Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРИНЦИПА ГАУССА НА СИСТЕМЫ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

П. Пэнлеве в своей книге «Лекции о трении» [1] изложил основания общей теории движения механических систем с сухим трением. Пэнлеве показал также, что гипотеза существования твердых тел в совокупности с предположением о конечности ускорений системы может иногда приходить в противоречие с законом сухого трения Кулона. В обсуждении этого парадокса приняли участие Ф. Клейн, Р. Мизес, Г. Гамель, Л. Прандтль и другие ученые. В итоге было намечено несколько возможных способов ликвидации парадокса путем отказа от одной из гипотез или видоизменения закона трения.

Уравнения, полученные П. Пэнлеве для определения ускорений систем с трением в их начальных состояниях, отвечающих ненулевым относительным скоростям скольжения трущихся поверхностей, написаны, однако, в столь общей форме, что остаются неясными некоторые конкретные особенности закона сухого трения. Эти уравнения оказываются, например, формально приложимыми и к системам с «сервосвязями», рассмотренными Бегином [2]. Рассматривая начальные состояния, оставляющие нулями некоторые из относительных скоростей скольжения, П. Пэнлеве пишет: «Исследование случая трения покоя представляется достаточно сложным, но упростить его невозможно» и в дальнейшем ограничивается исследованием частных случаев. В книге Пэнлеве приведен однако анализ движений для столь большого числа частных механических систем, что становятся ясными все конкретные правила построения уравнений движения и поэтому не встречается значительных трудностей при записи общих уравнений движения в форме специфической для закона сухого трения и только для него. Выполнению этой задачи посвящена первая часть работы.

Во второй части работы рассматриваются системы, в которых все максимумы сил трения возможно определить в зависимости от координат, скоростей, времени и активных сил до определения ускорений системы. Показано, что действительное ускорение системы реализует минимум некоторой функции, зависящей от ускорений и отличающейся лишь слагаемым, содержащим максимумы сил трения, от Гауссова принуждения. Этот вариационный принцип позволяет выделить ускорения, согласные с законом трения, даже для начальных состояний, оставляющих нулями некоторые из относительных скоростей скольжения.

1. Рассмотрим механическую систему с голономными координатами $q_1, \ldots, q_{n+k+l}$, подчиненную идеальным голономным связям, неголономным линейным связям

$$A_{i1}\dot{q}_1 + \ldots + A_{i,n+k+l}\dot{q}_{n+k+l} = 0 \qquad (i = 1,\ldots,l) \tag{1.1}$$

с определением возможных перемещений

$$A_{i1}\delta q_1 + \ldots + A_{i,n+k+l}\delta q_{n+k+l} = 0 \qquad (i = 1,\ldots,l) \tag{1.2}$$

и голономным освобождающим связям с сухим трением

$$q_{n+1} \leqslant 0, \ \ldots, \ q_{n+k} \leqslant 0 \tag{1.3}$$

которые выражают то обстоятельство, что при превращении (1.3) в равенства точки или тела системы скользят с трением по телам системы или внешним по отношению к системе.

Все связи для простоты выкладок положим не зависящими явно от времени.

Закон сухого трения возьмем в следующей форме.

Пусть тело S_1 (или точка) системы осуществляет контакт в точке пространства p с телом S_2, причем к поверхности тела S_1, либо S_2 существует нормаль в точке контакта. Если $N > 0$ есть сила нормального давления тела S_2 на S_1, направленная внутрь S_1, а $\mathbf{v}$ есть скорость точки p_1 тела S_1, находящейся в точке контакта относительно тела S_2, то сила трения равна по величине kN, приложена в точке p_1 и направлена противоположно $\mathbf{v}$, где $k > 0$ — коэффициент трения, зависит только от координат точки контакта по отношению к телам S_1 и S_2.

Оставляя пока в стороне случай $\mathbf{v} = 0$, рассмотрим состояние системы

$$q_1, \ldots, q_n, q_{n+1} = 0, \ldots, q_{n+k} = 0, \quad q_{n+k+1}, \ldots, \quad q_{n+k+l}$$
$$\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \dot{q}_{n+1} = 0, \ldots, \quad \dot{q}_{n+k} = 0, \quad \dot{q}_{n+k+1}, \ldots, \quad \dot{q}_{n+k+l}$$

согласное с (1.2) и такое, что ни одна из относительных скоростей не нуль.

Сообщим системе возможное перемещение

$$\delta q_1, \ldots, \delta q_n, \ \delta q_{n+1} \leqslant 0, \ldots, \delta q_{n+k} \leqslant 0 \tag{1.4}$$

Начиная отсюда и дальше будем считать, что в качестве независимых перемещений выбраны первые $n+k$.

Рассмотрим все точки $p_1, \ldots, p_s$ пространства, в которых осуществляется контакт. Поскольку, по предположению, в каждой точке хотя бы к одному из тел существует нормаль, выберем систему координат с осью z_i, направленной по нормали наружу, а оси x_i, y_i направим взаимно перпендикулярно, перпендикулярно к оси z_i и зафиксируем на теле.

Пусть в результате сообщения возможного перемещения (1.4) каждая из точек тел, находящихся в i-той точке контакта, получила по отношению к i-той системе координат перемещение δx_i, δy_i, δz_i $(i = 1, \ldots, s)$.

Мы можем занумеровать все перемещения таким образом потому, что ненулевое относительное перемещение имеет только лишь одна из двух точек, находящихся в контакте.

Так как δz_i обращаются в нули, когда $\delta q_{n+1} = \ldots = \delta q_{n+k} = 0$, то выражения δx_i, δy_i, δz_i через δq_i будут иметь вид:

$$\begin{gathered}
\delta x_i = \alpha_{i1}^1 \delta q_1 + \ldots + \alpha_{i,\,n+k}^1 \delta q_{n+k} \\
\delta y_i = \alpha_{i1}^2 \delta q_1 + \ldots + \alpha_{i,\,n+k}^2 \delta q_{n+k} \\
\delta z_i = \alpha_{i,\,n+1}^3 \delta q_{n+1} + \ldots + \alpha_{i,n+k}^3 \delta q_{n+k} \\
\alpha_{i1}^3 = \ldots = \alpha_{in}^3 = 0
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Работа нормальной реакции и силы трения на виртуальном перемещении δx_i, δy_i, δz_i равна

$$-k_i N_i \frac{v_{ix}}{|\mathbf{v}_i|} \delta x_i - k_i N_i \frac{v_{iy}}{|\mathbf{v}_i|} \delta y_i + N_i \delta z_i$$

Здесь $\mathbf{v}_i$ — относительная скорость с проекциями v_{ix}, v_{iy} на оси x_i, y_i. Полагая поочередно в принципе возможных перемещений независимые

$\delta q_1, \ldots, \delta q_{n+k}$ нулями все, кроме δq_j, получим уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = Q_j + \sum_{i=1}^{s} - k_i N_i \frac{v_{ix}\alpha_{ij}^1 + v_{iy}\alpha_{ij}^2}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}} + N_i \alpha_{ij}^3 \qquad (j = 1, \ldots, n+k) \quad (1.6)$$

где S — энергия ускорений для системы без связей (1.3), а Q_j — обобщенные силы.

