ДИФРАКЦИЯ ОТ ПОЛУПЛОСКОСТИ ВОЛН, ОБРАЗУЕМЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИ ДЕЙСТВУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ

С. С. Войт

(Москва)

§ 1. Постановка задачи и получение ее решения. Бесконечно глубокая идеальная тяжелая жидкость заполняет полупространство $z<0$. В жидкость погружена плоская полубесконечная вертикальная стенка, граница которой совпадает с осью Oz. Под поверхностью жидкости в некоторой точке, характеризующейся цилиндрическими координатами $(r', \alpha, -h)$, находится источник, функционирующий периодически с частотой σ и имеющий максимальную мощность Q.

Изучается дифракция волн, возникающих на поверхности жидкости. Считая движение жидкости потенциальным и принимая во внимание периодический характер движения, вводим потенциал скоростей $\varphi(r, \theta, z)e^{i\sigma t}$. Функция $\varphi(r, \theta, z)$ во всем полупространстве, занятом жидкостью, должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \tag{1.1}$$

условию на свободной поверхности жидкости

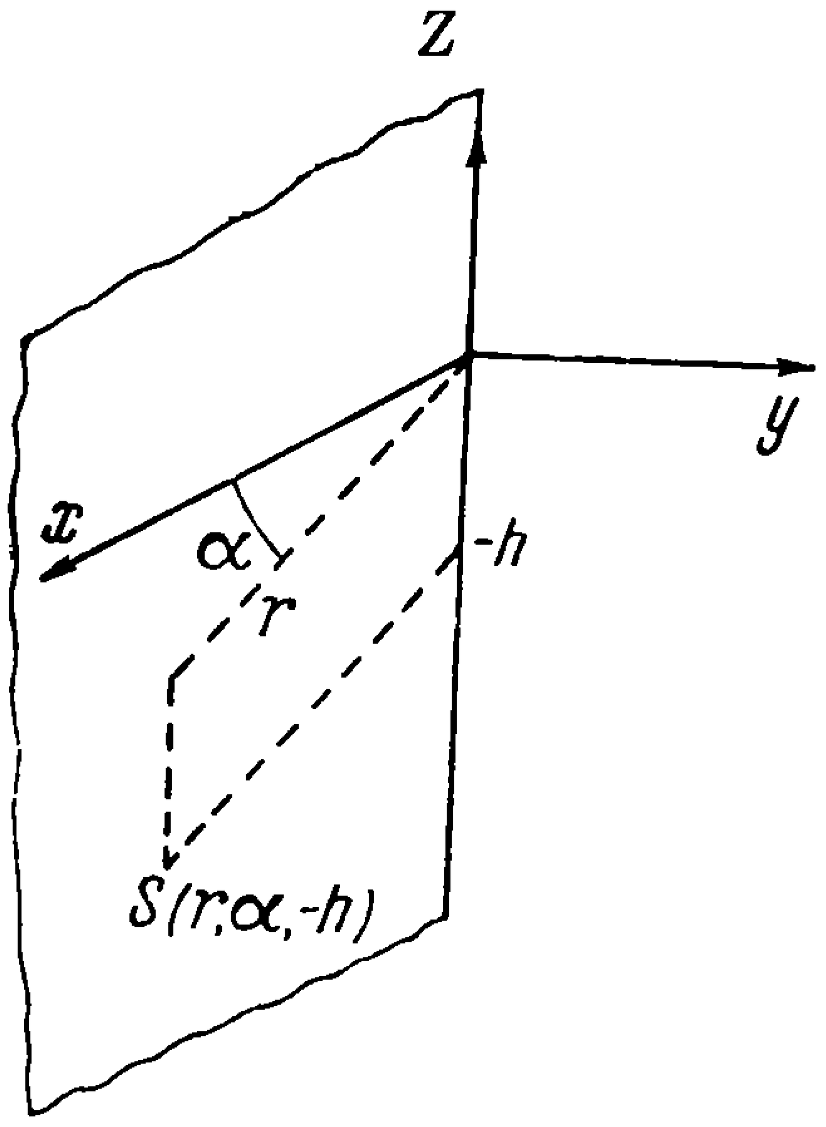
$$\varphi = \frac{g}{\sigma^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad \text{при} \quad z = 0 \tag{1.2}$$

