Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА И ТЕОРЕМА О ПРИВОДЯЩЕМ МНОЖИТЕЛЕ В СЛУЧАЕ КВАЗИКООРДИНАТ

Н. А. Фуфаев

(Горький)

Как известно, уравнения Чаплыгина движения неголономных систем [1] выведены в предположении, что независимыми параметрами являются истинные координаты. В работе [2] С. А. Чаплыгин указал способ интегрирования этих уравнений при помощи введения новой независимой переменной τ, которая связана с временем t дифференциальным соотношением

$$d\tau = Ndt \qquad (0.1)$$

где N — подлежащая определению функция независимых параметров. Эту функцию Чаплыгин назвал приводящим множителем. Рассматривая системы с двумя степенями свободы, Чаплыгин обосновал свою теорему для случая, когда свободными параметрами являются истинные координаты. Однако уже в примере о плоском неголономном движении, иллюстрирующем применение теоремы о приводящем множителе, он использовал фактически[1] квазикоординату, не отметив этого обстоятельства. Хотя пример Чаплыгина верен, сам факт распространения теоремы о приводящем множителе на случай квазикоординат остался не обоснованным. В дальнейшем некоторые авторы (см., например, [3]) высказывали сомнение в правомерности использования здесь квазикоординат. При помощи введения избыточных координат М. Ф. Шульгин [4] показал, что при определенных условиях форма уравнений Чаплыгина сохраняется, если некоторые из избыточных координат будут квазикоординатами.

Однако в общей постановке вопрос о применении квазикоординат в теории, развитой Чаплыгиным, до последнего времени оставался открытым. Отметим работы В. С. Новоселова [6,7], в которых делается попытка обобщения теории С. А. Чаплыгина на случай нелинейных неголономных координат, однако содержащиеся там результаты приведены фактически без доказательств. В настоящей заметке дается вывод уравнений Чаплыгина в случае, когда независимыми параметрами являются квазикоординаты; приводится обоснование применимости теоремы о приводящем множителе в этом случае; устанавливается класс задач, в которых использование квазикоординат не выводит за границы теории, развитой Чаплыгиным.

§ 1. Уравнения Чаплыгина в квазикоординатах. Рассмотрим неголономную систему, положение которой определяется n обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$. Пусть система имеет m степеней свободы $(m < n)$, т. е. между обобщенными скоростями $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ существует $n - m$ неинтегрируемых уравнений, которые будем предполагать линейными и однородными. Коэффициенты в этих уравнениях, так же как и функция Лагранжа $\mathbf{L}$, пусть зависят лишь от первых m координат.

Введем в качестве независимых параметров квазикоординаты $\pi_1, \ldots, \pi_m$ посредством m линейных уравнений [2]

$$\dot{\pi}_\alpha = a_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m) \qquad (1.1)$$

[1] Общее понятие квазикоординат исторически было введено позднее.

[2] Здесь и в дальнейшем по дважды встречающимся индексам производится суммирование.

где коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ являются функциями $q_1, \ldots, q_m$. Используя (1.1) и $n - m$ уравнений неголономных связей, выразим все обобщенные скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ через m независимых квазискоростей $\dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_m$:

$$\dot{q}_i = b_{i\sigma}\dot{\pi}_\sigma \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \sigma = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что вариации обобщенных скоростей выражаются через вариации свободных параметров при помощи соотношений

$$\delta q_i = b_{i\alpha}\delta\pi_\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \alpha = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

Будем исходить из уравнения Даламбера — Лагранжа, записанного в обобщенных координатах

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Подставляя вместо δq_i выражения (1.3), получим сумму, которая в силу независимости вариаций $\delta\pi_\alpha$ распадается на m уравнений вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) b_{i\alpha} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} b_{i\alpha} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \alpha = 1, \ldots, m) \tag{1.4}$$

В этих уравнениях функция Лагранжа $\mathbf{L}$ зависит от m координат $q_1, \ldots, q_m$ и n скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, т. е. $\mathbf{L} = \mathbf{L}(q_\beta, \dot{q}_i)$.