Если

$$2S = \sum_{ij=1}^{n+k} \gamma_{ij} \ddot{q}_i \ddot{q}_j + \beta_i \ddot{q}_i + \delta$$

где γ_{ij}, β_i, δ не зависят от $\ddot{q}_j$, то уравнения

$$u_j = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} - \beta_j = \gamma_{1j}\ddot{q}_1 + \ldots + \gamma_{n+k,j}\ddot{q}_{n+k} \qquad (j = 1, \ldots, n+k)$$

имеют единственное решение, так как квадратичная форма

$$\sum_{i,\, j=1}^{n+k} \gamma_{ij} \ddot{q}_i \ddot{q}_j$$

есть форма определенно положительная и ее дискриминант, совпадающий с определителем последней системы, не равен нулю. Пусть ее решение

$$\ddot{q}_j = \gamma_{1j}' u_1 + \ldots + \gamma_{n+k,\, j}' u_{n+k}$$

Решая систему (1.6), получим

$$\ddot{q}_j = \sum_{m=1}^{n+k} \gamma_{mj}' \left(Q_m - \beta_m + \sum_{i=1}^{s} - k_i N_i \frac{v_{ix}\alpha_{im}^1 + v_{iy}\alpha_{im}^2}{|\mathbf{v}_i|} + \alpha_{im}^3 N_i \right)$$
$$(j = 1, \ldots, n+k)$$

Приравнивая нулю все $\ddot{q}_{n+1}, \ldots, \ddot{q}_{n+k}$, получим уравнения для определения реакций

$$\sum_{m=1}^{n+k} \gamma_{mj}' \left(Q_m - \beta_m + \sum_{i=1}^{s} - k_i N_i \frac{v_{ix}\alpha_{im}^1 + v_{iy}\alpha_{im}^2}{|\mathbf{v}_i|} + \alpha_{im}^3 N_i \right) = 0$$
$$(j = n+1, \ldots, n+k)$$

Если из них оказывается возможным однозначно определить значения всех линейных комбинаций N_i, от которых зависят правые части первых n уравнений и притом значениям всех этих линейных комбинаций удастся удовлетворить некоторыми положительными N_i, то движение будет определено и притом единственным образом. Поясним последнее утверждение примером. Пусть твердое тело может совершать плоское одномерное движение, скользя по неподвижной шероховатой прямой, совпадающей с осью x, о которую оно опирается целым прямолинейным участком AB. Если коэффициент трения k постоянен во всех точках прямой x, то сила трения не зависит от распределения нормальных давлений по участку AB, а только лишь от их геометрической суммы и равна $+ kY\dot{x}/|\dot{x}|$, где Y есть сумма проекций всех приложенных к телу сил на перпендикулярную к оси x ось y, а $\dot{x}$ есть скорость тела. Отсюда видно, что движение при ненулевой начальной скорости определится однозначно, хотя мы и не можем определить распределение нормальных давлений.

2. Рассмотрение случая нулевых относительных скоростей начнем с примера.

Вообразим безынертный стержень, несущий точечные массы m_1 и m_2 на расстоянии a одна от другой. Пусть эти массы прижаты к шероховатой плоскости с коэффициентом трения k силами $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$, нормальными к плоскости, и пусть в этой плоскости к стержню приложена сила $\mathbf{F}$ на расстоянии b от точки m_1, отсчитанному от m_1 к m_2 и составляющая угол φ с направлением от m_1 к m_2.

В зависимости от параметров задачи могут представляться четыре случая: 1) стержень находится в покое; 2) стержень вращается вокруг m_1; 3) стержень вращается вокруг m_2; 4) стержень вращается вокруг точки O_1, не совпадающей ни с m_1 ни с m_2, или совершает поступательное перемещение.

Все термины «покой», «вращение», «поступательное перемещение» следует понимать в смысле распределений ускорений в начальный момент.

Согласно закону трения покой будет иметь место в том случае, если уравнениям равновесия стержня

$$aR_1 \sin\alpha_1 + (a - b) F \sin\varphi = 0 \tag{2.1}$$

$$aR_2 \sin\alpha_2 + bF \sin\varphi = 0 \tag{2.2}$$

$$R_1 \cos\alpha_1 + R_2 \cos\alpha_2 + F \cos\varphi = 0 \tag{2.3}$$

возможно удовлетворить реакциями $|R_1| \leqslant kN_1$, $|R_2| \leqslant kN_2$. Здесь α_1 и α_2 — углы, составленные реакциями $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ с осью x, направленной из m_1 к m_2. Первые два уравнения суть уравнения моментов относительно m_2 и m_1, а третье — уравнение проекций на ось x.

Вращение стержня вокруг m_1 с угловым ускорением ε будет иметь место, если при наличии силы kN_2 и силы инерции $m_2 a\varepsilon$, направленных против ускорения точки m_2, уравнениям «равновесия» стержня

$$a\ R_1 \sin\alpha_1 + (a - b) F \sin\varphi = 0 \tag{2.4}$$

$$a(kN_2 + m_2\varepsilon a) = bF \sin\varphi \tag{2.5}$$

$$R_1 \cos\alpha_1 + F \cos\varphi = 0 \tag{2.6}$$

возможно удовлетворить реакцией $|R_1| \leqslant kN_1$.

Вращение вокруг m_2 будет иметь место, если уравнениям

$$(kN_1 + m_1\varepsilon a)\, a = (a - b) F \sin\varphi \tag{2.7}$$

$$aR_2 \sin\alpha_2 + bF \sin\varphi = 0 \tag{2.8}$$

$$R_2 \cos\alpha_2 + F \cos\varphi = 0 \tag{2.9}$$

возможно удовлетворить некоторыми ε и $|R_2| \leqslant kN_2$.

Если через r_1 и r_2 обозначить расстояния точек m_1 и m_2 до центра O_1, через h—расстояние линии действия силы $\mathbf{F}$ от O_1, а через $(kN_1+m_1\varepsilon r_1)_x$— проекцию на x вектора $(kN_1 + m_1\varepsilon r_1)$, направленного против ускорения точки m_1 и т. д., то вращение вокруг O_1 будет удовлетворять уравнениям

$$(kN_1 + m_1\varepsilon r_1) r_1 + (kN_2 + m_2\varepsilon r_2) r_2 = Fh \tag{2.10}$$

$$(kN_1 + m_1\varepsilon r_1)_x + (kN_2 + m_2\varepsilon r_2)_x + F \cos\varphi = 0 \tag{2.11}$$

$$(kN_1 + m_1\varepsilon r_1)_y + (kN_2 + m_2\varepsilon r_2)_y + F \sin\varphi = 0 \tag{2.12}$$

Здесь первое уравнение есть уравнение моментов относительно O_1, второе есть уравнение проекций на ось x, причем, в силу известных теорем кинематики, $(kN_1 + m_1\varepsilon r_1)_x$ и $(kN_2 + m_2\varepsilon r_2)_x$ имеют один и тот же знак. Третье уравнение есть уравнение проекции на ось y, направленную перпендикулярно к оси x в сторону силы $\mathbf{F}$.

Поступательное перемещение с ускорением w удовлетворяет уравнениям

$$kN_1 + m_1w + kN_2 + m_2w = F \tag{2.13}$$

$$(kN_1 + m_1w)\,a = (a - b)\,F \tag{2.14}$$

$$(kN_2 + m_2w)\,a = Fb \tag{2.15}$$

При таком большом числе различных возможностей возникают три вопроса. 1) Могут ли при одних и тех же параметрах осуществляться несколько вариантов?; 2) Могут ли уравнения какого-либо варианта, например четвертого, иметь более одного решения?; 3) Могут ли встретиться параметры, при которых не осуществляется ни один из вариантов?

