ОБ УДАРНЫХ ВОЛНАХ В ТЕЧЕНИЯХ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА, ИМЕЮЩИХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. Ф. Сидоров
(Челябинск)

1. Будем рассматривать двумерные нестационарные движения политропного газа с уравнением состояния $p = a^2(S)\rho$, где p — давление, ρ — плотность, S — энтропия и γ — показатель адиабаты.

Пусть $c = \sqrt{dp/d\rho}$ — скорость звука, u_1, u_2 — компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$.

В работе [1] исследованы изэнтропические течения, обладающие прямолинейными характеристиками в пространстве x_1x_2t

$$\frac{dx_1}{\Delta_1} = \frac{dx_2}{\Delta_2} = \frac{dt}{1} \tag{1.1}$$

Величины Δ_1 и Δ_2, а также функции u_1, u_2, c будем предполагать зависящими от двух параметров: α_1, α_2, которые определяют положение характеристик.

В дальнейшем будем изучать в основном течения, отличные от простых волн и конических течений, а поэтому в силу теоремы, установленной в работе [1], эти течения для $\gamma \neq 2$ будут потенциальными (при $\gamma = 2$ возможны и вихревые течения с прямолинейными характеристиками). В заметке будет дан метод нахождения течений газа за ударными волнами постоянной интенсивности, двигающимися по постоянному фону, для класса достаточно гладких в некотором смысле линий ударных фронтов, когда течение за фронтом имеет прямолинейные характеристики.

Для простоты рассмотрим изотермический газ, но все рассуждения могут быть перенесены и на адиабатический случай с произвольным γ, для которого мы укажем лишь некоторые результаты.

В адиабатическом случае постоянство нормальной скорости фронта ударной волны следует сразу же из условий Гюгонио, как только задан постоянный фон и движение за волной предположено изэнтропичным. В изотермическом газе аналогичное свойство также выводится из условий Гюгонио на фронте, но в предположении, что течение за ударной волной имеет прямолинейные характеристики.

2. В уравнении состояния изотермического газа $p = a^2\rho$, где $a^2 = RT$, положим для простоты $a^2 = 1$ (a^2 — квадрат скорости звука, которая в изотермическом газе постоянна).

Течения изотермического газа с прямолинейными характеристиками описываются системой уравнений [1]

$$\Delta_i = u_i + q_i \qquad (i = 1, 2) \tag{2.1}$$

$$(1 - q_1^2)(q_{22} + 1) + 2q_1q_2q_{12} + (1 - q_2^2)(q_{11} + 1) = 0 \tag{2.2}$$

$$(1 - q_1^2)\,\partial u_1 / \partial\alpha_1 - 2q_1q_2\,\partial u_1 / \partial\alpha_2 + (1 - q_2^2)\,\partial u_2 / \partial\alpha_2 = 0 \tag{2.3}$$

$$\partial u_1 / \partial\alpha_2 = \partial u_2 / \partial\alpha_1 \tag{2.4}$$

$$x_i - \Delta_i(\alpha_1, \alpha_2)\,t = \alpha_i \qquad (i = 1, 2) \tag{2.5}$$

Здесь

$$q = \ln\rho, \qquad q_i = \frac{\partial q}{\partial u_i}, \qquad q_{ik} = \frac{\partial^2 q}{\partial u_i \partial u_k} \tag{2.6}$$

Уравнения (2.5) служат для нахождения функций u_i, q в пространстве x_1x_2t.

Рассмотрим покоящийся газ с $u_1 = u_2 = 0$ и $\rho = 1$, по которому идет ударная волна. Уравнение поверхности фронта ударной волны будем брать в виде

$$\alpha_2 - f(\alpha_1) = 0 \tag{2.7}$$

Этот случай задания поверхности фронта уравнением $\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ будет являться основным, поскольку задание поверхности фронта уравнением $F(x_1, x_2, t) = 0$ приводит к дополнительному соотношению между u_1, u_2 и q как функциями α_1, α_2, вытекающему из условий Гюгонио. Условия Гюгонио в рассматриваемом случае запишутся так:

$$e^q = D^2, \qquad |\mathbf{u}| = D - \frac{1}{D}, \qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{t} = 0 \tag{2.8}$$

где D — скорость фронта, $\mathbf{t}$ — касательный вектор к линии фронта.