и условиям на твердой стенке

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0 \qquad \text{при } \theta = 0 \quad \text{и } \theta = 2\pi \tag{1.3}$$

Движение должно затухать с увеличением глубины места наблюдения, поэтому

$$\varphi(r, \theta, z) \to 0, \qquad \text{при } z \to -\infty \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Наконец, в точке $S(r', \alpha, -h)$ функция $\varphi(r, \theta, z)$ должна иметь особенность вида (1.5)

$$\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{R_1}$$

$$R_1^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \alpha) + (z - z')^2$$

Задача заключается в нахождении решения уравнения Лапласа (1.1), удовлетворяющего условиям (1.2) — (1.5). Имея в виду интегральное представление потенциала источника в безграничной жидкости

$$\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z+h)^2}} = \frac{Q}{4\pi}\int_0^\infty e^{-k(z+h)} J_0(kR)\,dk \tag{1.6}$$

будем отыскивать функцию $\varphi(r, \theta, z)$ в виде

$$\varphi(r, \theta, z) = \frac{Q}{4\pi}\left[\int_0^\infty e^{-k(z+h)}\Psi(k, r, \theta)\,dk + \int_0^\infty e^{kz}A(k)\Psi(k, r, \theta)\,dk\right] \tag{1.7}$$

где функция $A(k)$ определяется таким образом, чтобы удовлетворялось граничное условие (1.2). Подставляя $\varphi(r, \theta, z)$ в форме (1.7) в уравнение (1.2), получаем для функции $A(k)$ следующее выражение

$$A(k) = -e^{-kh}\frac{1 + gk/\sigma^2}{1 - gk/\sigma^2} \tag{1.8}$$

Таким образом функция $\varphi(r, \theta, z)$ согласно (1.7) может быть для $-z<h$ представлена в виде

$$\varphi(r, \theta, z) = \frac{Q}{4\pi}\left[\int_0^\infty e^{-k(z+h)}\Psi(k, r, \theta)\,dk - \int_0^\infty e^{-k(h-z)}\frac{1 + gk/\sigma^2}{1 - gk/\sigma^2}\Psi(k, r, \theta)\,dk\right] \tag{1.9}$$

Функция $\Psi(k, r, \theta)$ находится, следуя Зоммерфельду [1], путем построения разветвленных решений уравнения Лапласа. Она была этим методом определена Л. Н. Сретенским в работе [2].

Функция $\Psi(k, r, \theta)$ имеет следующий вид:

$$\Psi(k, r, \theta) = \begin{cases} J_0(kR) + J_0(k\bar{R}) + V(\theta, r, k) & \text{для} \quad 0 < \theta < \pi - \alpha \\ J_0(kR) + V(\theta, r, k) & \text{для} \quad \pi - \alpha < \theta < \pi + \alpha \\ V(\theta, r, k) & \text{для} \quad \pi + \alpha < \theta < 2\pi \end{cases} \tag{1.10}$$

$$V(\theta, r, k,) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} [(e^{\frac{1}{2}(\alpha-\theta)i} e^{\frac{1}{2}\eta} + e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\theta)i} e^{-\frac{1}{2}\eta})^{-1} + \tag{1.11}$$

$$+ (e^{\frac{1}{2}(\alpha+\theta)i} e^{-\frac{1}{2}\eta} + e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\theta)i} e^{\frac{1}{2}\eta})^{-1}] J_0(kR_\eta)\, d\eta$$

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \alpha)$$
$$\bar{R}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta + \alpha) \tag{1.12}$$
$$R_\eta^2 = r^2 + r' + 2rr' \operatorname{ch} \eta$$

Для изучения формы взволнованной поверхности жидкости воспользуемся зависимостью между возвышением свободной поверхности жидкости и потенциалом скоростей

$$\zeta = \frac{i\sigma}{g} \varphi(r, \theta, 0) e^{i\sigma t} \tag{1.13}$$

Откуда

$$\zeta(r, \theta) = \frac{iQ\sigma}{2\pi g} e^{i\sigma t} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-kh}}{k - \sigma^2 / g} \Psi(k, r, \theta)\, k\, dk \tag{1.14}$$