Подставляя вместо $\dot{q}_i$ выражения (1.2), получим функцию $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}^*(q_\beta, \dot{\pi}_\sigma)$, причем

$$\mathbf{L}^*(q_\beta, \dot{\pi}_\sigma) = \mathbf{L}(q_\beta, b_{i\sigma}\dot{\pi}_\sigma) \tag{1.5}$$

На основании (1.5) нетрудно установить следующие соотношения:

$$\frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial q_\beta} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{\pi}_\sigma\frac{\partial b_{i\sigma}}{\partial q_\beta}, \qquad \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} b_{i\alpha} = \frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial q_\beta} b_{\beta\alpha} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{\pi}_\sigma\frac{\partial b_{i\sigma}}{\partial q_\beta} b_{\beta\alpha}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \dot{\pi}_\sigma} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} b_{i\sigma}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) b_{i\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \dot{\pi}_\alpha} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial q_\beta} b_{\beta\sigma}\dot{\pi}_\sigma$$

$$(i = 1, \ldots, n; \quad \alpha, \beta, \sigma = 1, \ldots, m)$$

Подставляя эти выражения в (1.4) и обозначая

$$\frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial q_\beta} b_{\beta\sigma} = \frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial \pi_\sigma}, \qquad \frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial q_\beta} b_{\beta\alpha} = \frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \pi_\alpha} \tag{1.6}$$

приходим к следующим уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \dot{\pi}_\alpha} - \frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \pi_\alpha} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial b_{i\sigma}}{\partial \pi_\alpha} - \frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial \pi_\sigma}\right)\dot{\pi}_\sigma = 0 \qquad \left(\begin{array}{c} i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ \alpha, \beta, \sigma = 1, \ldots, m \end{array}\right) \tag{1.7}$$

Полученные уравнения (1.7) и являются уравнениями Чаплыгина в квазикоординатах. Нетрудно видеть, что выражения (1.7) совпадают с уравнениями Чаплыгина [1], если $\pi_1, \ldots, \pi_m$ оказываются истинными координатами, т. е. $\pi_\alpha = q_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$.

Действительно, в этом случае

$$b_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad b_{\beta\sigma} = \delta_{\beta\sigma} \qquad (\delta_{\alpha\beta},\ \delta_{\beta\sigma} \text{ — символы Кронекера})$$

и уравнения (1.7) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial b_{j\sigma}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial b_{j\alpha}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\sigma = 0 \qquad \left(\begin{array}{c} \alpha, \sigma = 1, \ldots, m \\ j = m+1, \ldots, n \end{array}\right) \tag{1.8}$$

Уравнения (1.7) по форме отличаются от уравнений в квазикоординатах Больцмана—Гамеля [5] способом составления членов неголономности. При составлении коэффициентов γ_{ij}^k в уравнениях Больцмана—Гамеля используются коэффициенты как прямой, так и обратной матриц преобразования, связывающих истинные скорости и квазискорости. При составлении же аналогичных членов в уравнениях (1.7) используются коэффициенты лишь одной матрицы, которая является прямоугольной (n строк и m столбцов) и не имеет обратной матрицы.

§ 2. Теорема о проводящем множителе в квазикоординатах. Рассмотрим неголономную систему типа Чаплыгина с двумя степенями свободы. В качестве свободных параметров выберем квазикоординаты π_1 и π_2, через которые все истинные скорости выражаются соотношениями

$$\dot{q}_i = b_{i1}\dot{\pi}_1 + b_{i2}\dot{\pi}_2 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Пусть функция Лагранжа $\mathbf{L}$ зависит лишь от q_1, q_2 и всех обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, а коэффициенты b_{i1} и b_{i2} являются функциями q_1 и q_2. Уравнения движения (1.7) в квазикоординатах рассматриваемой системы можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \dot{\pi}_1} - \frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \pi_1} = \dot{\pi}_2 S, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \dot{\pi}_2} - \frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \pi_2} = -\dot{\pi}_1 S \tag{2.2}$$

Здесь

$$S = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial b_{i2}}{\partial \pi_1} - \frac{\partial b_{i1}}{\partial \pi_2}\right) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

а функция $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}^*(q_1, q_2, \dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2)$ получается из $\mathbf{L}$ при замене обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ их выражениями (2.1).

