О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

М. Н. Коган

(Москва)

В работе [1] рассмотрены плоские и осесимметричные магнитогазодинамические течения идеального газа в присутствии магнитного поля, параллельного скорости потока. В этой работе показано, что имеются две области гиперболических течений. В сверхзвуковой гиперболической области течения качественно подобны сверхзвуковым течениям обычной газодинамики. В дозвуковой гиперболической области ударные волны отходят от тела вверх по потоку, так что картина течения получается такой, как если бы тело обтекалось по законам обычной газодинамики потоком, направленным в противоположную сторону.

Покажем, что в пределах точности линейной теории этот факт справедлив и для пространственного течения и что вверх по потоку уходят не только ударные волны, но и вихревая пелена.

Линеаризированные уравнения магнитной газодинамики для идеального газа с бесконечной электропроводностью при магнитном поле, параллельном скорости после исключения магнитного поля, имеют вид [1]

$$
\begin{aligned}
&(1-M^2)\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 && \left(M=\frac{V_0}{a_0}\right)\\
&[M^2-N^2(1-M^2)]\frac{\partial v_x}{\partial y}-(M^2-N^2)\frac{\partial v_y}{\partial x}=0 && \left(N=\frac{V_a}{a_0}\right)\\
&[M^2-N^2(1-M^2)]\frac{\partial v_x}{\partial z}-(M^2-N^2)\frac{\partial v_z}{\partial x}=0 && \left(V_a=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь v_x, v_y и v_z — возмущенные скорости, V_0 — скорость набегающего потока, V_a — скорость Альфвена, H_0 — невозмущенное магнитное поле, ρ_0 — плотность набегающего нотока.

Возмущенное магнитное поле связано с возмущенными скоростями соотношениями

$$
\frac{h_x}{H_0}=(1-M^2)\frac{v_x}{V_0},\qquad \frac{h_y}{H_0}=\frac{v_y}{V_0},\qquad \frac{h_z}{H_0}=\frac{v_z}{V_0}
\tag{2}
$$

Преобразования

$$
\begin{gathered}
v_x=\frac{M^2-N^2}{M^2-N^2(1-M^2)}v_x^-,\qquad v_y=-v_y^-,\qquad v_z=-v_z^-,\\
x=-x^-,\qquad y=y^-,\qquad z=z^-
\end{gathered}
\tag{3}
$$

приводят систему (1) к виду

$$
\beta^2\frac{\partial v_x^-}{\partial x^-}-\frac{\partial v_y^-}{\partial y^-}-\frac{\partial v_z^-}{\partial z^-}=0,\qquad \frac{\partial v_x^-}{\partial y^-}-\frac{\partial v_y^-}{\partial x^-}=0,\qquad \frac{\partial v_x^-}{\partial z^-}-\frac{\partial v_z^-}{\partial x^-}=0
\tag{4}
$$

$$
\left(\beta^2=\frac{(N^2-M^2)(1-M^2)}{(M^2-N^2)(1-M^2)}\right)
$$

Очевидно, что β^2 положительно и уравнения имеют гиперболический тип при $N/\sqrt{1-N^2}<M<\min(N,1)$ и при $M>\max(1,N)$.

Наибольший интерес представляет первая из этих областей (квазигиперболическая[1]), в которой, как отмечалось, ударные волны уходят вверх по потоку.

Система (4) отличается от соответствующей системы линеаризированных уравнений обычной газодинамики лишь отсутствием третьего уравнения безвихренности.

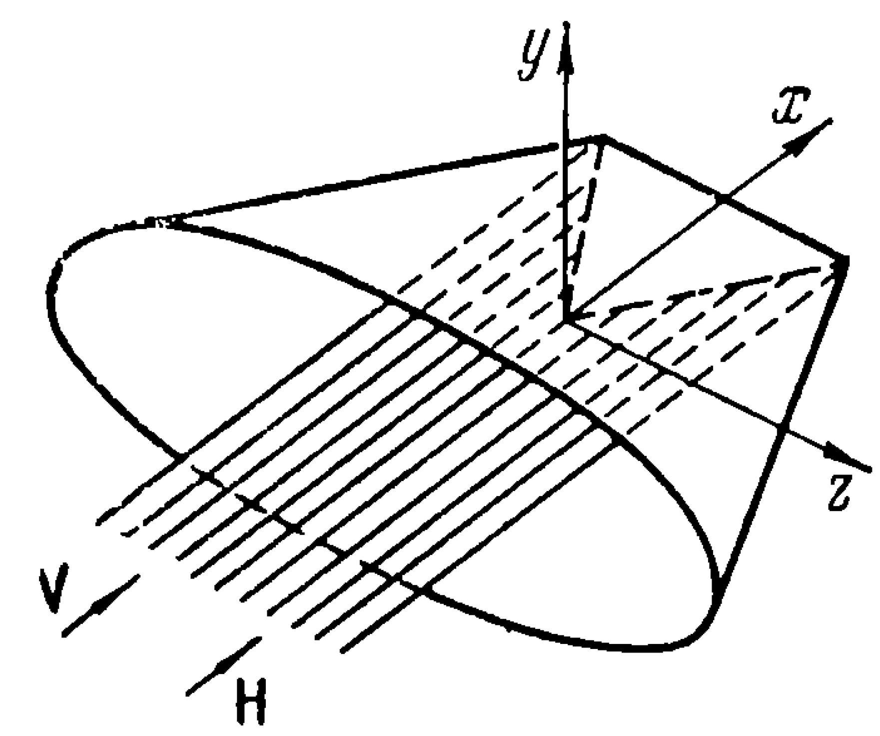
Из двух последних уравнений системы (4) имеем