На основании выражения (1.10) для $\Psi(k, r, \theta)$ возвышение поверхности жидкости можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 && \text{для} \quad 0 < \theta < \pi - \alpha \\ &\zeta = \zeta_1 + \zeta_3 && \text{для} \quad \pi - \alpha < \theta < \pi + \alpha \\ &\zeta = \zeta_3 && \text{для} \quad \pi + \alpha < \theta < 2\pi \end{aligned} \tag{1.15}$$

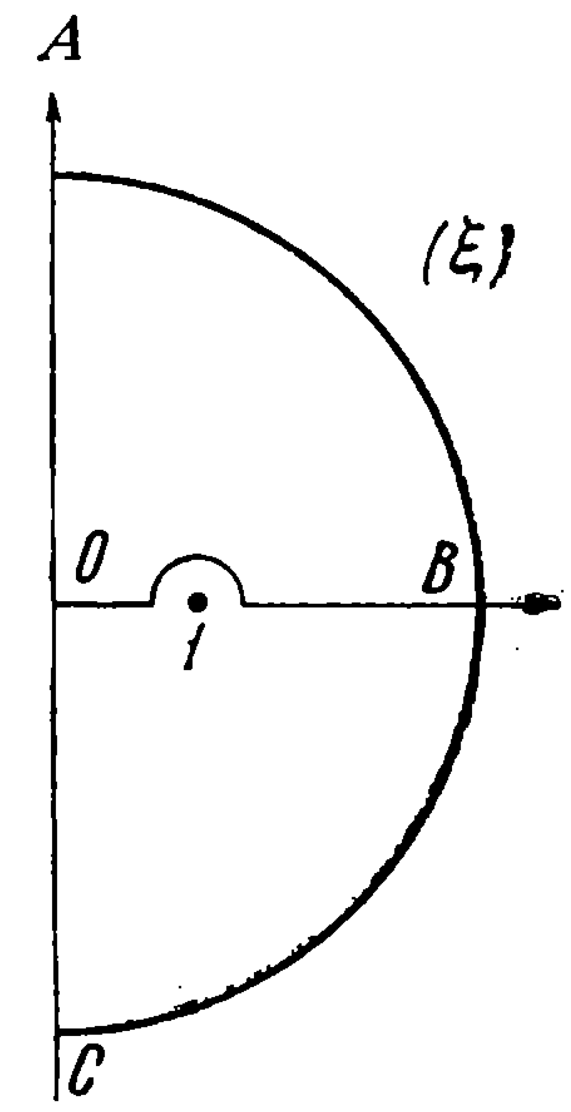
$$\zeta_1 = \frac{iQ\sigma^3}{2\pi g^2} e^{i\sigma t} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\xi\right) J_0\left(\frac{\sigma^2}{g} R\xi\right) \frac{\xi d\zeta}{\xi - 1} \tag{1.16}$$

$$\zeta_2 = \frac{iQ\sigma^3}{2\pi g^2} e^{i\sigma t} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\xi\right) J_0\left(\frac{\sigma^2}{g} \bar{R}\xi\right) \frac{\xi d\zeta}{\xi - 1} \tag{1.17}$$

$$\zeta_3 = -\frac{iQ\sigma^3}{8\pi^2 g^2} e^{i\sigma t} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\xi\right) \frac{\xi d\xi}{\xi - 1} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\cos[\frac{1}{2}(\alpha - \theta)] \operatorname{ch}(\frac{1}{2}\eta)}{\cos^2[\frac{1}{2}(\alpha - \theta)] \operatorname{ch}^2(\frac{1}{2}\eta) + \sin^2]\frac{1}{2}(\alpha - \theta)] \operatorname{sh}^2(\frac{1}{2}\eta)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos[\frac{1}{2}(\alpha + \theta)] \operatorname{ch}(\frac{1}{2}\eta)}{\cos^2[\frac{1}{2}(\alpha + \theta)] \operatorname{ch}^2(\frac{1}{2}\eta) + \sin^2[\frac{1}{2}(\alpha + \theta)] \operatorname{sh}^2(\frac{1}{2}\eta)}\right] J_0\left(\frac{\sigma^2}{g} R_\eta \xi\right) d\eta \tag{1.18}$$