Для преобразования уравнений (2.2) введем новую независимую переменную τ посредством соотношения (0.1). Пусть выражение кинетической энергии T^* системы будет квадратичной формой относительно квазискоростей $\dot{\pi}_1$ и $\dot{\pi}_2$. Обозначая штрихом производные по τ, имеем

$$2T^* = L_1\dot{\pi}_1^2 + 2M\dot{\pi}_1\dot{\pi}_2 + L_2\dot{\pi}_2 = N^2(L_1\pi_1'^2 + 2M\pi_1'\pi_2' + L_2\pi_2'^2) = 2T^\circ$$

$$\dot{\pi}_\beta = N\pi_\beta'$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_\beta} = \frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_\beta'}\frac{\partial \pi_\beta}{\partial \dot{\pi}_\beta} = \frac{1}{N}\frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_\beta'} \qquad \frac{\partial T^*}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T^\circ}{\partial q_\alpha} - \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_\alpha}\frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_\sigma'}\pi_\sigma' \qquad (\alpha, \beta, \sigma = 1, 2)$$

Отсюда на основании (1.6) получим

$$\frac{\partial T^*}{\partial \pi_\beta} = \frac{\partial T^*}{\partial q_\alpha}b_{\alpha\beta} = \frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_\beta} - \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_\alpha}b_{\alpha\beta}\frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_\sigma'}\pi_\sigma'$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_\beta} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_\beta'} - \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_\alpha}\frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_\beta'}b_{\alpha\sigma}\pi_\sigma' \qquad (\alpha, \beta, \sigma = 1, 2)$$

Пользуясь этими соотношениями, приводим уравнения (2.2) к виду

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathbf{L}^\circ}{\partial \pi_1'} - \frac{\partial \mathbf{L}^\circ}{\partial \pi_1} = \pi_2' R, \qquad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathbf{L}^\circ}{\partial \pi_2'} - \frac{\partial \mathbf{L}^\circ}{\partial \pi_2} = -\pi_1' R \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{L}^\circ = T^\circ - V$, а функция R определяется выражением

$$R = NS - \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \pi_1}\frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_2'} + \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \pi_2}\frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_1'} \tag{2.5}$$

где

$$\frac{\partial N}{\partial \pi_\alpha} = \frac{\partial N}{\partial q_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial \pi_\alpha} = \frac{\partial N}{\partial q_\beta} b_{\beta\alpha} \qquad (\alpha, \beta=1,2)$$

Уравнение (2.4) принимает форму обычных уравнений Лагранжа второго рода, если функцию N определить так, чтобы имело место равенство

$$R = 0 \tag{2.6}$$

Введем канонические переменные

$$p_1 = \frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_1'} = N^2(L_1\pi_1' + M\pi_2'), \qquad p_2 = \frac{\partial T^\circ}{\partial \pi_2'} = N^2(M\pi_1' + L_2\pi_2') \tag{2.7}$$

Заменяя в выражениях $\partial \mathrm{L}/\partial \dot{q}_i$ величины $\dot{q}_i$ через p_1 и p_2 посредством соотношений (2.1) и (2.7), получаем

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{N}(A_i p_1 + A_i p_2) \tag{2.8}$$

где A_i, B_i — известные функции обобщенных координат q_1 и q_2.

Подставляя (2.8) в (2.5), получим выражение, линейное относительно p_1 и p_2. Требование (2.6) будет заведомо выполнено, если функция N удовлетворяет сразу двум уравнениям

$$\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \pi_1} = B_i\left(\frac{\partial b_{i2}}{\partial \pi_1} - \frac{\partial b_{i1}}{\partial \pi_2}\right), \qquad \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \pi_2} = -A_i\left(\frac{\partial b_{i2}}{\partial \pi_1} - \frac{\partial b_{i1}}{\partial \pi_2}\right) \tag{2.9}$$

Здесь

$$\frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial \pi_\beta} = \frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial q_\sigma}\frac{\partial q_\sigma}{\partial \pi_\beta} = \frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial q_\sigma} b_{\sigma\beta} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ \alpha, \beta, \sigma = 1, 2 \end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что полученные уравнения (2.9) совпадают с уравнениями (9) Чаплыгина [2] в случае, когда квазикоординаты π_1 и π_2 оказываются истинными координатами. Действительно, полагая $\pi_1 = q_1$, $\pi_2 = q_2$, имеем $b_{11} = b_{22} = 1$, $b_{12} = b_{21} = 0$ и уравнения (2.9) принимают вид

$$\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_1} = B_j\left(\frac{\partial b_{j2}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{j1}}{\partial q_2}\right), \qquad \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_2} = -A_j\left(\frac{\partial b_{j2}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{j1}}{\partial q_2}\right) \tag{2.10}$$

$$(j = 3, 4, \ldots, n)$$

указанный Чаплыгиным.

