

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН (КОРОТКИХ) ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕПЯТСТВИЯ (ЦИЛИНДРА, СФЕРЫ, КОНУСА И ПЛОСКОСТИ)

П. И. Цой

(Тула)

В теории звука рассматривается решение различных задач о дифракции звуковых волн относительно препятствия (плоскости, решетки, щели, цилиндра, сферы, эллипсоида и др.). В предлагаемой работе автор, применяя метод Пуанкаре [1], дает другое решение задачи.

§ 1. Постановка задачи. Из теории звука известно, что в случае гармонического движения с множителем времени $e^{i\sigma t}$ потенциал скоростей Φ звуковых волн удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \quad \left(k = \frac{\sigma}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\right) \quad (1.1)$$

и граничному условию на поверхности препятствия Σ

$$\partial\Phi / \partial n = 0 \quad (1.2)$$

Здесь c — скорость звука, λ — длина волны, n — внутренняя нормаль к поверхности Σ . Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$\Phi = \frac{e^{-ikr'}}{r'} + f \quad (1.3)$$

Здесь первый член представляет потенциал скоростей от расходящихся из источника E сферических волн, r' — расстояние исследуемой точки M от источника E , а второй член — функция возмущения, вызванного отраженными волнами от поверхности Σ . Функция f определяется по закону

$$f = \iint_{\Sigma} \rho \frac{e^{-ikR}}{R} d\sigma \quad (1.4)$$

где ρ — плотность источников потенциала отраженных волн на поверхность Σ , а R — расстояние между произвольной точкой поверхности Σ и исследуемой точкой M , где определяется потенциал скоростей Φ (фиг. 1).

Для определения ρ на поверхности Σ применим теорию ньютоновского потенциала для простого акустического слоя. Известно, что нормальная составляющая скорости при переходе через поверхность Σ претерпевает разрыв [2], т. е.

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_0}{\partial n} = 2\pi\rho \quad (1.5)$$

где $\partial V_0 / \partial n$ — внешняя нормальная производная потенциала акустического слоя, а $\partial V_e / \partial n$ — прямое назначение нормальной производной в точке поверхности Σ .

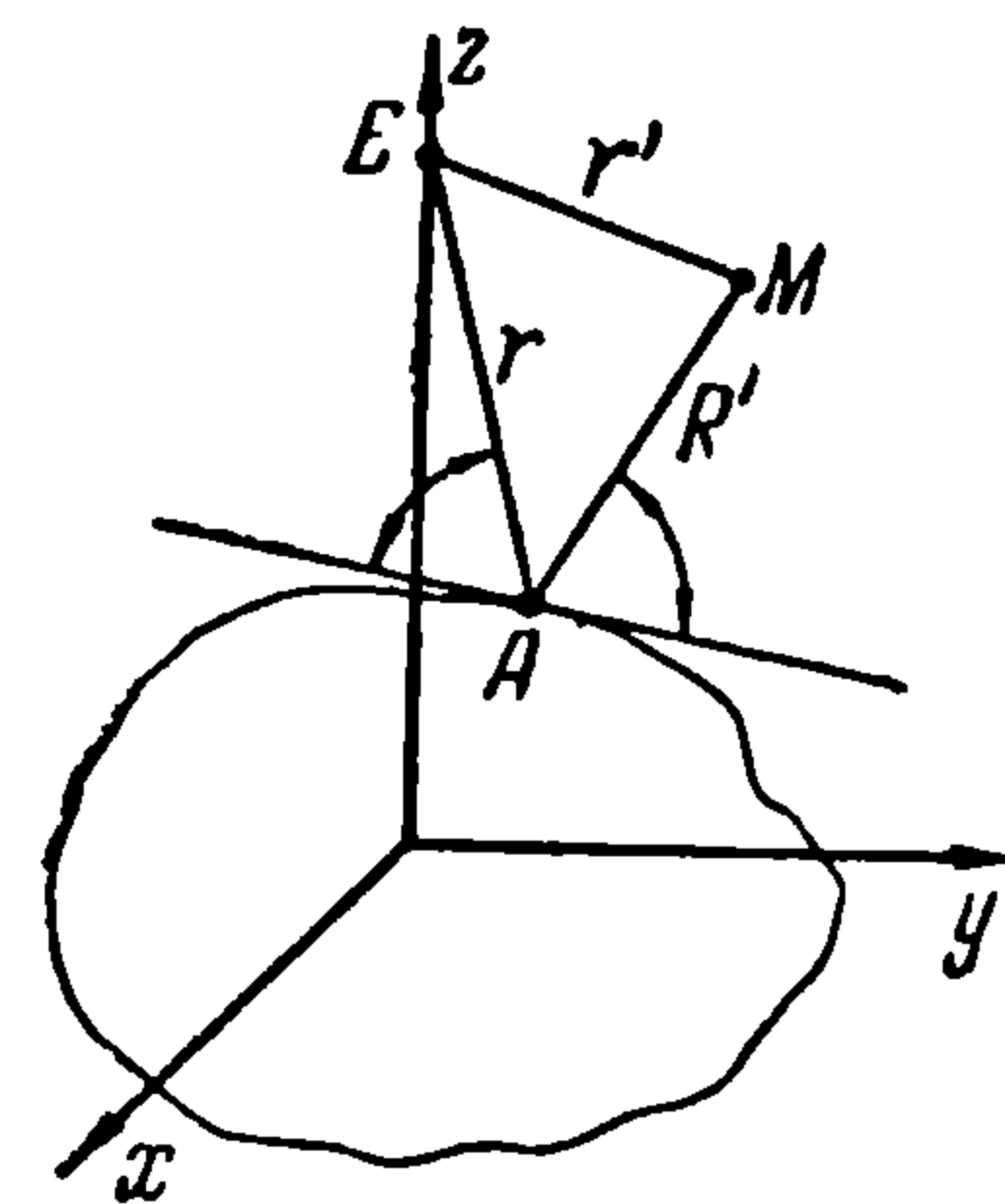
Для рассматриваемой задачи условие (1.5) имеет следующий вид