Фиг. 2

Слагаемое ζ_1 соответствует волнам, возбуждаемым на поверхности жидкости, занимающей полупространство $z < 0$, когда источник находится в точке $S(r', \alpha, -h)$. Слагаемое ζ_2 — волнам, возбуждаемым источником, находящимся в сопряженной точке $S_1(r', -\alpha, -h)$. Наконец, ζ_3 есть слагаемое, обязанное дифракции.

§ 2. Асимптотический анализ решения. Получим асимптотические формулы для возвышения жидкости. Начнем с анализа ζ_1. Заменяя функцию Бесселя полусуммой функций Ганкеля запишем интеграл, входящий в выражение (1.16) в виде

$$J = \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\xi\right) H_0^{(1)}\left(\frac{\sigma^2}{g} R\xi\right) \frac{\xi d\xi}{\xi - 1} + \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\xi\right) H_0^{(2)}\left(\frac{\sigma^2}{g} R\xi\right) \frac{\xi d\xi}{\xi - 1} \tag{2.1}$$

Считая безразмерную величину $\sigma^2 R / g$ большой, заменим интегрирование по действительной оси интегрированием по пути OAB (фиг. 2) в первом слагаемом и по пути OCB во втором слагаемом, где AB и CB — дуги круга бесконечно большого радиуса.

В первоначальном выражении на пути интегрирования расположен полюс $\xi = 1$ подынтегральной функции.

Условимся, что путь интегрирования таков, что этот полюс обходится по полуокружности малого радиуса, лежащей в верхней полуплоскости. Как выяснится из дальнейшего анализа, при таком выборе пути интегрирования выполняется условие излучения. При замене пути интегрирования во втором слагаемом формулы (2.1) следует учесть вычет относительно точки $\xi = 1$. Выполняя указанную замену путей интегрирования и подсчитав вычет относительно точки $\xi = 1$, преобразуем выражение (2.1) к виду

$$J = -\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\alpha i\right) H_0^{(1)}\left(i\frac{\sigma^2}{g}R\alpha\right)\frac{\alpha d\alpha}{\alpha i - 1} -$$

$$- \int_0^{-\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\alpha i\right) H_0^{(2)}\left(i\frac{\sigma^2}{g}R\alpha\right)\frac{\alpha d\alpha}{\alpha i - 1} - 2\pi i\exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\right) H_0^{(2)}\left(\frac{\sigma^2}{g}R\right) \tag{2.2}$$

Интегралы, входящие в это выражение, могут быть асимптотически оценены при помощи теоремы, доказанной Л. Н. Сретенским в работе [3][1]. Производя вычисления, приходим к выводу, что эти интегралы имеют порядок $(\sigma^2 R/g)^{-2}$, а поэтому

$$J = -2\pi i\exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\right) H_0^{(2)}\left(\frac{\sigma^2}{g}R\right) + O\,(\sigma^2 R/g)^{-2} \tag{2.3}$$

Итак, для больших значений параметра $\sigma^2 R/g$ часть возвышения ζ_1 может быть представлена в виде

$$\zeta_1 = \frac{Q\sigma^3}{2g^2}e^{i\sigma t}\exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\right) H_0^{(2)}\left(\frac{\sigma^3}{g}R\right) + (\sigma^2 R/g)^{-2} \tag{2.4}$$

Аналогичные рассуждения приводят для больших значений параметра $\sigma^2\overline{R}/g$ к асимптотической оценке величины

$$\zeta_2 = \frac{Q\sigma^3}{2g^2}e^{i\sigma t}\exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\right) H_0^{(2)}\left(\frac{\sigma^2}{g}\overline{R}\right) + O\,(\sigma^2\overline{R}/g)^{-2} \tag{2.5}$$

Перейдем теперь к асимптотической оценке величины ζ_3. Для этого прежде всего определим тот параметр, по которому будет производиться асимптотическая оценка, а следовательно, установим и те области, в которых будут справедливы асимптотические формулы.