Сравнение уравнений (2.2) с (2.5), (2.1) с (2.7) и (2.5) с (2.8) показывает, что из первых трех вариантов осуществляется не более одного.

Так как моменты сил $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ относительно O_1 по модулю меньше, чем $(kN_1 + m_1\varepsilon r_1)\,r_1$ и $(kN_2 + m_2\varepsilon r_2)\,r_2$ соответственно, а (2.1) противоречит (2.14), то первый и четвертый варианты также исключают друг друга.

Следствием уравнений (2.10), (2.11), (2.12) является уравнение моментов относительно точки m_2

$$(kN_1 + m_1\varepsilon r_1)_y\,a + (a - b)\sin\varphi = 0\,F$$

Сравнивая его с (2.4), получаем

$$(kN_1 + m_1\varepsilon r_1)_y = R_1\sin\alpha_1$$

Из (2.11) и (2.6), следует, что

$$(kN_1 + m_1\varepsilon r_1)_x + (kN_2 + m_2\varepsilon r_2)_x = R_1\cos\alpha_1$$

Как это было отмечено выше, оба члена левой части последнего уравнения имеют одинаковые знаки.

Возводя в квадрат последние два уравнения и складывая, получим

$$(kN_1 + m_2\varepsilon r_1)^2 + 2\,(kN_1 + m_1\varepsilon r_1)_x\,(kN_2 + m_2\varepsilon r_2)_x +$$
$$+ (kN_2 + m_2\varepsilon r_2)_x{}^2 = R_1{}^2 > k^2N_1{}^2$$

что невозможно. Сравнивая еще (2.6) и (2.13), придем окончательно к выводу, что второй и четвертый варианты исключают друг друга. Аналогично доказательство проводится для третьего и четвертого вариантов.

В итоге на первый вопрос получен отрицательный ответ и это значит, что при любых параметрах может осуществляться только один из четырех вариантов.

Для дальнейшего удобно, обозначив через $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ компоненты ускорения точки m_1 и через $\ddot{x}$, $\ddot{y} + \varepsilon a$ компоненты ускорения точки m_2, написать уравнения для четвертого варианта в виде

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = F\cos\varphi - kN_1 \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}} - kN_2 \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2+(\ddot{y}+\varepsilon a)^2}}$$

$$m_1\ddot{y} + m_2(\ddot{y}+\varepsilon a) = F\sin\varphi - kN_1 \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}} - kN_2 \frac{\ddot{y}+\varepsilon a}{\sqrt{\ddot{x}^2+(\ddot{y}+\varepsilon a)^2}}$$

$$m_2(\ddot{y}+\varepsilon a)a = Fb\sin\varphi - kN_2 \frac{a(\ddot{y}+\varepsilon a)}{\sqrt{\ddot{x}^2+(\ddot{y}+\varepsilon a)^2}}$$

Нетрудно заметить, что эти уравнения суть уравнения экстремума для функции

$$S + \Psi = \frac{1}{2} m_1(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2) + \frac{1}{2} m_2(\ddot{x}^2+(\ddot{y}+\varepsilon a)^2) - F\ddot{x}\cos\varphi -$$
$$- F(\ddot{y}+b\varepsilon)\sin\varphi + kN_1\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2} + kN_2\sqrt{\ddot{x}^2+(\ddot{y}+\varepsilon a)^2}$$

состоящей из энергии ускорений S и функции Ψ — однородной функции первого измерения относительно ускорений. Ниже для общего случая будет показано, что:

a) ускорения, соответствующие любому из четырех вариантов, реализуют изолированный минимум функции $S+\Psi$;

b) Уравнения любого варианта допускают лишь одно решение относительно ускорений (движение). (Мы будем считать, что первому варианту соответствует нулевое решение, которое для него, очевидно, единственно);

c) функция $S+\Psi$ имеет хотя бы один изолированный минимум;

d) для того, чтобы функция $S+\Psi$ имела изолированный минимум в некоторой точке пространства мыслимых ускорений достаточно и необходимо, чтобы функция Π — однородная первой степени относительно ускорений (часть отклонения функции $S+\Psi$) могла принимать лишь неотрицательные значения.

Поскольку b) содержит отрицательный ответ на второй вопрос, то остается дать ответ лишь на третий вопрос.

Допустим, что первый вариант не выполнен, то есть уравнениям равновесия стержня нельзя удовлетворить реакциями, не бо́льшими по модулю, чем максимумы сил трения. Покажем, что в этом случае функция $S+\Psi$ не имеет минимума. Функция Π в данном случае совпадает с функцией

$$\Psi = -F\ddot{x}\cos\varphi - F(\ddot{y}+\varepsilon b)\sin\varphi + kN_1\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2} + kN_2\sqrt{\ddot{x}^2+(\ddot{y}+\varepsilon a)^2}$$

Достаточно показать, что функция Ψ наверняка может принимать отрицательные значения в рассматриваемом случае. Заметим, что для этого достаточно найти точку O_1 такую, чтобы момент силы $\mathbf{F}$ относительно этой точки оказался бы большим, чем сумма моментов сил трения, соответствующих этому центру.

Действительно, тогда работа всех сил на возможном перемещении, соответствующем элементарному вращению вокруг O_1, будет положительна. Так как в данном случае множество мыслимых ускорений и возможных перемещений совпадают с точностью до множителя, то и Ψ может быть сделана отрицательной, так как это есть «работа всех сил на мыслимом ускорении», взятая с обратным знаком.

Если $|bF\sin\varphi| > kN_2 a$ или $|(a-b)F\sin\varphi| > kN_1 a$, то Ψ становится отрицательной при $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ либо при $\ddot{x} = \ddot{y} + \varepsilon a = 0$, то есть при повороте вокруг m_1 или m_2.

Если не выполнено ни одно из этих неравенств, то приложим к стержню силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, равные по величине kN_1 и kN_2 в точках m_1 и m_2 так, чтобы их проекции на стержень имели одинаковые знаки и чтобы $F_{1y}a + (a-b)F\sin\varphi = 0$, $F_{2y}a + bF\sin\varphi = 0$.

Если эти силы не параллельны, то и перпендикуляры к ним пересекутся в некоторой точке O_1, если ни одна из них не перпендикулярна к стержню, то O_1 и есть центр искомого поворота, при котором Ψ отрицательна.

Действительно, уравнение моментов относительно O_1 необходимо нарушится, так как O_1 лежит вне оси x и это уравнение, если бы оно выполнилось, дополнило бы два предыдущих до полной системы уравнений равновесия, а это, согласно предположению, невозможно.

Если силы параллельны, то они необходимо будут направлены в одну сторону, и тогда на перемещении, противоположном им, Ψ будет отрицательной, если они не перпендикулярны оси y.

Действительно, уравнение равновесия в проекции на эти силы должно необходимо нарушится, так как в противном случае уравнения равновесия выполнились бы все. Если они перпендикулярны к оси x, то это значит, что $kN_1 + kN_2 = F\sin\varphi$ и, следовательно, Ψ станет отрицательной на перемещении вдоль силы $\mathbf{F}$. Если только одна из сил, пусть $\mathbf{F}_1$, оказалась перпендикулярной к оси x и равной kN_1, то система всех трех сил приведется к ненулевой равнодействующей F_3, направленной по оси x в ту же сторону, что и F_x.