$$\rho = \frac{1 + ikr}{2\pi r^2} e^{-ikr} \cos\psi + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \rho \frac{1 + ikR'}{R'^2} \frac{\partial R'}{\partial n} e^{-ikR'} d\sigma \quad (1.6)$$

Здесь r — расстояние источника E от фиксированной точки поверхности Σ , а R' — расстояние между фиксированной и переменной точками поверхности Σ ; через ψ обозначен угол между r и внутренней нормалью к поверхности Σ в той точке, где определяется расстояние r .

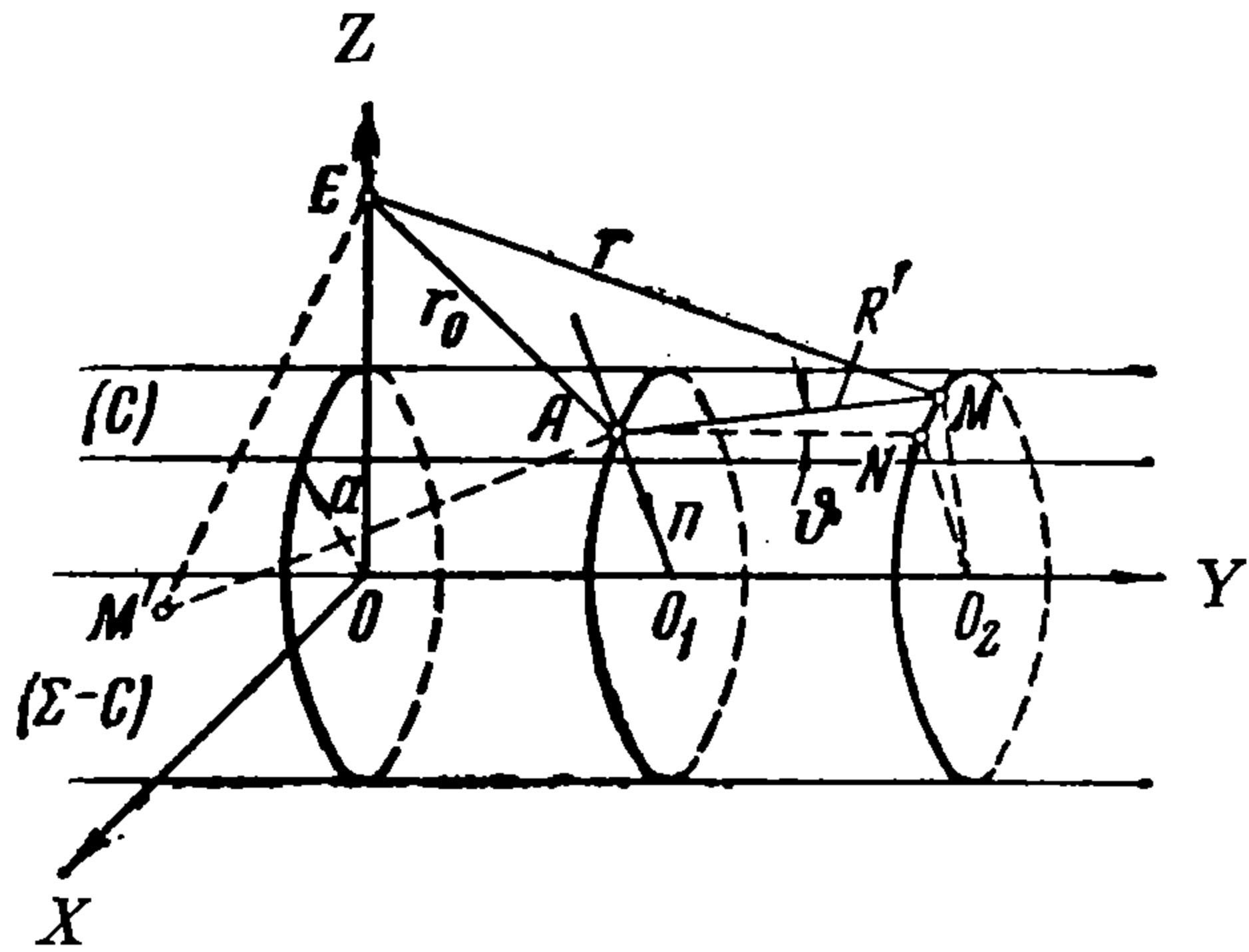
Таким образом, для определения функции f прежде всего нужно решить интегральное уравнение (1.6) для различных поверхностей препятствий Σ .