Введем безразмерные параметры ρ, ρ' и ρ_1, определив их следующим образом

$$r = \rho r_0, \quad r' = \rho' r_0, \quad R = \rho_1 r_0$$

Положим, что величина $\omega = \sigma^2 r_0/g$ столь велика, что в асимптотических оценках можно учитывать лишь первые слагаемые рядов по обратным степеням ω. Положим также, что асимптотические формулы будут отыскиваться для тех положений точек наблюдения и тех положений источника, для которых все параметры ρ, ρ' и ρ_1 могут быть выбраны бо́льшими единицы.

Заменяя в выражении (1.18) порядок интегрирования, получим

$$\zeta_3 = -\frac{iQ\sigma^3}{8\pi^2 g^2}e^{i\sigma t}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\cos{}^1/_2(\alpha-\theta)\operatorname{ch}({}^1/_2\eta)}{\cos^2[{}^1/_2(\alpha-\theta)]\operatorname{ch}^2({}^1/_2\eta)+\sin^2[{}^1/_2(\alpha-\theta)]\operatorname{sh}^2({}^1/_2\eta)} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\cos{}^1/_2(\alpha+\theta)\operatorname{ch}({}^1/_2\eta)}{\cos^2[{}^1/_2(\alpha+\theta)]\operatorname{ch}^2({}^1/_2\eta)+\sin^2[{}^1/_2(\alpha+\theta)]\operatorname{sh}^2({}^1/_2\eta)}\right]d\eta\,\times$$

$$\times\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\xi\right) J_0\left(\frac{\sigma^2}{g}R_\eta\xi\right)\frac{\xi\,d\xi}{\xi - 1} \tag{2.6}$$

---

[1] Пусть

$$f(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \xi^{\frac{m}{l}-1} \quad (l > 0)$$

Тогда при больших значениях ω имеет место асимптотическое представление

$$\int^{-\infty} f(\xi)\,H_s^{(2)}(i\xi\omega)\,d\xi = \sum_{m=1}^{\infty}\delta_m a_m \omega^{-\frac{m}{l}} \qquad \left(\delta_m = \int_0^{-\infty}\eta^{\frac{m}{l}-1}H_s^{(2)}(i\eta)\,d\eta\right)$$

Для внутреннего интеграла имеем при больших значениях величины $\sigma^2 R_\eta / g$ (а следовательно, и подавно для больших значений $\sigma^2 r_0 / g$) асимптотическую оценку

$$J_1=\int_0^\infty \exp\left(-\frac{g^2h}{g}\xi\right)J_0\left(\frac{\sigma^2}{g}R_\eta\xi\right)\frac{\xi\,d\xi}{\xi-1}=$$

$$=-\pi i\exp\left(-\frac{\sigma^2h}{g}\right)H_0^{(2)}\left(\frac{\sigma^2}{g}R_\eta\right)+O\left[\left(\frac{\sigma^2r_0}{g}\right)^{-2}\right] \tag{2.7}$$

Учитывая лишь первые слагаемые асимптотических рядов, получаем для ζ_3 следующее выражение:

$$\zeta_3=-\frac{Q\sigma^3}{8\pi g^2}e^{i\sigma t}\exp\left(-\frac{\sigma^2h}{g}\right)\Big\{\cos\left[{}^1/_2(\alpha-\theta)\right]\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}({}^1/_2\eta)\,H_0^{(2)}(\sigma^2R_\eta/g)\,d\eta}{\cos^2\left[{}^1/_2(\alpha-\theta)\right]\operatorname{ch}^2({}^1/_2\eta)+\sin^2\left[{}^1/_2(\alpha-\theta)\right]\operatorname{sh}^2({}^1/_2\eta)}+$$

$$+\cos\left[{}^1/_2(\alpha+\theta)\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}({}^1/_2\eta)\,H_0^{(2)}(\sigma^2R_\eta/g)\,d\eta}{\cos^2\left[{}^1/_2(\alpha+\theta)\right]\operatorname{ch}^2({}^1/_2\eta)+\sin^2\left[{}^1/_2(\alpha+\theta)\right]\operatorname{sh}^2({}^1/_2\eta)}\Big\} \tag{2.8}$$

