и условием (4.6), аналогично случаю изотермического газа получим, что на фронте ударной волны должны выполняться соотношения

$$u_1|_{\alpha_2=f(\alpha_1)} = -f'\sqrt{\frac{F}{1+f'^2}} \qquad u_2|_{\alpha_2=f(\alpha_1)} = \sqrt{\frac{F}{1+f'^2}} \tag{4.11}$$

$$\theta_1|_{u_1^2+u_2^2=F} = \frac{C}{F}u_1, \qquad \theta_2|_{u_1^2+u_2^2=F} = \frac{C}{F}u_2 \tag{4.12}$$

причем $C = u_1\theta_1 + u_2\theta_2 = \text{const}$ находятся из условия (4.10). Разыскивая функцию θ в виде $\theta = \theta(u_1^2 + u_2^2)$ и полагая $u = u_1^2 + u_2^2$, для функции θ получим уравнение второго порядка

$$(\gamma-1)\,\theta\,(\theta' + \theta''u - 2\theta'^3u) + (\gamma-3)\,\theta'^2u + 1 = 0 \tag{4.13}$$

Здесь

$$\theta'|_{u=F} = \frac{C}{2F}$$

а $\theta(F)$ определяется из условий Гюгонио. Так же как и в случае изотермического газа, функция $\theta(u)$ инвариантна относительно формы ударного фронта. Задачу с начальными данными (4.11) для потенциала скоростей Φ ($\partial\Phi/\partial\alpha = u_i$) можно, совершенно аналогично изотермическому случаю, решать методом Фурье.

Таким образом, указанным методом можно получать точные решения некоторых газодинамических задач с ударными волнами и в адиабатическом случае.

Далее, рассмотренный метод дает возможность решать в некоторых случаях как для изотермического, так и для политропного газа задачи о движении криволинейных поршней, которые гонят перед собой ударную волну, в предположении достаточной гладкости в некотором смысле формы поршня для начального момента времени. Таким образом, можно получить некоторые обобщения решения Л. И. Седова о расширяющемся с постоянной скоростью цилиндрическом поршне [2] для криволинейных поршней. Эти вопросы будут рассмотрены в последующей статье. Полученные точные решения могут быть использованы, кроме того, как критерии точности некоторых численных методов.

В заключение приношу благодарность Н. Н. Яненко за внимание и ценные критические замечания.

Поступила 5 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками. ДАН, 1958, т. 123, № 5.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, ГИТТЛ, 1957.

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА

Э. П. Зимин

(Харьков)

Для плоского течения сделано обобщение решения, полученного в работе [1], на случай учета вязкой диссипации.

Плоское течение несжимаемого вязкого электропроводного газа между параллельными пластинками, нормально к которым приложено однородное магнитное поле интенсивностью H_0, при наличии теплообмена через стенки рассматривалось в работах [1,2]; в первой из них получено решение для однородного теплового потока без учета вязкой диссипации, во второй — решение с учетом вязкой диссипации, но при условии постоянства температуры стенки.

Рассмотрим течение жидкости между бесконечными неэлектропроводными пластинами $z = \pm b$, нормально к которым приложено однородное магнитное поле H_0. Жидкость характеризуется электропроводностью σ, плотностью ρ, теплоёмкостью c_p и коэффициентами вязкости μ и теплопроводности λ. Влиянием температуры на все эти параметры пренебрегаем.

Если пластины непроницаемы для жидкости, то можно считать линии тока в жидкости лежащими в плоскости $x—y$. Выбираем ось y так, чтобы составляющая скорости W_y равнялась нулю. Тогда решение можно представить в следующем виде

$$W_x = W(z), \qquad W_y = 0, \qquad W_z = 0,$$
$$H_x = H_x(z), \qquad H_y = 0, \qquad H_z = H_0, \qquad p = p(x, z), \qquad T = T(x, z) \tag{1}$$

остальные параметры предполагаются постоянными.

