sum \frac{1}{m_i} p_{\alpha i} p_{\gamma i}, \qquad b_{\beta\gamma} = \sum \frac{1}{m_i} r_{\beta i} p_{\gamma i} \tag{2.5}$$

Учитывая, что определитель последней системы $A = |a_{\alpha\gamma}|$ отличен от нуля (в этом можно убедиться, повторив аналогичное доказательство из работы [2]), выводим из нее

$$\lambda_\alpha = -\sum \frac{A_{\gamma\alpha}}{A} b_{\beta\gamma} \mu_\beta$$

Здесь $A_{\gamma\alpha}$ — алгебраические дополнения элементов $a_{\alpha\gamma}$ в определителе A. Последние выражения позволяют исключить из (2.4) неопределенные множители λ_α. Тогда система (2.4) приводится к виду

$$u_i - v_{i0} = \sum R_{i\beta} \mu_\beta, \qquad R_{i\beta} = \frac{1}{m_i} \left(\sum \frac{A_{\gamma\alpha}}{A} b_{\beta\gamma} p_{\alpha i} - r_{\beta i} \right) \tag{2.6}$$

Отметим, что величины $R_{i\beta}$ удовлетворяют тождествам

$$\sum p_{\alpha i} R_{i\beta} = 0, \qquad \sum r_{\delta i} R_{i\beta} = -\sum m_i R_{i\delta} R_{i\beta} \tag{2.7}$$

Чтобы убедиться в этом, следует повторить применительно к величинам $R_{i\beta}$ соответствующие выкладки из [1].

Равенства (2.6) дают явные выражения для u_i через множители μ_β. Чтобы найти последние, подставим значения u_i из (2.6) в равенства

(2.1). Получим систему

$$\sum c_{\delta\beta}\mu_\beta + \sum r_{\delta i}v_{io} + r_\delta = 0 \qquad \left(c_{\delta\beta} = \sum r_{\delta i}R_{i\beta}\right) \tag{2.8}$$

Покажем, что ее определитель $C = |c_{\delta\beta}|$ отличен от нуля.

В самом деле, допустим, он равен нулю. Тогда можно выбрать величины k_δ, не все равные нулю, такие, что

$$\sum c_{\delta\beta}k_\delta = \sum r_{\delta i}R_{i\beta}k_\delta = 0$$

Отсюда на основании тождеств (2.7) получим

$$\sum m_i R_{i\beta}\psi_i = 0 \qquad \left(\psi_i = \sum R_{i\delta}k_\delta\right) \tag{2.9}$$

С другой стороны, имеем

$$\sum m_i\psi_i^2 = \sum k_\delta R_{i\delta}m_i\psi_i$$

Отсюда в силу тождеств (2.9) следует $\Sigma m_i\psi_i^2 = 0$, или $\psi_i = 0$. Таким образом имеем

$$\psi_i = \sum R_{i\delta}k_\delta = 0$$

Эти равенства могут быть переписаны

$$\sum p_{\alpha i}l_\alpha + \sum r_{\delta i}k_\delta = 0 \qquad \left(l_\alpha = -\sum \frac{A_{\gamma\alpha}}{A} b_{\delta\gamma}k_\delta\right)$$

Среди l_α и k_δ не все равны нулю (хотя бы среди k_δ — по предположению). Поэтому между уравнениями (2.1) и (2.2) должна существовать линейная зависимость, что невозможно. Значит наше предположение относительно определителя C ложно и этот определитель отличен от нуля. Что и требовалось. Учитывая доказанный факт, выводим из (2.8)

$$\mu_\beta = -\sum \frac{C_{\beta\delta}}{C}\left(\sum r_{\delta i}v_{io} + r_\delta\right) \tag{2.10}$$

где через $C_{\beta\delta}$ обозначены алгебраические дополнения элементов $c_{\delta\beta}$ в определителе C.

Итак, состояние системы в конце первой (пассивной) фазы удара описывается равенствами (2.6), в которых μ_β имеют вид (2.10). Вторая фаза удара согласно определению заключается в том, что на систему в состоянии, которого она достигла к концу предыдущей фазы удара, воздействует импульс реакций, развитых на ней связями (1.1) и (1.2). При этом считается, что к началу второй фазы удара односторонность связей (1.2) восстановлена. Скорости системы v_i в конце второй фазы удара реализуют минимум выражения

$$\sum \frac{m_i}{2}\left(v_i - u_i - \sum R_{i\beta}\mu_\beta\right)^2 \tag{2.11}$$

при условиях

$$\sum p_{\alpha i}v_i + p_\alpha = 0, \qquad \sum r_{\beta i}v_i + r_\beta \geqslant 0 \tag{2.12}$$

В соответствии с изложенной в [1] методикой отбрасываем в (2.12) неравенства. Тогда искомые v_i найдутся из уравнений

$$m_i\left(v_i - u_i - \sum R_{i\beta}\mu_\beta\right) + \sum \lambda_\gamma p_{\gamma i} = 0 \tag{2.13}$$

где λ_γ — неопределенные множители. Для их определения исключим при помощи последних уравнений из равенств (2.12) величины v_i, получим

$$\sum a_{\alpha\gamma}\lambda_\gamma - \sum p_{\alpha i}u_i - \sum p_{\alpha i}R_{i\beta}\mu_\beta = p_\alpha$$