§ 2. Решение интегрального уравнения для цилиндрического препятствия. Пусть имеется бесконечная цилиндрическая труба с радиусом сечения a . Вне цилиндрической трубы на расстоянии l от оси цилиндра находится источник звука E с постоянной интенсивностью I_0 .



Фиг. 1

Из точки E проведем две касательные плоскости к поверхности цилиндра. Часть поверхности, находящейся ближе к источнику E , обозначим через (C) , а другую часть поверхности Σ — через $(\Sigma - C)$ (фиг. 2).



Фиг. 2

Докажем следующее предложение. С точностью до слагаемых порядка $1/ka$, по сравнению с единицей, плотность ρ , удовлетворяющая уравнению (1.6), определяется формулой

$$\rho = \frac{1 + ikr}{2\pi r^2} e^{-ikr} \cos \psi \quad \text{на } (C) \quad (2.1)$$

$$\rho = 0 \quad \text{на } (\Sigma - C) \quad (2.2)$$

Для доказательства формулы (2.1) возьмем на поверхности (C) точку A . Для этой точки найдем второй член левой части формулы (1.6).

Применяя замены переменных в подынтегральном выражении (1.6), после несложного преобразования двойной интеграл (1.6) приводится к следующему виду

$$\begin{aligned} \iint_{(\Sigma)} \rho \frac{1 + ikR'}{R'^2} \frac{\partial R'}{\partial n} e^{-inR'} d\sigma &= \iint_{(C)} \rho \frac{1 + ikR'}{R'^2} \frac{\partial R'}{\partial n} e^{-ikR'} d\sigma = \\ &= \iint_{(C)} \frac{1 + ikr}{2\pi r^2} \frac{1 + ikR'}{R'^2} \cos \psi \frac{\partial R'}{\partial n} e^{-ik(R'+r')} d\sigma = \\ &= \iint_{(C)} \frac{1 + ikr}{2\pi r^2} \frac{1 + ikR'}{\sqrt{4a^2 - R'^2 \sin^2 \vartheta}} e^{-ik(R'+r')} \cos \psi \sin^2 \vartheta dR' d\vartheta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Покажем, что этот интеграл (2.3) мал по сравнению с ka , следовательно, им можно пренебречь. Для этого применим метод Пуанкаре, т. е. следующую формулу для определения приближенного значения двойного интеграла

$$\iint \eta(x, y) e^{ik\omega(x, y)} d\sigma = \eta(0, 0) e^{ik\omega(0, 0)} \frac{2\pi}{k\sqrt{\nu\mu}} \exp\left(\pm \frac{\pi i}{2}\right) \quad (2.4)$$