Метод исследования условий (2.8) аналогичен методу, примененному в работе [1] для вывода основных уравнений. Пользуясь формулами (2.1) и (2.5), уравнением

(2.7) и формулой

$$D=\frac{\partial\alpha_2/\partial t-f'\,\partial\alpha_1/\partial t}{\sqrt{(\partial\alpha_2/\partial x_1-f'\,\partial\alpha_1/\partial x_1)^2+(\partial\alpha_2/\partial x_2-f'\,\partial\alpha_1/\partial x_2)^2}}\tag{2.9}$$

условия (2.8) можно привести к виду

$$A_i+tB_i=0\qquad(i=1,\,3)$$

где A_i, B_i — функции лишь α_1 и, следовательно, в силу произвольности t, все равны нулю. Таким образом, получим четыре уравнения

$$u_1+u_2f'=0\tag{2.10}$$

$$(p_{11}+f'p_{12})\,u_1+(p_{21}+f'p_{22})\,u_2=0\qquad\left(p_{ij}=\frac{\partial\Delta_i}{\partial\alpha_j}\right)\tag{2.11}$$

$$f'e^{q/2}+\frac{u_1\,(-\Delta_2+f'\Delta_1)}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}=0\tag{2.12}$$

$$(p_{21}+f'p_{22})\,e^{q/2}+\frac{u_1\,[\Delta_1\,(p_{21}+f'p_{22})-\Delta_2\,(p_{11}+f'p_{12})]}{\sqrt{u^2+u_2^2}}=0\tag{2.13}$$

Наконец, исключение D из уравнений (2.8) даст еще одно следствие:

$$e^{q/2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2}+\sqrt{u_1^2+u_2^2+4}\right)\tag{2.14}$$

Докажем, что вдоль фронта $|\mathbf{u}|=\sqrt{F}=\mathrm{const}$. Для этого вычислим вдоль фронта

$$q=\int q_1\,du_1+q_2\,du_2$$

Используя (2.1) и (2.12), а также то обстоятельство, что вдоль фронта

$$du_i=\left(\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_2}f'\right)d\alpha_1$$

выражение для q можно привести к виду

$$q=-u_1^2-u_2^2-\frac{1}{2}\sqrt{(u_1^2+u_2^2)\,(u_1^2+u_2^2+4)}+Q\qquad(Q=\mathrm{const})\tag{2.15}$$

Сопоставляя (2.15) и (2.14), видим, что вдоль линии фронта $u_1^2+u_2^2=F=\mathrm{const}$, постоянная Q определяется заданием на фронте $|\mathbf{u}|$.

Таким образом, ударные волны в рассматриваемом классе течений изотермического газа могут распространяться лишь с постоянной скоростью фронта D, следовательно, вдоль линии фронта постоянны величины $|\mathbf{u}|$ и q.

Кроме того, анализ уравнений (2.10) — (2.13) показывает, что вдоль линии фронта выполняются следующие соотношения:

$$u_1|_{\alpha_2=f(\alpha_1)}=-f'\sqrt{\frac{F}{1+f'^2}},\qquad u_2|_{\alpha_2=f(\alpha_1)}=\sqrt{\frac{F}{1+f'^2}}\tag{2.16}$$

$$q_1|_{u_1^2+u_2^2=F}=\frac{G}{F}\,u_1,\qquad q_2|_{u_1^2+u_2^2=F}=\frac{G}{F}\,u_2\tag{2.17}$$

Здесь

$$F=\left(D-\frac{1}{D}\right)^2,\qquad G=G_1=-\frac{1}{2}\left(3F+\sqrt{F\,(F+4)}\right)\quad\text{или}$$

$$G=G_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{F\,(F+4)}-F\right)\tag{2.18}$$