Система уравнений, которой удовлетворяет решение (1), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \mu_e \frac{H^2}{2}\right) = \mu \frac{d^2W}{dz^2} + \mu_e H_0 \frac{dH_x}{dz} \qquad \left(\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p + \mu_e \frac{H^2}{2}\right) = 0, \qquad H_0 \frac{dW}{dz} + \frac{1}{\mu_e \sigma} \frac{d^2 H_x}{dz^2} = 0 \tag{2}$$
$$W \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\rho c_p \sigma}\left(\frac{dH_x}{dz}\right)^2 + \frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2$$

Здесь α — коэффициент температуропроводности.

Первые три уравнения дают решения [3] для W и H_x

$$W = \frac{PN}{\mu_e^2 \sigma H_0^2} \frac{\operatorname{ch} N - \operatorname{ch}(Nz/b)}{\operatorname{sh} N}, \qquad H_x = \frac{Pb}{\mu_e H_0}\left[\frac{\operatorname{sh}(Nz/b)}{\operatorname{sh} N} - \frac{z}{b}\right]$$
$$P = -\partial p / \partial x = \mathrm{const}, \qquad N = \mu_e H_0 b \sqrt{\sigma / \mu}$$

Здесь N — число Гартмана и b — полуширина канала.

В указанной постановке задачи распределение источников тепла не зависит от x. Поэтому профили температуры во всех сечениях канала подобны, а температура $T = \tau x + \theta(z)$. Тогда четвертое уравнение системы (2) приводится к виду

$$\frac{PN\tau}{\mu_e^2 \sigma H_0^2}\left[\frac{\operatorname{ch} N - \operatorname{ch}(Nz/b)}{\operatorname{sh} N}\right] = \tag{3}$$
$$= \alpha \frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{P^2}{\mu_e^2 \sigma H_0^2 \rho c_p}\left[\frac{N \operatorname{ch}(Nz/b)}{\operatorname{sh} N} - 1\right]^2 + \frac{\mu}{\rho c_p}\left[\frac{PN^2}{\mu_e^2 \sigma H_0^2 b} \frac{\operatorname{sh}(Nz/b)}{\operatorname{sh} N}\right]^2$$

Значение τ находится из условия баланса тепла

$$\rho W^0 c_p b \tau = q + \int_0^b \left[\frac{1}{\sigma}\left(\frac{dH_x}{dz}\right)^2 + \mu \left(\frac{dW}{dz}\right)^2\right] dz \qquad \left(W^0 = \frac{P}{\mu_e^2 \sigma H_0^2}(N \operatorname{cth} N - 1)\right) \tag{4}$$

где W^0 — средняя скорость,

Решая (3) и (4) при условиях $d\theta / dz = 0$ для $z = 0$ и $\theta = 0$ для $z = \pm b$ получаем

$$T = \tau x + \tau \frac{Pb^4}{2\alpha\mu N \operatorname{sh} N}\left[\left(\frac{z}{b}\right)^2 \operatorname{ch} N - \frac{2}{N^2} \operatorname{ch}\left(N \frac{z}{b}\right) - \frac{N^2 - 2}{N^2} \operatorname{ch} N\right] - \frac{P^2 b^4}{\alpha \rho c_p \mu N^2}$$
$$\left\{\frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 N}\left[\frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(2N \frac{z}{b}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2N + N^2\left(\frac{z^2}{b^2} - 1\right)\right] - \frac{2 \operatorname{ch}(Nz/b)}{N \operatorname{sh} N} + \right.$$
$$\left. + \frac{2 \operatorname{ch} N}{N \operatorname{sh} N} + \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{b^2} - 1\right)\right\} - \frac{P^2 b^4 N^2}{4\alpha\rho c_p \mu \operatorname{sh}^2 N}\left[\frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(2N \frac{z}{b}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2N + \left(\frac{z^2}{b^2} - 1\right)(N \operatorname{ch} N - \operatorname{sh} N)\right]$$
$$\theta = \frac{1}{\rho c_p b W^0}\left[q + \frac{P^2 b^3}{\mu}\left(\frac{\operatorname{sh} 2N}{2N \operatorname{sh}^2 N} - \frac{1}{N^2}\right)\right]$$

Поступила 10 VIII 1960 Харьковский авиационный институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Siegel R. Appl. Mech., 1958, vol. 25, № 3 (перев. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1959, № 3).
2. Регирер С. А. О тепловом эффекте при течении электропроводной жидкости между параллельными стенками. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. Изд-во иностр. лит-ры, 1959.