Здесь $\nu = \omega_x''$, $\mu = \omega_y''$ и знак плюс берется, когда $\nu > 0$ и $\mu > 0$, а знак минус берется, когда $\nu < 0$ и $\mu < 0$. Применение формулы (2.4) к (2.3) дает

$$\iint_{(C)} \frac{1 + ikr}{2\pi r^2} \frac{1 + ikR'}{\sqrt{4a^2 - R'^2 \sin^2 \vartheta}} e^{-ik(R'+r')} \cos \psi \sin^2 \vartheta dR' d\vartheta = fe^{-ikr_0} + O[(ka)^{-1}] \quad (|f| < 1)$$

Пренебрегая этим интегралом по сравнению с ka , из формулы (1.6) получим формулу (2.1). Чтобы доказать предложение (2.2) на поверхности $(\Sigma - C)$, покажем, что

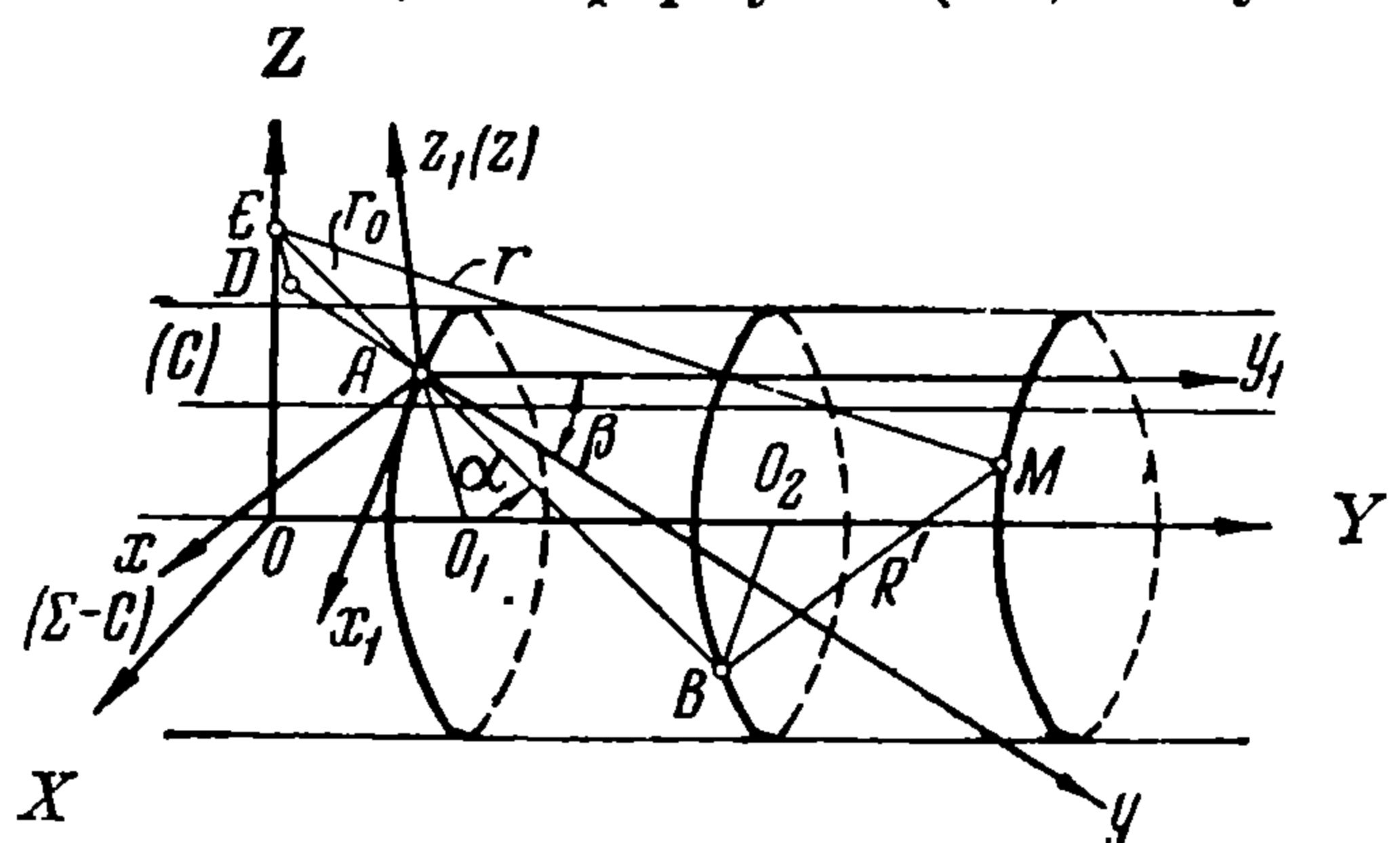
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{(\Sigma)} \rho \frac{1 + ikR'}{R'^2} \frac{\partial R'}{\partial n} e^{-ikR'} d\sigma &= \\ &= - \frac{1 + ikr}{2\pi r^2} e^{-ikr} \cos \psi \end{aligned} \quad (2.5)$$