Формулы (2.16) задают начальные данные на линии фронта для уравнений (2.3) и (2.4) в плоскости α_1, α_2, а формулы (2.17) — начальные данные для уравнения (2.2) в плоскости компонент скорости. Уравнение (2.2) и система уравнений (2.3), (2.4) для функций u_1 и u_2 в окрестности линии $u_1^2+u_2^2=F$ гиперболического типа в случае $G=G_1$ и, вообще говоря, эллиптического типа в случае $G=G_2$. Выбор знаков в формулах для u_1 и u_2 фиксирует направление распространения фронта ударной волны. Форма фронта в начальный момент времени, определяемая видом функции $f(\alpha_1)$, может быть задана произвольно. Отметим, что в случае конических течений ($\Delta_1=\alpha_1$, $\Delta_2=\alpha_2$) форма фронта не произвольна, а может быть лишь или плоской, или цилиндрической. Это следует из уравнений (2.10) — (2.13).

Функция q, удовлетворяющая условиям (2.17), однозначно находится из уравнения

$$2q''u + 2q' - 2q'^2u - 4q'^3u + 1 = 0 \qquad (q = q(u), \quad u = u_1^2 + u_2^2) \tag{2.19}$$

и из условий (2.17) для уравнения (2.9) ставится обычная задача Коши с начальными данными

$$q'\,|_{u=F} = \frac{G}{2F}, \qquad q\,|_{u=F} = 2\ln\frac{\sqrt{F} + \sqrt{F+4}}{2} \tag{2.20}$$

Заметим еще, что вид функции q не зависит от формы ударного фронта и определяется лишь скоростью его распространения и постоянными фона.

Введя потенциал скоростей Φ, уравнения (2.3), (2.4) можно свести к одному уравнению второго порядка.

Применив к нему преобразование Лежандра и введя полярные координаты $u_1 = r\cos\varphi$, $u_2 = r\sin\varphi$, для Φ° получим линейное уравнение второго порядка вида

$$\frac{\partial^2\Phi^\circ}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi^\circ}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial r} - 4q'^2(r^2)\left(\frac{\partial^2\Phi^\circ}{\partial\varphi^2} + r\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial r}\right) = 0 \tag{2.21}$$

причем

$$\Phi^\circ = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 - \Phi, \qquad \frac{\partial\Phi^\circ}{\partial u_1} = \alpha_1, \qquad \frac{\partial\Phi^\circ}{\partial u_2} = \alpha_2$$

Из условий (2.16) для уравнения (2.21) ставится следующая задача:

$$\left.\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial r}\right|_{r=\sqrt{F}} = \cos\varphi f'^{-1}(-\operatorname{ctg}\varphi) + \sin\varphi f(f'^{-1}(-\operatorname{ctg}\varphi)) = l(\varphi)$$

$$\sqrt{F}\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial r} - \Phi^\circ\,|_{r=\sqrt{F}} = 0 \tag{2.22}$$

Здесь f'^{-1} означает функцию, обратную к f'. В коэффициенты уравнения (2.21), явно не входит переменная φ и поэтому для решения задачи применим метод Фурье. Разыскивая решение в виде $\Phi^\circ = \psi(\varphi)\chi(r)$, для ψ и χ получим уравнения

$$\psi'' - \lambda\psi = 0 \qquad \chi'' - \left(4rq'^2 - \frac{1}{r}\right)\chi' - \lambda\left(4q'^2 - \frac{1}{r^2}\right)\chi = 0 \tag{2.23}$$

где λ — константа. Таким образом, Φ° можно брать в виде

$$\Phi^\circ = \sum_\lambda a_\lambda\psi_\lambda(\varphi)\,x_\lambda(r)$$

где a_λ — произвольные постоянные.

Для некоторых конкретных газодинамических задач (когда $\lambda = -k^2$, где k—целое) в предположении ограниченности $\chi_\lambda(\sqrt{F})$ для всех λ и достаточной гладкости функции $l(\varphi)$ можно оправдать применение метода Фурье для уравнения (2.21) в гиперболическом случае и доказать сходимость соответствующих рядов.

3. В качестве примера приведем решение задачи для изотермического газа, предполагая, что в начальный момент ударная волна имеет форму эллипса

$$x_1^2\,/\,a^2 + x_2^2\,/\,b^2 = 1 \tag{3.1}$$

а вещество перед фронтом (т. е. внутри эллипса) покоится, $\rho = 1$.