где $a_{\alpha\gamma}$ имеют смысл (2.5). В силу равенств (2.2) и (2.7) свободные члены этой системы равны нулю; определитель же системы — A — отличен от нуля; но тогда из этой системы следует, что все λ_γ должны быть равны нулю; таким образом из (2.13) имеем

$$v_i - u_i = \sum R_{i\beta}\mu_\beta \tag{2.14}$$

Эти равенства описывают действительное состояние системы после удара, если определяемые ими значения v_i выполняют все неравенства (2.12). Но это так. В самом деле, значения v_i из (2.14) удовлетворяют соотношениям

$$\sum r_{\beta i}v_i + r_\beta = -\sum r_{\beta i}v_{i0} - r_\beta \tag{2.15}$$

В этом можно убедиться подстановкой в (2.15) выражений v_i из (2.14) и пользуясь затем равенствами (2.1) и (2.8). С другой стороны, перед ударом выполняются неравенства

$$\sum r_{\beta i}v_{io} + r_\beta \leqslant 0$$

Учитывая их в (2.15), немедленно убеждаемся в справедливости не равенств (2.12). Что и требовалось.

Таким образом, действительное состояние системы после удара описывается равенствами (2.14). Исключив из них и из равенств (2.6) промежуточные скорости u_i, получим окончательные формулы

$$v_i - v_{i0} = 2\sum \mathrm{R}_{i\beta}\mu_\beta \tag{2.16}$$

определяющие состояние системы после удара по заданному ее состоянию перед ударом.

3. Выше было отмечено, что состояние системы после удара удовлетворяет соотношениям (2.15).

Покажем, что, в отличие от прочих состояний, допускаемых связями системы и удовлетворяющих соотношениям (2.15), состояние системы после удара таково, что для него при всех δx_i, стесненных соотношениями (1.4), выполняется уравнение (1.3). Для доказательства, очевидно, достаточно показать, что сформулированные условия определяют единственное состояние системы и что последнее является как раз состоянием системы после удара. Следует, однако, отметить, что нет надобности проводить все необходимые здесь выкладки, они практически не отличаются от вкладок, проведенных в предыдущем параграфе при расчете первой фазы удара. Надо только заменить уравнения (2.1) соотношениями (2.15). Значит различие будет только в способе определения неопределенных множителей в уравнениях (2.6).

Таким образом, определяемое сформулированными выше условиями состояние системы описывается равенствами

$$v_i - v_{i0} = \sum R_{i\beta}\nu_\beta \tag{3.1}$$

где неопределенные множители ν_β должны быть найдены при помощи соотношений (2.15). Исключив при помощи (3.1) из (2.15) величины v_i, получим

$$\sum r_{\delta i} v_{i0} + \sum c_{\delta\beta}\nu_\beta + r_\beta = -\sum r_{\delta i} v_{i0} - r_\delta$$

где $c_{\delta\beta}$ имеют тот же смысл, что и в уравнениях (2.8), и далее

$$\sum c_{\delta\beta}\nu_\beta + 2\left(\sum r_{\beta i} v_{i0} + r_\delta\right) = 0$$

Отсюда видно, что эта система с точностью до множителя при свободных членах совпадает с системой (2.8). Следовательно

$$\nu_\beta = 2\mu_\beta \tag{3.2}$$

где μ_β взяты из (2.10). Сравнивая (3.1) с (2.16) и учитывая (3.2), видим, что определяемые (3.1) скорости системы после удара совпадают со скоростями, определяемыми равенствами (2.16). Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. Среди всевозможных состояний системы, допускаемых связями системы и удовлетворяющих соотношениям (2.15), действительным после удара будет то, для которого равенство

$$\sum m_i (v_i - v_{i0})\, \delta x_i = 0$$

выполняется при всех δx_i, подчиненных соотношениям

$$\sum p_{\alpha i}\delta x_i = 0, \qquad \sum r_{\beta i}\delta x_i = 0$$

Следствие. Среди всевозможных состояний системы, допускаемых связями системы и удовлетворяющих соотношениям (2.15), действительным после удара будет то, для которого функция

$$\sum \frac{m_i}{2}(v_i - v_{i0})^2$$

принимает наименьшее значение.

Теорема этого параграфа обосновывает возможность применения основного уравнения механики для описания удара в материальной системе при наложении на нее односторонних связей. Условия (2.15), доопределяющие абсолютно упругий удар, могут быть истолкованы как следствие упругих свойств налагающихся связей. Тогда применение основного уравнения становится особенно наглядным. В момент удара при наложении на систему односторонних связей скорости системы налагаются порождаемые упругостью этих связей дополнительные ограничения. Удар происходит таким образом, что основное уравнение механики (для удара) выполняется для всех «возможных перемещений» системы. Соотношения для «возможных перемещений» получаются по обычным правилам из равенств (1.1) и условий (2.15).

Поступила 20 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Киргетов В. И. К теории абсолютно упругого удара материальных систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
2. Киргетов В. И. Об абсолютно упругом ударе материальных систем. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
3. Наумов А. Л. Теоретическая механика. ч. 2, 1958, Изд. Киев. ун-та.