Рассмотрим один из интегралов формулы (2.8), например, первый

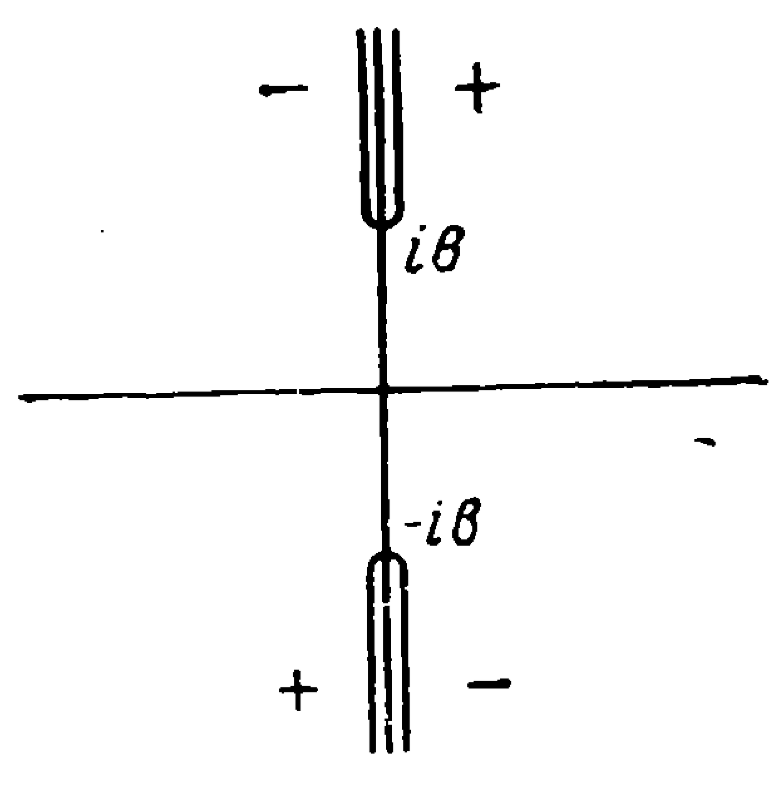
$$J_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}({}^1/_2\eta)\,H_0^{(2)}(\sigma^2R_\eta/g)}{\cos^2\left[{}^1/_2(\alpha-\theta)\right]\operatorname{ch}^2({}^1/_2\eta)+\sin^2\left[{}^1/_2(\alpha-\theta)\right]\operatorname{sh}({}^1/_2\eta)}\,d\eta \tag{2.9}$$

Производя в нем замену переменного интегрирования по формуле

$$\operatorname{ch}\eta=1+\beta^2$$

получаем

$$J_1\frac{8}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{H_0^{(2)}(\sigma^2R_\eta/g)}{\cos^2\left[{}^1/_2(\alpha-\theta)\right](2+\beta^2)+\beta^2\sin^2\left[{}^1/_2(\alpha-\theta)\right]}\,d\beta$$



Фиг. 3

Подставляя R_η в виде (2.10)

$$R_\eta^2=2\rho\rho' r_0^2\left[\frac{(\rho+\rho')^2}{2\rho\rho'}+\beta^2\right] \tag{2.11}$$

и заменяя функцию Ганкеля первым членом ее асимптотического представления

$$H_0^{(2)}(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-{}^1/_4\pi)}$$

интеграл J_1 можем записать в виде

$$J_1=\frac{8}{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sigma^2r_0}{g}\right)^{-{}^1/_2}(2\rho\rho')^{-{}^1/_4}\int_0^\infty F(\beta)\,e^{-\omega w(\beta)}\,d\beta \tag{2.12}$$

где

$$F(\beta)=(b^2+\beta^2)^{-{}^1/_4}\frac{1}{\cos^2\left[{}^1/_2(\alpha-\theta)\right](\beta^2+2)+\beta^2\sin^2\left[{}^1/_2(\alpha-\theta)\right]}$$

$$w(\beta)=i\sqrt{2\rho\rho'}\sqrt{b^2+\beta^2},\qquad b^2=\frac{(\rho+\rho')^2}{2\rho\rho'},\qquad \omega=\frac{\sigma^2r_0}{g} \tag{2.13}$$

Асимптотическая оценка интеграла в формо (2.12) может быть выполнена методом перевала. Будем считать β комплексным переменным и определим знаки корня $\chi=\sqrt{b^2+\beta^2}$, для чего проведем разрезы от точек ветвления корня $\beta=\pm ib$ до бесконечности вдоль мнимой оси и примем, что на первом листе, по которому производится интегрирование, распределение знаков корня приведено на фиг. 3.