При $t = 0$ имеем $\alpha_i = x_i$ и достаточно найти распределение скоростей u_1, u_2 за ударной волной в момент времени $t = 0$. После этого течение в пространстве x_1, x_2, t найдется из формул (2. 5). Отметим, что рассмотрение наше предполагает гиперболичность уравнения (2.21) за фронтом ударной волны.

Линии $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ по симметрии будем считать жесткими стенками. Граничные условия на стенках $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ для потенциала Φ° ставятся так:

$$\left.\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial u_1}\right|_{u_1=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial u_2}\right|_{u_2=0} = 0 \tag{3.2}$$

В данном случае

$$l(\varphi) = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \tag{3.3}$$

Решая эту задачу методом Фурье, получим

$$\lambda = -(2m)^2, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

а для потенциала скоростей Φ° получим выражение

$$\Phi^\circ = s_0\chi_0(r) + \sum_{m=0}^{\infty} s_{2m}\chi_{2m}(r)\cos 2m\varphi \tag{3.4}$$

где

$$s_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{a^2\cos^2\frac{t}{2} + b^2\sin\frac{t}{2}}\,dt \quad s_{2m} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{a^2\cos^2\frac{t}{2} + b^2\sin^2\frac{t}{2}}\cos mt\,dt \tag{3.5}$$

т. е. коэффициенты выражаются через полные эллиптические интегралы, а начальные данные для $\chi_{2m}(r)$ следующие:

$$\chi_{2m}\big|_{r=\sqrt{F}} = \sqrt{F}, \qquad \chi'_{2m}\big|_{r=\sqrt{F}} = 1 \tag{3.6}$$

Функции χ_{2m} находятся численным интегрированием второго уравнения (2.23) после определения q также численным интегрированием из уравнения (2.19).

Зависимость функций u_1 и u_2 от x_1, x_2 ($t=0$) можно найти из соотношений

$$\partial\Phi^\circ / \partial u_1 = x_1, \qquad \partial\Phi^\circ / \partial u_2 = x_2 \tag{3.7}$$

Отметим, что движение ударной волны к центру эллипса можно рассматривать лишь до момента времени $t = t_0$, с которого начинается пересечение нормалей к линии фронта ударной волны и линия фронта образует излом.

4. Рассмотрим в заключение течения с прямолинейными характеристиками и ударными волнами в адиабатическом случае.

Течения эти описываются уравнениями [1].

$$\Delta_i = u_i + c\theta_i \qquad \left(\theta = \frac{2}{\gamma-1}c, c^2 = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_s\right) \tag{4.1}$$

$$\frac{\gamma-1}{2}\theta\left[(1-\theta_1^2)\theta_{22} + 2\theta_1\theta_2\theta_{12} + (1-\theta_2^2)\theta_{11}\right] + \frac{\gamma-3}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2) + 2 = 0 \tag{4.2}$$

$$(1-\theta_1^2)\partial u_1/\partial\alpha_1 - 2\theta_1\theta_2\partial u_1/\partial\alpha_2 + (1-\theta_2^2)\partial u_2/\partial\alpha_2 = 0 \tag{4.3}$$

$$\partial u_1/\partial\alpha_2 = \partial u_2/\partial\alpha_1 \tag{4.4}$$

$$x_i - \Delta_i(\alpha_1, \alpha_2)\,t = \alpha_i \qquad (i = 1,2) \tag{4.5}$$

Здесь

$$\theta_i = \frac{\partial\theta}{\partial u_i}, \qquad \theta_{ik} = \frac{\partial^2\theta}{\partial u_i \partial u_k}$$

По-прежнему будем считать, что ударная волна идет по покоящемуся газу и уравнение линии фронта брать в виде (2.7). Условия Гюгонио па фронте волны в этом случае будут выглядеть так:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{t} = 0 \tag{4.6}$$

$$\rho_1(u_{1n} - D) = -\rho_0 D \tag{4.7}$$

$$p_1 + \rho_1(u_{1n} - D)^2 = p_0 + \rho_0 D^2 \tag{4.8}$$

$$w_1 + \frac{1}{2}(u_{1n} - D)^2 = w_0 + \frac{1}{2}D^2, \qquad u_{1n} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \tag{4.9}$$

Здесь D — скорость фронта, величины с индексами 1 и 0 относятся соответственно к состояниям за фронтом и перед фронтом волны, w — энтальпия.