§ 3. Класс задач, в которых введение квазикоординат не выводит за границы теории, развитой Чаплыгиным. Сравнение выражений (1.7) и (1.8), а также (2.9) и (2.10) показывает, что уравнения Чаплыгина и уравнения для приводящего множителя записываются в одинаковой форме как в случае истинных координат, так и в случае квазикоординат. Следовательно, распространение теоремы о приводящем множителе на случай квазикоординат является вполне правомерным. Однако в случае квазикоординат при вычислении частных производных по квазикоординатам следует, в отличие от истинных координат, пользоваться выражениями (1.6). Поэтому окончательный вид упомянутых выше уравнений в случае квазикоординат может оказаться отличным от вида уравнений в случае истинных координат.

Вместе с тем, среди систем Чаплыгина существует класс задач, когда результаты в обоих случаях полностью совпадают. Этот класс обладает следующими двумя признаками.

1. Число l истинных координат, от которых зависят коэффициенты неголономных связей и функция Лагранжа, меньше числа m степеней свободы системы.

2. Число k квазикоординат, которые наряду с l истинными координатами выбраны в качестве свободных параметров, не превышает числа $m - l$.

Покажем, что при наличии этих условий уравнения (1.7) и (2.9) совпадают с уравнениями Чаплыгина (1.8) и, соответственно, (2.10).

В самом деле, пусть в соотношениях (1.2) первые l $(l < m)$ квазикоординат являются истинными координатами, а коэффициенты $b_{i\sigma}$ зависят лишь от $q_1, \ldots, q_l$. Отсюда следует, что $b_{r\sigma} = \delta_{r\sigma}$ для $r, \sigma = 1, \ldots, l$ ($\delta_{r\sigma}$ — символ Кронекера) и $b_{r\sigma} \equiv 0$ для $\sigma = l+1,\ l+2, \ldots, m$.

Пусть функция Лагранжа наряду с обобщенными скоростями содержит лишь $q_1, \ldots, q_l$. В первых l уравнениях (1.7), согласно (1.6), имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial b_{i\sigma}}{\partial \pi_\alpha} - \frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial \pi_\sigma}\right)\dot{\pi}_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial b_{js}}{\partial q_r} - \frac{\partial b_{jr}}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s \qquad \begin{pmatrix} j = l+1,\ l+2, \ldots, n \\ r, s = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix}$$

после чего l уравнений (1.7) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L^*}{\partial q_r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial b_{js}}{\partial q_r} - \frac{\partial b_{jr}}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = l+1,\ l+2, \ldots, n \\ r, s = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Исходя из уравнений (1.8), заметим, что в рассматриваемом классе задач индекс j в уравнениях (1.8) должен пробегать значения $j = l+1$, $l+2, \ldots, n$, так как через независимые параметры выражаются $n - l$ обобщенных скоростей $\dot{q}_{l+1}, \dot{q}_{l+2}, \ldots, \dot{q}_n$. Поскольку величины q_{l+1}, $q_{l+2}, \ldots, q_m$ никуда не входят, соответствующие производные пропадают, после чего первые l уравнений (1.8) совпадают с (3.1).

Остается убедиться в том, что и при составлении остальных $m - l$ уравнений получатся одинаковые выражения, независимо от того, какие из уравнений, (1.7) или (1.8), взяты за исходные. В соответствии с (1.6), проделаем следующие вычисления:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \pi_\rho} = \frac{\partial L^*}{\partial q_r} b_{r\rho} = 0, \qquad \frac{\partial b_{i\sigma}}{\partial \pi_\rho} = \frac{\partial b_{i\sigma}}{\partial q_r} b_{r\sigma} = 0, \qquad \frac{\partial b_{i\rho}}{\partial \pi_\sigma}\dot{\pi}_\sigma = \frac{\partial b_{i\rho}}{\partial q_r} b_{r\sigma}\dot{\pi}_\sigma = \frac{\partial b_{j\rho}}{\partial q_r}\dot{q}_r$$

$$(i = 1, \ldots, n;\ j = l+1,\ l+2, \ldots, n;\ \rho = l+1,\ l+2, \ldots, m;\ r = 1, \ldots, l)$$