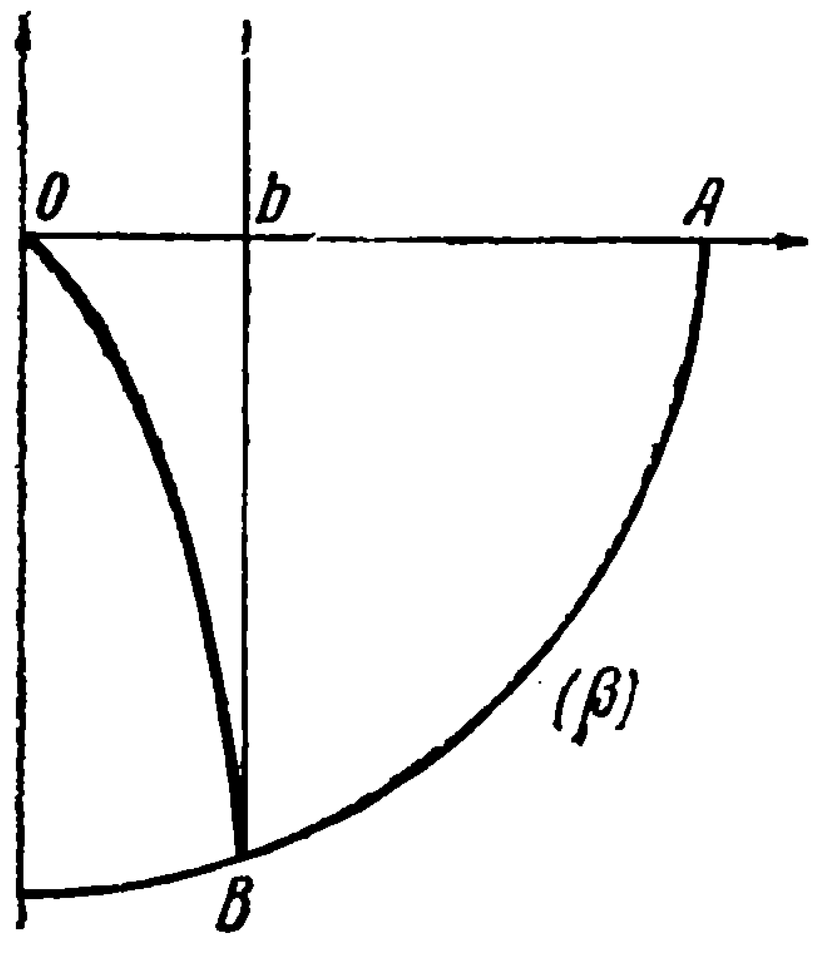
Точка перевала расположена в начале координат, а путь (фиг. 4), вдоль которого мнимая часть функции $w(\beta)$ остается постоянной, при удалении от начала координат асимптотически приближается к прямой $\operatorname{Re}\beta=b$. Деформируем первоначальный путь интегрирования OA и заменим его на путь OBA, где BA есть дуга круга бесконечно большого радиуса. Используя далее известный метод разложения подынтегральной функции в ряд в окрестности точки перевала [4] и применяя для оценки лемму Пуанкаре [4,5], получаем в результате всех преобразований асимп тическую оценку интеграла J_1 в виде

$$J_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{g}{\sigma^2 r_0 \sqrt{\rho\rho^1}} \exp\left[-i\,\frac{\sigma^2 r_0(\rho+\rho')}{g}\right] \frac{1}{\cos^2[{}^1/_2(\alpha-\theta)]} + O\left(\frac{\sigma^2 r_0}{g}\right)^{-2} \qquad (2.1\cdot$$