Пусть угол между $\mathbf{F}_2$ и осью x равен α_2. Если, не меняя модуля $\mathbf{F}_1$, отклонить ее от перпендикуляра к оси x на малый угол δ, то центр O_1, соответствующий этим двум силам, найдется из уравнений

$$x_1\sin\delta - y_1\cos\delta = 0, \qquad (x_1 - a)\cos\alpha_2 - y_1\sin\alpha_2 = 0$$

Сумма моментов всех сил относительно O_1 будет

$$(F_3 + kN_1\sin\delta)\,y_1 - kN_1(1-\cos\delta)\,x_1 =$$
$$= [(F_3 + kN_1\sin\delta)\sin\delta - kN_1(1-\cos\delta)]\,\frac{a\cos\alpha_2}{\cos\delta\cos\alpha_2 - \sin\delta\sin\alpha_2}$$

При достаточно малом δ она может быть сделана не нулем. Итак $S + \Psi$ наверняка не имеет минимума в нуле, если невозможно удовлетворить уравнения равновесия реакциями не большими по модулю, чем kN_1 и kN_2.

Пусть теперь невозможно удовлетворить второму варианту. Для второго варианта функция Π имеет вид

$$\Pi = (kN_2 + m_2\varepsilon^* a - F\sin\varphi)\,\ddot{y} - F\ddot{x}\cos\varphi + kN_1\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

где ε^* есть решение уравнения (2.5).

Она будет принимать одни только неотрицательные значения только лишь тогда, когда

$$(kN_2 + m_2\varepsilon^* a - F\sin\varphi)^2 + F^2\cos^2\varphi \leqslant k^2 N_1^2$$

Нетрудно проверить, что это неравенство выполнится только лишь тогда, когда $R_1^2 \leqslant k^2 N_1^2$. Следовательно, у функции $S+\Psi$ заведомо нет минимума в точке $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$, $\varepsilon = \varepsilon^*$, если невозможно удовлетворить второму варианту. Для третьего варианта доказательство аналогично.

На основании приведенных рассуждений и свойства а) приходим к выводу, что движение согласно с законом трения тогда и только тогда, когда $S+\Psi$ достигает минимума. Поскольку согласно с) такой минимум всегда существует, то, следовательно, при любых параметрах существует движение, согласное с законом трения. Если стержень нагружен парой, либо силой параллельной ему, то выводы аналогичны.

Суммируя результаты, получаем: всегда существует движение (или покой) стержня, согласное с законом трения, движение это единственно и реализует изолированный минимум функции $S+\Psi$.

Определение движений при начальных условиях, оставляющих нулями некоторые относительные скорости, мы будем делать по следующей общей схеме:

Пусть в начальный момент $\mathbf{v}_1 = \ldots = \mathbf{v}_\tau = 0$ $(\tau \leqslant s)$.

Предположим, что $\dot{\mathbf{v}}_1 = \ldots = \dot{\mathbf{v}}_\nu = 0$ и ни одно из $\dot{\mathbf{v}}_{\nu+1}, \ldots, \dot{\mathbf{v}}_\tau$ не равно нулю. Реакции $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\nu$ в точках $p_1, \ldots, p_\nu$ положим неопределенными, но лежащими в конусах трения и направленными внутрь того тела, к которому приложены, а силы трения в точках $p_{\nu+1}, \ldots, p_\tau$ положим равными $k_i N_i$ и направленными противоположно векторам $\dot{\mathbf{v}}_{\nu+1}, \ldots, \dot{\mathbf{v}}_\tau$.

Выбор сил трения в точках $p_{\nu+1}, \ldots, p_\tau$ диктуется тем соображением, что эти и только эти силы непрерывно переходят в силы, направленные против относительной скорости, как только последняя перестает быть нулем [1].

Заметим также, что поскольку $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\tau$ равны нулю в начальный момент, то для этого же момента

$$(\dot{\mathbf{v}}_i)_{ix} = \dot{v}_{ix}, \qquad (\dot{\mathbf{v}}_i)_{iy} = \dot{v}_{iy} \qquad (i = 1, \ldots, \tau)$$

Уравнения движения, составленные согласно указанному предположению, имеют вид:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j}\right)^0 = Q_j + \sum_{i=\tau+1}^{s} - k_i N_i \frac{v_{ix}\alpha_{ij}^1 + v_{iy}\alpha_{ij}^2}{|\mathbf{v}_i|} + \alpha_{ij}^3 N_i +$$
$$+ \sum_{i=\nu+1}^{\tau} - k_i N_i \frac{\dot{v}_{ix}\alpha_{ij}^1 + \dot{v}_{iy}\alpha_{ij}^2}{|\dot{\mathbf{v}}_i|} + \alpha_{ij}^3 N_i + \sum_{i=1}^{\nu} R_{1i}\alpha_{ij}^1 + R_{2i}\alpha_{ij}^2 + R_{3i}\alpha_{ij}^3 \quad (2.16)$$

Здесь символ $(\ )^0$ означает, что в частной производной положено $\ddot{q}_{n+1} = \ldots = \ddot{q}_{n+k} = \dot{\mathbf{v}}_1 = \ldots = \dot{\mathbf{v}}_\nu = 0$. Если после наложения этих условий осталось лишь $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_{n'}$ $(n' < n)$ независимых обобщенных ускорений и уравнения (2.1) возможно удовлетворить некоторыми $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_{n'}$, $N_i > 0$, $R_{3i} k \geqslant \sqrt{R_{1i}^2 + R_{2i}^2}$, то это движение не противоречит закону трения.

Если же этого сделать невозможно, то нужно испытать другое, аналогичное предположение, заключающееся в том, что другие относительные ускорения полагаются нулями, а остальные отличными от нуля.

В поисках движений, не противоречащих закону трения, придется проделать $C_\tau^1 + C_\tau^2 + \ldots + C_\tau^\tau = 2^\tau - 1$ проб, где C_τ^i обозначает число сочетаний из τ элементов по i.

В обоих изложенных случаях (1.6) и (2.16) открытым остается вопрос о существовании и единственности системы обобщенных ускорений, удовлетворяющих уравнениям (1.6) и (2.16).

Как показал Пэнлеве, возможны случаи, когда такие уравнения либо вовсе не имеют решений, либо имеют их несколько.

3. Ниже будем рассматривать системы с начальными условиями, отвечающими некоторым нулевым относительным скоростям и такие, в которых все $N_i > 0$, входящие в уравнения для определения движения, могут быть определены единственным образом до определения обобщенных ускорений из условий

$$\ddot{q}_{n+1} = \ldots = \ddot{q}_{n+k} = 0$$

В силу сделанного предположения можно считать известной виртуальную работу сил трения в точках с ненулевыми относительными скоростями, так как в этих точках силы трения известны по величине и по направлению.