$$
\frac{\partial v_y^-}{\partial z^-}-\frac{\partial v_z^-}{\partial y^-}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\frac{V_0}{H_0}\left(\frac{\partial h_z}{\partial y}-\frac{\partial h_y}{\partial z}\right)=F(y,z)
$$

Функция $F(y,z)$, вообще говоря, может быть отлична от нуля. Однако если на бесконечности $F(y,z)\equiv 0$, то при прохождении слабого скачка уплотнения произвольной ф р ы функция F остается равной нулю. Это следует из того факта, что соотношения, выполняющиеся в слабой ударной волне, совпадают с соотношением вдоль характеристик. Преобразованиями (3) эти соотношения сводятся к привычному в сверхзвуковой аэродинамике виду. Так как в обычной газодинамике поток при прохождении произвольной слабой ударной волны остается с точностью до кубов ее интенсивности безвихревым, то то же самое будет и в рассматриваемом случае, т. е. $F(y, z) \equiv 0$. Функция F может быть отличной от нуля лишь в области вихревой пелены.

Так как на теле $v_y^- = -v_y$, $v_z^- = -v_z$ а, кроме того, в дозвуковой гиперболической области ударные волны уходят в сторону возрастания x^-, то очевидно, что система (4) и граничные условия описывают течение обычной газодинамики около тела, обтекаемого обращенным потоком, т.е. $V^-_0 = -V_0$.

Если принять решение соответствующей задачи обычной газодинамики для обращенного течения за решение рассматриваемой магнитогидродинамической задачи, то образующаяся за крылом в обращенном течении вихревая пелена в исходном течении будет уходить от крыла вверх по потоку (фигура).



Фиг. 1

В сверхзвуковой гиперболической области картина течения получается качественно подобной течениям обычной аэродинамики. Для приведения системы (1)к виду (4) здесь достаточно заменить v_x на v_x^- согласно (3), оставив остальные переменные неизменными.

Отметим некоторые свойства пространственных течений, которые имеют место как в дозвуковых течениях, так и в сверхзвуковых.

Как показано выше, в обоих случаях решение магнитогидродинамической задачи может быть сведено к решению соответствующей задачи обычной аэродинамики. В рамках линейной теории последнее решение безвихревое.

Однако очевидно, что в исходном течении игрековые и зетовые компоненты вихрей и токов будут отличны от нуля. В магнитогидродинамических ударных волнах касательные составляющие скорости и поля терпят разрыв. Следовательно, скачок представляет собой вихревой и токовый слой. В пространственном течении интенсивность скачка меняется от точки к точке, а, следовательно, в скачок или из скачка должны втекать или вытекать токи.

На поверхности тела скорость и магнитное поле терпят тангенциальный разрыв. В обычной аэродинамике разность интенсивностей присоединенных вихрей в двух сечениях крыла равнялась интенсивности, сходящей с крыла на участке между рассматриваемыми сечениями вихревой пелены. Из построенного выше решения видно, что в магнитогидродинамическом случае вихри и токи из пристеночного слоя уходят не только в виде пелены, но и в поток, так что нормальные к поверхности крыла, составляющие тока и вихря, не равны нулю.

Таким образом, токи в скачке, пристеночном слое, вихревой пелене и во всем течении связаны в «единую энергетическую систему».

Отметим, что построенное для квазигиперболического случая решение с вихревой пеленой, уходящий вверх по потоку, не может быть полностью обосновано в рамках теории идеальной жидкости. Однако установленный в ряде работ факт, что при доальфвеновских скоростях в жидкости с бесконечной электропроводностью вязкий след распространяется вверх по потоку, служит, в известной мере, оправданием предложенной здесь картины течения.

Автор пользуется случаем выразить свою признательность А. А. Дородницину и В. В. Сычеву за обсуждение результатов работы.

Поступила 2 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Магнитодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.