Подставляя это в (1.7), получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\pi}_\rho} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial b_{j\rho}}{\partial q_r}\dot{q}_r = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = l+1,\ l+2, \ldots, n \\ \rho = l+1,\ l+2, \ldots, m \\ r = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Исходя теперь из (1.8), для уравнений с индексом $l+1, l+2, \ldots, m$ придем также к (3.2), так как величины $\dot{q}_\rho$ $(\rho = l+1,\ l+2, \ldots, m)$ здесь по своему смыслу тождественны обозначениям $\dot{\pi}_\rho$.

Обращаясь к уравнениям для приводящего множителя, аналогично можно убедиться в совпадении конечных уравнений, если исходить из (2.9) и, соответственно, (2.10). Для $m = 2$ при наличии одной истинной координаты q_1 можно добавить, не выходя за класс систем Чаплыгина, лишь одну квазикоординату π_2. В соответствии с (2.1) имеем

$$b_{11} = 1, \quad b_{12} = 0, \quad \pi_1 = q_1$$

$$\frac{\partial b_{i2}}{\partial \pi_1} = \frac{\partial b_{i2}}{\partial q_1} = \frac{\partial b_{j2}}{\partial q_1}, \qquad \frac{\partial b_{i1}}{\partial \pi_2} = \frac{\partial b_{i1}}{\partial q_1} b_{12} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Уравнения (2.9) при этом преобразуются к виду

$$\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_1} = B_j \frac{\partial b_{j2}}{\partial q_1}, \qquad \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \pi_2} = -A_j \frac{\partial b_{j2}}{\partial q_1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Исходя теперь из уравнений (2.10), следует принять во внимание, что индекс j пробегает значения $j = 2, 3, \ldots, n$, а координата q_2 явно в коэффициенты b_{j2} не входит. Отсюда для приводящего множителя $N = N(q_1, \pi_2)$ непосредственно получаем уравнения (3.3). Таким образом, установлен класс задач, когда результаты в обоих случаях полностью совпадают (к этому же классу задач относится случай, рассмотренный в работе [4]). Именно к этому классу задач и принадлежит пример о плоско-параллельном неголономном движении, приведенный Чаплыгиным [2]. В этом примере уравнения (2.1) имеют вид

$$\dot\varphi = \dot\varphi, \qquad \dot x = \dot\pi \cos\varphi, \qquad \dot y = \dot\pi \sin\varphi$$

Здесь угол φ и координаты точки прикосновения колесика x, y будут истинными координатами, а длина дуги π — пройденного колесиком пути,— квазикоординатой. Найдем уравнения для приводящего множителя N, исходя из уравнений в квазикоординатах (2.9). Кинетическая энергия T имеет вид:

$$\frac{2T}{m} = [\dot x - \dot\varphi(\alpha \sin\varphi + \beta\cos\varphi)]^2 + [\dot y + \dot\varphi(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)]^2 + k^2\dot\varphi^2$$

Составляя выражения (2.8), находим

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}\sin\varphi, \qquad A_3 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}\cos\varphi.$$

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = \cos\varphi - \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + k^2}\sin\varphi, \qquad B_3 = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + k^2}\cos\varphi + \sin\varphi$$

Подставляя эти выражения в (2.9), приходим к уравнениям

$$\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + k^2}, \qquad \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \pi} = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}$$

которые совпадают с уравнениями, полученными Чаплыгиным.

Автор благодарит Ю. И. Неймарка за обсуждение статьи.

Поступила 2 XII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. 1. Изд-во АН СССР, Л., 1933.
2. Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Собр. соч., т. 1. Изд-во АН СССР, Л., 1933.
3. Ефимов М. И. К уравнениям Чаплыгина неголономных механических систем. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 6.
4. Шульгин М. Ф. О динамических уравнениях Чаплыгина при существовании условно неинтегрируемых уравнений. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 6.
5. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, М.—Л., 1937.
6. Новоселов В. С. Применение нелинейных неголономных координат в аналитической механике, Уч. зап. ЛГУ, 1957, № 217.
7. Новоселов В. С. Добавления к статьям по неголономной механике. Уч. зап. ЛГУ, 1960. № 280.