Пусть теперь относительные скорости $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\tau$ в точках контакта $p_1, \ldots, p_\tau$ — нули в начальный момент и пусть среди величин v_{1x}, $v_{1y}, \ldots, v_{\tau x}$, $v_{\tau y}$ есть $\sigma \leqslant 2\tau$ независимых $v_1, \ldots, v_\sigma$ и v_{ix}, v_{iy} выражаются через них по формулам

$$v_{ix} = \beta_{i1}^1 v_1 + \ldots + \beta_{i\sigma}^1 v_\sigma, \qquad v_{iy} = \beta_{i1}^2 v_1 + \ldots + \beta_{i\sigma}^2 v_\sigma \qquad (i = 1, \ldots, \tau) \quad (3.1)$$

Для указанных начальных условий $v_1 = \ldots = v_\sigma = 0$, следовательно

$$\dot{v}_{ix} = \beta_{i1}^1 \dot{v}_1 + \ldots + \beta_{i\sigma}^1 \dot{v}_\sigma, \qquad \dot{v}_{iy} = \beta_{i1}^2 \dot{v}_1 + \ldots + \beta_{i\sigma}^2 \dot{v}_\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots, \tau) \quad (3.2)$$

Кроме того, возможные перемещения δx_i, δy_i выражаются через возможные перемещения $v_1 \delta t, \ldots, v_\sigma \delta t$ по формулам

$$\delta x_i = \beta_{i1}^1 v_1 \delta t + \ldots + \beta_{i\sigma}^1 v_\sigma \delta t, \qquad \delta y_i = \beta_{i1}^2 v_1 \delta t + \ldots + \beta_{i\sigma}^2 v_\sigma \delta t \qquad (3.3)$$

аналогичным (3.1). Заметим, что в уравнениях (3.1) и (3.3) под $v_1, \ldots, v_\sigma$ мыслятся некоторые ненулевые возможные скорости, в отличие от действительных нулевых, а указанное представление возможного перемещения справедливо потому, что связи не содержат явно времени.

Так как v_{ix}, v_{iy} нули, то

$$(\dot{\mathbf{v}}_i)_{ix} = \dot{v}_{ix}, \qquad (\dot{\mathbf{v}}_i)_{iy} = \dot{v}_{ix}$$

Пусть теперь $v_1, \ldots, v_n$ — какая-либо система неголономных переменных, дополняющая переменные $v_1, \ldots, v_\sigma$ до полной, и пусть $Q_1', \ldots, Q_n'$ — обобщенные силы, соответствующие этой системе переменных, составленные из активных сил и известных сил трения в точках с ненулевыми относительными скоростями, а $S'(\dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_n)$ — энергия ускорений, выраженная через новые переменные.

Предположим, что из равенства нулю всех $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\tau$ следует, что и все $\dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_n$ также нули.

Предположение, что $\dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_n$ — нули, будет согласным с законом трения, если уравнениям

$$Q_j' + \sum_{i=1}^{\tau} R_{1i}\beta_{ij}^1 + R_{2i}\beta_{ij}^2 = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots, n) \tag{3.4}$$

возможно удовлетворить при выполнении неравенств

$$R_{1i}^2 + R_{2i}^2 \leqslant k_i^2 N_i^2 \tag{3.5}$$

где N_i, согласно предположению, известны.

Покажем, что при выполнении (3.4) и (3.5) функция

$$S' + \Psi = S' - \sum_{i=1}^{n} Q_i'\dot{v}_i + \sum_{i=1}^{\tau} k_i N_i \sqrt{\dot{v}_{ix}^2 + \dot{v}_{iy}^2}$$

имеет в нуле изолированный минимум. Для этого достаточно и необходимо, чтобы Ψ в окрестности нуля могла принимать только неотрицательные значения.

Достаточность очевидна, так как S' при данных начальных условиях есть определенно положительная квадратичная форма $\dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_n$. Для доказательства необходимости допустим противное, то есть предположим, что $\Psi(\dot{v}_1^\circ, \ldots, \dot{v}_n^\circ) = -\gamma < 0$. Так как Ψ есть однородная функция первого измерения, то $\Psi(t\dot{v}_1^\circ, \ldots, t\dot{v}_n^\circ) = -t\gamma$. Всегда найдется такое $R^2 > 0$, что $S' \leqslant R^2(\dot{v}_1^2 + \ldots + \dot{v}_n^2)$; поэтому $S' + \Psi \leqslant R^2(\dot{v}_1^2 + \ldots + \dot{v}_n^2) + \Psi$ и в точках $t\dot{v}_i^\circ$ будет $S' + \Psi \leqslant R^2 t^2 (\dot{v}_1^{\circ 2} + \ldots + \dot{v}_n^{\circ 2}) - t\gamma$. Ясно, что при $t > 0$ достаточно малом $S' + \Psi$ сможет стать отрицательной.

Если (3.4) выполнены при условиях (3.5), то это значит, что Ψ представимо в виде:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{\tau} R_{1i}\dot{v}_{ix} + R_{2i}\dot{v}_{iy} + k_i N_i \sqrt{\dot{v}_{ix}^2 + \dot{v}_{iy}^2}$$

Ясно, что Ψ неотрицательна, если неотрицателен каждый член этой суммы. Условие его неотрицательности

$$k_i N_i \sqrt{\dot{v}_{ix}^2 + \dot{v}_{iy}^2} \geqslant -R_{1i}\dot{v}_{ix} - R_{2i}\dot{v}_{iy}$$

после возведения в квадрат обеих частей приобретает вид

$$k_i^2 N_i^2 (\dot{v}_{ix}^2 + \dot{v}_{iy}^2) \geqslant R_{1i}^2 \dot{v}_{ix}^2 + R_{2i}^2 \dot{v}_{iy}^2 + 2R_{1i}R_{2i}\dot{v}_{ix}\dot{v}_{iy}$$

Согласно критерию Сильвестра последнее неравенство выполняется, если

$$\begin{vmatrix} k_i^2 N_i^2 - R_{1i}^2 & R_{1i}R_{2i} \\ R_{1i}R_{2i} & k_i^2 N_i^2 - R_{2i}^2 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

Это условие очевидно эквивалентно

$$k_i^2 N_i^2 \geqslant R_{1i}^2 + R_{2i}^2$$

то есть (3.5), что и требовалось доказать.

Доказательства обратного утверждения, то есть возможности решения (3.4) при условиях (3.5), если Ψ неотрицательна, нам не удалось получить, Однако можно доказать, что если Ψ неотрицательна в окрестности нуля, то предположение о том, что хотя бы несколько ускорений, пусть $\dot{v}_1$, $\dot{v}_2$, не нули, приведет к противоречию. Действительно, для определения этих ускорений получим уравнения

$$\frac{\partial S'^\circ}{\partial \dot{v}_1} = Q_1' - \sum k_i N_i \frac{\dot{v}_{ix}{}^\circ \beta_{i1}{}^1 + \dot{v}_{iy}{}^\circ \beta_{i1}{}^2}{\sqrt{\dot{v}_{ix}{}^{\circ 2} + \dot{v}_{iy}{}^{\circ 2}}}$$

$$\frac{\partial S'^\circ}{\partial \dot{v}_2} = Q_2' - \sum k_i N_i \frac{\dot{v}_{ix}{}^\circ \beta_{i2}{}^1 + \dot{v}_{iy}{}^\circ \beta_{i2}{}^2}{\sqrt{\dot{v}_{ix}{}^{\circ 2} + \dot{v}_{iy}{}^{\circ 2}}}$$

где $S'^\circ = S'(\dot{v}_1, \dot{v}_2, 0,0\ldots 0)$, а $\dot{v}_{ix}{}^\circ$, $\dot{v}_{iy}{}^\circ$ суть $\dot{v}_{ix}, \dot{v}_{iy}$, где положено $\dot{v}_3 = \ldots = \dot{v}_\sigma = 0$. Суммирование проводится по всем i, соответствующим ненулевым $\dot{\text{v}}_i$. Умножая уравнения на $\dot{v}_1$ и $\dot{v}_2$ соответственно, складывая и учитывая, что для данных начальных условий $v_1 = \ldots = v_\sigma = 0$ S'° есть определенно положительная квадратичная форма $\dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_\sigma$, получаем

$$2S'^\circ = Q_1'\dot{v}_1 + Q_2'\dot{v}_2 - \sum k_i N_i \sqrt{\dot{v}_{ix}{}^{\circ 2} + \dot{v}_{iy}{}^{\circ 2}}$$

Так как $S'^\circ > 0$, то налицо противоречие, которое показывает, что либо наличие минимума $S' + \Psi$ в нуле гарантирует, что $\dot{v}_1 = \ldots = \dot{v}_\sigma = 0$, либо система не может находиться ни в покое, ни в одном из движений, согласном с законами трения. В последнем случае будем говорить, что закон трения противоречив.