Оценка второго интеграла в формуле (2.8) производится аналогично. В резул тате для слагаемого ζ_3 возвышения жидкости ζ получаем

$$\zeta_3 = -\frac{Q\sigma}{2\pi\sqrt{\pi g}} \frac{1}{\sqrt{rr'}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{i\sigma\left[t - \frac{\sigma(r+r')}{g}\right]\right\} \frac{\cos({}^1/_2\alpha)\cos({}^1/_2\theta)}{\cos[{}^1/_2(\alpha-\theta)]\cos[{}^1/_2(\alpha+\theta)]} \qquad (2.1\text{Ł}$$

При α или θ, равных π, возвышение $\zeta_3 = 0$. Это означает (в указанном ране приближении), что если источник или точка наблюдения находится на продолжени полуплоскости, относительно которой происходит диф ракция, то слагаемое ζ_3 отсутствует. Фаза дифрагиро ванной волны определяется суммарным расстояние до начала координат точки наблюдения и источника, убывание амплитуды — квадратным корнем из произ ведения этих расстояний. Следует заметить, что пр углах θ, близких к $\pi - \alpha$ и $\pi + \alpha$, асимптотическо выражение (2.15) теряет смысл.



Фиг. 4

В заключение отметим, что подобный метод може быть применен к решению задачи о волнах, возбуждаемых на поверхности жидкости колеблющимся телом, расположенным около погруженной в жидкость стенки. При этом должен быть использован метод Н. Е. Кочина замены колеблющегося тела распределением источников и стоков.

Автором решена задача о волнах на свободной поверхности и поверхности раздела, когда источник расположен около твердой стенки, погруженной в жидкую среду, состоящую из однородного жидкого полупространства и плавающего на нем слоя жидкости другой плотности. Опуская здесь довольно громоздкие выкладки, приведем одну из полученных формул. Если плотность $z = 0$ совпадает с невозмущенной границей раздела, толщина слоя h, а глубина погружения источника под поверхностью раздела H, то для части возвышения свободной поверхности ζ_{13}, обязанной дифракции, получено следующее выражение

$$\zeta_{13} = -\frac{Q\sigma}{2\pi\sqrt{\pi g}} \frac{\cos({}^1/_2\alpha)\cos({}^1/_2\theta)\,e^{i\sigma t}}{\cos[{}^1/_2(\alpha-\theta)]\cos[{}^1/_2(\alpha+\theta)]} \left\{\frac{\exp(-\sigma^2 H/g)\exp[-i(r+r')\sigma^2/g]}{\operatorname{ch}(\sigma^2 h/g) - (1-2\alpha)\operatorname{sh}(\sigma^2 h/g)} + \right.$$
$$\left. + \frac{g}{\sigma^2 h} \frac{\exp[-(\sigma^2 H/g)\xi_0]\exp[-i(\sigma^2/g)\xi_0(r+r')]}{(\xi_0-1)\{1-[(1-\alpha)\xi_0-\alpha]^2-(g/\sigma^2 h)(1-\alpha)\}\operatorname{sh}[(\sigma^2 h/g)\xi_0]}\right\} \frac{1}{\sqrt{rr'}}$$

Здесь $\alpha = \rho_1/\rho$ — отношение плотности слоя к плотности жидкого полупространства, а ξ_0 — корень трансцендентного уравнения

$$\operatorname{th}\frac{\sigma^2 h}{g}\,\xi = \frac{1}{(1-\alpha)\xi - \alpha}$$

Поступила 30.XI.1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.
2. Сретенский Л. Н. Дифракция волн в задаче Коши—Пуассона. ДАН, 1959, т. 129, № 1.
3. Сретенский Л. Н. Распространение волн в упругом полупространстве при движении приливной волны на поверхности бассейна круговой формы. Тр. Морск. гидроф. ин-та АН СССР, 1955, т. VI.
4. Войт С. С. Распространение начальных уплотнений в вязком газе. Уч. зап. МГУ, Механика, 1954, вып. 172.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1, ИИЛ, 1949.