Таким образом, если задано уравнение состояния и ρ_0, уравнения (4.7), (4.8) и (4.9) представляют систему для определения величин u_{1n}, ρ и D, которые, следовательно, в данном случае являются постоянными. Отличие от изотермического газа состоит в том, что после задания состояния перед фронтом ударной волны скорость ударной волны определяется однозначно, как только задана энтропийная константа $a^2(S)$. Пользуясь выражением

$$D = -\frac{u_1\Delta + u_2\Delta_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \text{const} \tag{4.10}$$

и условием (4.6), аналогично случаю изотермического газа получим, что на фронте ударной волны должны выполняться соотношения

$$u_1|_{\alpha_2=f(\alpha_1)} = -f'\sqrt{\frac{F}{1+f'^2}} \qquad u_2|_{\alpha_2=f(\alpha_1)} = \sqrt{\frac{F}{1+f'^2}} \tag{4.11}$$

$$\theta_1|_{u_1^2+u_2^2=F} = \frac{C}{F}u_1, \qquad \theta_2|_{u_1^2+u_2^2=F} = \frac{C}{F}u_2 \tag{4.12}$$

причем $C=u_1\theta_1+u_2\theta_2=\mathrm{const}$ находятся из условия (4.10). Разыскивая функцию θ в виде $\theta=\theta(u_1^2+u_2^2)$ и полагая $u=u_1^2+u_2^2$, для функции θ получим уравнение второго порядка

$$(\gamma-1)\,\theta\,(\theta'+\theta''u-2\theta'^3u)+(\gamma-3)\,\theta'^2u+1=0 \tag{4.13}$$

Здесь

$$\theta'|_{u=F}=\frac{C}{2F}$$

а $\theta(F)$ определяется из условий Гюгонио. Так же как и в случае изотермического газа, функция $\theta(u)$ инвариантна относительно формы ударного фронта. Задачу с начальными данными (4.11) для потенциала скоростей Φ ($\partial\Phi/\partial\alpha=ui$) можно, совершенно аналогично изотермическому случаю, решать методом Фурье.

Таким образом, указанным методом можно получать точные решения некоторых газодинамических задач с ударными волнами и в адиабатическом случае.

Далее, рассмотренный метод дает возможность решать в некоторых случаях как для изотермического, так и для политропного газа задачи о движении криволинейных поршней, которые гонят перед собой ударную волну, в предположении достаточной гладкости в некотором смысле формы поршня для начального момента времени. Таким образом, можно получить некоторые обобщения решения Л. И. Седова о расширяющемся с постоянной скоростью цилиндрическом поршне [2] для криволинейных поршней. Эти вопросы будут рассмотрены в последующей статье. Полученные точные решения могут быть использованы, кроме того, как критерии точности некоторых численных методов.

В заключение приношу благодарность Н. Н. Яненко за внимание и ценные критические замечания.

Поступила 5 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками. ДАН, 1958, т. 123, № 5.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, ГИТТЛ, 1957.

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА

Э. П. Зимин

(Харьков)

Для плоского течения сделано обобщение решения, полученного в работе [1], на случай учета вязкой диссипации.

Плоское течение несжимаемого вязкого электропроводного газа между параллельными пластинками, нормально к которым приложено однородное магнитное поле интенсивностью H_0, при наличии теплообмена через стенки рассматривалось в работах [1,2]; в первой из них получено решение для однородного теплового потока без учета вязкой диссипации, во второй — решение с учетом вязкой диссипации, но при условии постоянства температуры стенки.

Рассмотрим течение жидкости между бесконечными неэлектропроводными пластинами $z=\pm b$, нормально к которым приложено однородное магнитное поле H_0. Жидкость характеризуется электропроводностью σ, плотностью ρ, теплоёмкостью c_p и коэффициентами вязкости μ и теплопроводности λ. Влиянием температуры на все эти параметры пренебрегаем.