4. Рассмотрим общий случай, когда в начальный момент $v_1, \ldots, v_\sigma$ — нули $\sigma < n$.

Пусть предположение о том, что $\dot{\text{v}}_1, \ldots, \dot{\text{v}}_\nu$ — нули, а ни одно из $\dot{\text{v}}_{\nu+1}, \ldots, \dot{\text{v}}_n$ не нуль, приводит к предположению $\dot{v}_1 = \ldots = \dot{v}_\mu = 0$ $(\mu \leqslant 2\nu)$ и только к нему. Это будет, если первые $v_1, \ldots, v_\mu$ выбраны независимыми из системы скоростей $\dot{v}_{1x}, \dot{v}_{1y}, \ldots, \dot{v}_{\nu x}, \dot{v}_{\nu y}$.

Тогда для определения $\dot{v}_{\mu+1}, \ldots, \dot{v}_n$ послужат уравнения

$$\frac{\partial S^*}{\partial \dot{v}_j} = Q_j' - \sum_{i=\nu+1}^{\tau} k_i N_i \frac{\dot{v}_{ix}\beta_{ij}{}^1 + \dot{v}_{iy}\beta_{ij}{}^2}{\sqrt{\dot{v}_{ix}{}^2 + \dot{v}_{iy}{}^2}} \qquad (j = \mu + 1, \ldots, n)$$

где S^* есть S, в которой положено $\dot{v}_1 = \ldots = \dot{v}_\mu = 0$. Нетрудно заметить, что предыдущие уравнения можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \dot{v}_j}\left(S^* - \sum_{i=\mu+1}^{n} Q_i'\dot{v}_i + \sum_{=\nu+1}^{\tau} k_i N_i \sqrt{\dot{v}_{ix}{}^2 + \dot{v}_{iy}{}^2}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{v}_i}(S^* + \Psi^*) \tag{4.1}$$

$$(j = \mu + 1, \ldots, n)$$

Если $\dot{v}_{\mu+1}^*, \ldots, \dot{v}_n$ есть решение этих уравнений, то движение

$$\dot{v}_1 = \ldots = \dot{v}_\mu = 0, \qquad \dot{v}_{\mu+1}^*, \ldots, \dot{v}_n^* \tag{4.2}$$

будет согласно с законом трения, если уравнениям

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_j}\right)^* = Q_j' - \sum_{i=\nu+1}^{\tau} k_i N_i \frac{\dot{v}_{ix}{}^*\beta_{ij}{}^1 + \dot{v}_{iy}{}^*\beta_{ij}{}^2}{\sqrt{\dot{v}_{ix}{}^{*2} + \dot{v}_{iy}{}^{*2}}} + \sum_{i=1}^{\nu} R_{1i}\beta_{ij}{}^1 + R_{2i}\beta_{ij}{}^2$$

$$(j = 1, \ldots, \mu) \tag{4.3}$$

в которых $\dot v_{ix}^*$, $\dot v_{iy}^*$ $(\partial S/\partial \dot v_j)^*$ означает, что в них на место $\dot v_1, \ldots, \dot v_n$ подставлены значения (4.2), возможно удовлетворить реакциями R_{1i}, R_{2i}, лежащими в конусах трения

$$R_{1i}^2 + R_{2i}^2 \leqslant k_i^2 N_i^2 \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{4.4}$$

Покажем, что решение (4.2), согласное с законом трения, реализует изолированный минимум функции

$$S' + \Psi = S' - \sum_{i=1}^{n} Q_i' \dot v_i + \sum_{i=1}^{\tau} k_i N_i \sqrt{\dot v_{ix}^2 + \dot v_{iy}^2}$$

Действительно, $\delta(S + \Psi)$ — вариация функции $S + \Psi$ в окрестности (4.2) будет вследствие (4.1) иметь вид

$$\delta(S' + \Psi) = \sum_{j=1}^{\mu} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \dot v_j}\right)^* - Q_j' + \sum_{i=\nu+1}^{\tau} k_i N_i \frac{\dot v_{ix}^* \beta_{ij}^1 + \dot v_{ix}^* \beta_{ij}^2}{\sqrt{\dot v_{ix}^{*2} + \dot v_{iy}^{*2}}} \right] \dot v_j +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\nu} k_i N_i \sqrt{\dot v_{ix}^1 + \dot v_{iy}^2} + \delta^2 S' + \delta^2 \Psi^* + \lambda$$

где λ объединяет члены порядка выше второго, а $\delta^2 S'$ и $\delta^2 \Psi^*$ совокупности членов второго порядка в разложении функций S' и Ψ^*.

Так как

$$\delta^2 \Psi^* = \frac{1}{2} \delta \sum_{i=\nu+1}^{\tau} k_i N_i \frac{\dot v_{ix} \delta \dot v_{ix} + \dot v_{iy} \delta \dot v_{iy}}{\sqrt{\dot v_{ix}^2 + \dot v_{iy}^2}} = \frac{1}{2} \sum_{i=\nu+1}^{\tau} \frac{k_i N_i (\dot v_{iy}^* \delta \dot v_{ix} - \dot v_{ix}^* \delta \dot v_{iy})^2}{\sqrt{(\dot v_{ix}^{*2} + \dot v_{iy}^{*2})^3}}$$

есть постоянно положительная функция $\delta \dot v_{ix}, \delta \dot v_{iy}$, а $\delta^2 S$ есть определенно положительная функция $\delta \dot v_i$, то нетрудно показать методом, аналогичным приведенному в предыдущем параграфе, что необходимым и достаточным условием положительности $\delta(S + \Psi)$ является неотрицательность однородной функции первого измерения

$$\Pi = \sum_{j=1}^{\mu} \left[\left(\frac{\partial S'}{\partial \dot v_j}\right)^* - Q_j' + \sum_{i=\nu+1}^{\tau} k_i N_i \frac{\dot v_{ix}^* \beta_{ij}^1 + \dot v_{iy}^* \beta_{ij}^2}{\sqrt{\dot v_{ix}^{*2} + \dot v_{iy}^{*2}}} \right] \dot v_j +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\nu} k_i N_i \sqrt{\dot v_{ix}^2 + \dot v_{iy}^2} \geqslant 0$$

и что последнее неравенство необходимо выполняется, если уравнениям (4.3) возможно удовлетворить реакциями, лежащими в конусах трения. Доказательство последнего факта можно провести так же как и доказательство для случая равновесия, с той лишь разницей, что обобщенные силы в формуле (3.4) придется заменить величинами, стоящими в квадратных скобках.

Нетрудно заметить, что неотрицательность $\delta^2 \Psi^*$ гарантирует определенную положительность по отношению к $\dot v_{\mu+1}, \ldots, \dot v_n$ функции $\delta^2 S^* + \delta^2 \Psi^*$, а это в свою очередь означает, что решение уравнений (4.1) в любой области, где не исчезают $v_{\nu+1}, \ldots, v_\tau$, единственно. Действительно, якобиан от левых частей уравнений (4.1) существует при всех $\dot v_{\mu+1}, \ldots, \dot v_n$, не обращающих в нули $v_{\nu+1}, \ldots, v_\tau$, и совпадает с дискриминантом квадратичной формы $\delta^2 S^* + \delta^2 \Psi^*$, который положителен везде, где существует.

Если уравнениям (4.3) невозможно удовлетворить при ограничениях (4.4), а последнее неравенство все же выполняется при любых $\dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_\mu$, то закон трения покоя противоречив.

Действительно, добавляя ко всем действующим на систему силам силы инерции

$$-\left(\frac{\partial S'}{\partial \dot{v}_j}\right)^* \qquad (j = 1,2,\ldots,\mu); \quad -\frac{\partial S^*}{\partial \dot{v}_j} \qquad (j = \mu+1,\ldots,n)$$

рассмотрим нашу систему в начальном состоянии $v_1, \ldots, v_n = 0$ под действием активных сил

$$Q_j^\circ = -\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_j}\right)^* + Q_j' - \sum_{i=\nu+1}^{\tau} k_i N_i \frac{\dot{v}_{ix}{}^* \beta_{ij}{}^1 + \dot{v}_{iy}{}^* \beta_{ij}{}^2}{\sqrt{\dot{v}_{ix}{}^{*2} + \dot{v}_{iy}{}^{*2}}} \qquad (j = 1,2,\ldots,\mu)$$

$$Q_j^\circ = -\frac{\partial S^*}{\partial \dot{v}_j} + Q_j' - \sum_{i=\nu+1}^{\tau} k_i N_i \frac{\dot{v}_{ix}{}^* \beta_{ij}{}^1 + \dot{v}_{iy}{}^* \beta_{ij}{}^2}{\sqrt{\dot{v}_{ix}{}^{*2} + \dot{v}_{iy}{}^{*2}}} = 0 \quad (j = \mu+1,\ldots,n)$$

и неопределенных сил трения в точках $p_1, \ldots, p_\nu$. Мы получили заменяющую систему, которая отличается от исходной начальным состоянием, а также тем, что силы инерции и трения, вычисленные из предположения, что $\dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_\nu$ суть нули, заменены активными силами. Заменяющая система под действием активных сил Q_j° не может иметь никакого «движения» согласного с законом трения. Действительно, для определения каких-либо ненулевых $\dot{v}_1', \ldots, \dot{v}_n'$ заменяющей системы послужат уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_j} = Q_j^\circ - \sum_{i=1}^{\nu} k_i N_i \frac{\dot{v}_{ix} \beta_{ij}{}^1 + \dot{v}_{iy} \beta_{ij}{}^2}{\sqrt{\dot{v}_{ix}{}^2 + \dot{v}_{iy}{}^2}} \qquad (j = 1,2,\ldots,\mu)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_j} = 0 \qquad (j = \nu+1,\ldots,n)$$

Умножая эти уравнения на $\dot{v}_j'$ и складывая, получим после учета начальных условий $(v_1 = \ldots = v_n = 0)$, что для их решения $\dot{v}_1', \ldots, \dot{v}_n'$ выполняется уравнение

$$2S = -\Pi > 0$$

Следовательно предположение о том, что хотя бы одно из $\dot{v}_1', \ldots, \dot{v}_n'$ не нуль, приводит к противоречию с предположением $\Pi \geqslant 0$.

В итоге приходим к выводу, что если остановить движущуюся систему и к активным силам добавить силы инерции и известные силы трения, то необходимо будет иметь место равновесие $(\dot{v}_1 = \ldots = \dot{v}_n = 0)$ для этой заменяющей системы при $\Pi \geqslant 0$ во всех случаях, когда закон трения для заменяющей системы непротиворечив. Это утверждение, как нетрудно заметить, весьма сходно с принципом Даламбера и отличается от него только лишь тем, что вывод о равновесии нам удается сделать лишь после того, как введено предположение $\dot{v}_1 = \ldots = \dot{v}_\nu = 0$ и из него получены силы трения и силы инерции.

Итак, возможны два вывода, если закон трения для заменяющей системы непротиворечив.

1) Из неотрицательности функции П следует, что решение (4.2) является согласным с законом трения.

2) Система, находящаяся в покое под действием некоторых активных сил, сил трения и сил инерции, не может иметь ускорений, соответствующих этим силам инерции, если она находится под действием тех же активных сил и сил трения.

Последнее предположение кажется нам невероятным и поэтому мы останавливаемся на первом.

Поясним сказанное примером. Рассмотрим жесткий треугольник с вершинами A, B, C, прижатый этими вершинами к шероховатой, неподвижной плоскости силами $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3$, нормальными к плоскости.

К вершине A шарнирно прикреплен безынертный стержень, несущий на конце D массу m, прижатую к плоскости силой $\mathbf{N}_4$. Пусть к стержню приложена сила $\mathbf{F}$, лежащая в плоскости на расстоянии b от точки A и под углом α к стержню.

Если $|bF\sin\alpha| > kN_4a$, где $a = AD$, то из уравнения

$$bF\sin\alpha = (kN_4 + m\varepsilon a)a$$

можно найти силу инерции $m\varepsilon a$ и силу трения kN_4, направленные перпендикулярно к стержню против ускорения его конца. Это будет сила инерции и сила трения, найденные из предположения, что ускорения вершин треугольника нули. Если теперь к стержню приложить активную силу $kN_4 + m\varepsilon a$ в точке D и рассмотреть заменяющую систему, то при $\Pi > 0$ треугольник и стержень будут необходимо находиться в равновесии, если закон трения непротиворечив. Первое предположение утверждает допустимость этого движения, а второе — недопустимость.

Заметим теперь, что всегда возможно найти такое $R^2 > 0$, что на сфере $\ddot{v}_1^2 + \ldots + \dot{v}_n^2 = R^2$ значения функции $S + \Psi$ будут все положительны.

Так как $S + \Psi$ непрерывна в замкнутой области

$$\dot{v}_1^2 + \ldots + \dot{v}_n^2 \leqslant R^2$$

и равна нулю в нуле, то на основании известной теоремы анализа можно утверждать, что она достигает минимума внутри этой области, и этот минимум согласно структуре вариации $S + \Psi$ будет изолированным.

5. Как отметил П. Аппель [2] функция $S' - Q_1'\dot{v}_1 - \ldots - Q_n'\dot{v}_n$ отличается лишь на постоянную величину от Гауссова принуждения, поэтому естественно дать общую формулировку принципа для систем с трением, аналогичного принципу Гаусса, которая будет иметь еще и то преимущество, что исключит случаи внутренней противоречивости закона трения, коль скоро такие встретятся.

Однако поскольку $S + \Psi$ на действительном движении может принимать и отрицательные значения, мы воздержимся от термина принуждение.

Величину

$$-\Psi = +\sum_{i=1}^{n} Q_i'\dot{v}_i - \sum_{i=1}^{\tau} k_i N_i \sqrt{\dot{v}_{ix}^2 + \dot{v}_{iy}^2}$$

можно назвать работой всех приложенных к системе сил на мыслимом ускорении. Под мыслимым ускорением, следуя Гауссу, будем понимать любое ускорение, согласное с наложенными на систему условиями, в которых положено $q_{n+1} = \ldots = q_{n+k} = 0$.

Формулировка принципа. Если в системе со связями известны все максимумы сил трения, то действительное движение, согласное с законом трения, будет отличаться от всех мыслимых, соседних с ним, тем, что для действительного движения разность между энергией ускорений и работой всех сил на действительном ускорении будет меньше, чем таковая разность для любого мыслимого ускорения соседнего с действительным, причем всегда будет существовать хотя бы одно движение, согласное с этим условием.

6. *Пример.* Рассмотрим твердое тело, опирающееся плоской площадкой о шероховатую плоскость. Следуя Н. Е. Жуковскому [3], будем считать известным нормальное давление N_i в каждом элементе контакта $d\sigma$.

Как показал Н. Е. Жуковский,

a) При повороте тела около любого центра O_i силы трения приводятся к некоторой силе $\mathbf{F}_i$ во всех случаях, кроме поворота вокруг некоторой единственной точки O — полюса трения, когда силы трения приводятся к паре.

b) Вдоль любой прямой на плоскости действует единственная сила $\mathbf{F}_i$.

c) Момент силы $\mathbf{F}_i$ относительно O_i не меньше, чем момент любой другой силы трения относительно того же центра.

d) Сила трения, соответствующая любому поступательному движению, единственная и проходит через центр нормальных давлений.

Используя эти свойства, Н. Е. Жуковский приходит к теореме IV.

Теорема IV. Для равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость, необходимо и достаточно, чтобы сила $\mathbf{P}$, действующая на тело по направлению прямой, лежащей в неподвижной плоскости, была бы не более направляющейся по этой прямой силы трения площадки. Если же на тело действует пара, лежащая в неподвижной плоскости, то для равновесия необходимо и достаточно, чтобы момент этой пары был не более момента пары сил трения, получаемой при вращении площадки около полюса трения.

К выводу о равновесии тела при выполнении условий теоремы Жуковский приходит, установив, что уравнения движения, полученные из теоремы об изменении момента количества движения, примененного для центров O_i или O, либо из теоремы о движении центра масс в проекции на направление $\mathbf{P}$, не могут иметь никакого решения. Нетрудно проверить также, что условия теоремы Жуковского совпадают с необходимыми и достаточными условиями неотрицательности функции Ψ для данной задачи. Действительно, из условий теоремы видно, что коль скоро они выполняются, виртуальная работа силы $\mathbf{P}$ и сил трения всегда неположительна. В силу пропорциональности полей мыслимых ускорений и возможных перемещений можно сделать вывод о неотрицательности Ψ. Если отношение силы $\mathbf{P}$ к силе трения $\mathbf{F}_1$, направленной по линии действия $\mathbf{P}$, равно $|\mathbf{P}|/|\mathbf{F}_i| = \lambda \leqslant 1$, то, прилагая на всех элементах контакта силы, направленные так же, как силы, приводящие к равнодействующей $\mathbf{F}_i$, но равные по модулю $\lambda_k N_i d\sigma$. где k — коэффициент трения, получим силу $-\lambda\mathbf{F} = \mathbf{P}$, направленную по той же прямой, что и $\mathbf{P}$, так как уравнения линии действия равнодействующих однородны относительно компонент составляющих сил. Для пары доказательство аналогично.

Если условия теоремы нарушены, то аналогичного выбора сил сделать невозможно. Действительно, в случае пары и силы, приложенной в центре давлений, наверняка будет нарушено уравнение моментов относительно полюса трения или уравнение равновесия в проекции на $\mathbf{P}$. В общем случае момент любых сил, приложенных в точках контакта и меньших по модулю, чем силы трения, будет меньше по модулю, чем момент $\mathbf{F}_i$ относительно O_i. Действительно он равен

$$\iint\limits_D kN_i r_i d\sigma.$$

где r_i — расстояние элемента $d\sigma$ от центра O_i. Следовательно, при замене направления или уменьшении модуля у сил трения их момент относительно O_i может лишь уменьшиться.

Если условия теоремы нарушены, то для определения начальных ускорений послужат уравнения:

$$
\begin{gathered}
m\ddot{x}_c = P_x - \iint_D kN_i \frac{(\ddot{x}_c - r\varepsilon \sin \varphi)\, rdrd\varphi}{\sqrt{(\ddot{x}_c - r\varepsilon \sin \varphi)^2 + (\ddot{y}_c + r\varepsilon \cos \varphi)^2}} \\
m\ddot{y}_c = P_y - \iint_D kN_i \frac{(\ddot{y}_c + r\varepsilon \sin \varphi)\, rdrd\varphi}{\sqrt{(\ddot{x}_s - r\varepsilon \sin \varphi)^2 + (\ddot{y}_c + r\varepsilon \cos \varphi)^2}} \qquad (6.1) \\
I_c\varepsilon = Ph_c - \iint_D kN_i \frac{[-(\ddot{x}_c - r\varepsilon \sin \varphi)\, r \sin \varphi + (\ddot{y}_c + r\varepsilon \cos \varphi)\, r \cos \varphi]\, rdrd\varphi}{\sqrt{(\ddot{x}_c - r\varepsilon \sin \varphi)^2 + (\ddot{y}_c + r\varepsilon \cos \varphi)^2}}
\end{gathered}
$$

где $\ddot{x}_c$ и $\ddot{y}_c$ — ускорения центра масс тела, ε — угловое ускорение, J_c — его центральный момент инерции, h_c — расстояние силы $\mathbf{P}$ от центра масс, а область D есть площадь контакта.

Решение указанных уравнений реализует минимум функции

$$
\begin{gathered}
S + \Psi = \frac{m}{2} (\ddot{x}_c^2 + \ddot{y}_c^2) + \frac{J_c\varepsilon^2}{2} - P_x\ddot{x}_c - P_y\ddot{y}_c - Ph_c\varepsilon + \\
+ \iint_D k_iN_i \sqrt{(\ddot{x}_c - r\varepsilon \sin \varphi)^2 + (\ddot{y}_c + r\varepsilon \cos \varphi)^2}
\end{gathered}
$$

Эта функция допускает непрерывные вторые частные производные во всех точках кроме $\ddot{x}_c = \ddot{y}_c = \varepsilon = 0$. И наверняка имеет минимум в точке, отличной от последней, поскольку условия теоремы Н. Е. Жуковского нарушены. Следовательно, уравнения (6.1) имеют решение, и решение это единственно, поскольку две любые точки пространства ускорений могут быть соединены непрерывной кривой, не проходящей через нуль. Таким образом

1) Необходимые и достаточные условия равновесия Н. Е. Жуковского совпадают с необходимыми и достаточными условиями, полученными непосредственным применением закона трения.

2) Закон трения покоя в этом случае непротиворечив.

3) Применение закона трения при нарушении условий равновесия приводит к единственному движению, согласному с законом трения.

Поступила 28 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Пэнлеве П. Лекции о трении. ГТТИ. 1954.
2. Аппель П. Теоретическая механика. т. I, II. Физматгиз, 1960.
3. Жуковский Н. Е. Полное собр. соч., ОНТИ НКТП СССР, 1937, т. I.