На поверхности $(\Sigma - C)$ возьмем точку B и соединим ее с точкой E прямой линией EB , которая пересекает поверхность Σ цилиндра в точке A ($A < C$) (фиг. 3).

Построим софокусные эллипсоиды вращения с фокусами в точках E и B . Тогда один из них обязательно будет касаться поверхности цилиндра. Эта точка лежит на части поверхности $(\Sigma - C)$, где $\rho = 0$.

Уравнение поверхности цилиндра в координатной системе $Ax_1y_1z_1$ (ось $Ay_1 \parallel Oy$ лежит на Σ , а ось $Ax_1 \perp y_1Az_1$, причем Az_1 совпадает с внешней нормалью в точке A поверхности Σ) имеет вид

$$x_1^2 + z_1^2 + 2az_1 = 0 \quad (2.6)$$



Фиг. 3

Вместо $Ax_1y_1z_1$ возьмем другую систему координат $Axyz$ (ось Az совпадает с осью Az_1 , ось Ay совпадает с проекцией прямой EB на касательную плоскость в точке A поверхности Σ , а ось Ax перпендикулярна к плоскости zAy).

Тогда уравнение поверхности цилиндра в координатной системе $Axyz$ имеет вид

$$(x \sin \beta + y \cos \beta)^2 + z^2 + 2az = 0 \quad (2.7)$$

где β — угол между осями Ay_1 и Ay .

Тогда расстояние точек E и B от произвольной переменной точки M поверхности E определяется так

$$\begin{aligned} r^2 &= EM^2 = x^2 + (y + r_0 \cos \alpha)^2 + (z - r_0 \sin \alpha)^2 \\ R'^2 &= BM^2 = x^2 + (y - r_0 \cos \alpha)^2 + (z + r_0 \sin \alpha)^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

где x, y, z — координаты точки M , $r_0 = EA$, $R_0 = AB$ и α — угол между прямой EA и касательной плоскостью в точке поверхности цилиндра Σ .

Разлагая r и R' в ряд Тейлора и учтя формулы (2.7), найдем $R' + r$ в виде

$$R' + r = R_0 + r_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} \right) + \frac{y^2}{2} \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} \right) + \dots$$

Тогда на основании формул (2.1), (2.4) и (2.8) двойной интеграл в (1.6) равен

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \iint_{(\Sigma)} \rho \frac{1 + ikR'}{R'^2} \frac{\partial R'}{\partial n} e^{-inR'} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(C)} \frac{1 + ikr}{2\pi r^2} \frac{1 + ikR'}{R'^2} \cos \psi \frac{\partial R'}{\partial n} \exp[-ik(R' + r)] d\sigma = - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 + ikr_0}{2\pi r_0^2} \cos \psi_0. \end{aligned}$$

$$\frac{1 + ikR_0}{R_0^2} \left(\frac{\partial R'}{\partial n} \right)_0 \frac{2\pi \exp[-ik(R_0 + r_0)]}{k(R_0^{-1} + r_0^{-1}) \sin \alpha} = \frac{ki(R_0 + r_0)}{2\pi(R_0 + r_0)^2} (\cos \psi)_B \exp[-ik(R_0 + r_0)]$$

но

$$\left[- \frac{(\partial R' / \partial n)_0 \cos \psi_0}{(\cos \psi)_B \sin \alpha} \right] = 1$$

Следовательно,

Для точки B имеем: $R_0 + r_0 = r$. Опуская индекс B при $\cos \psi$, имеем

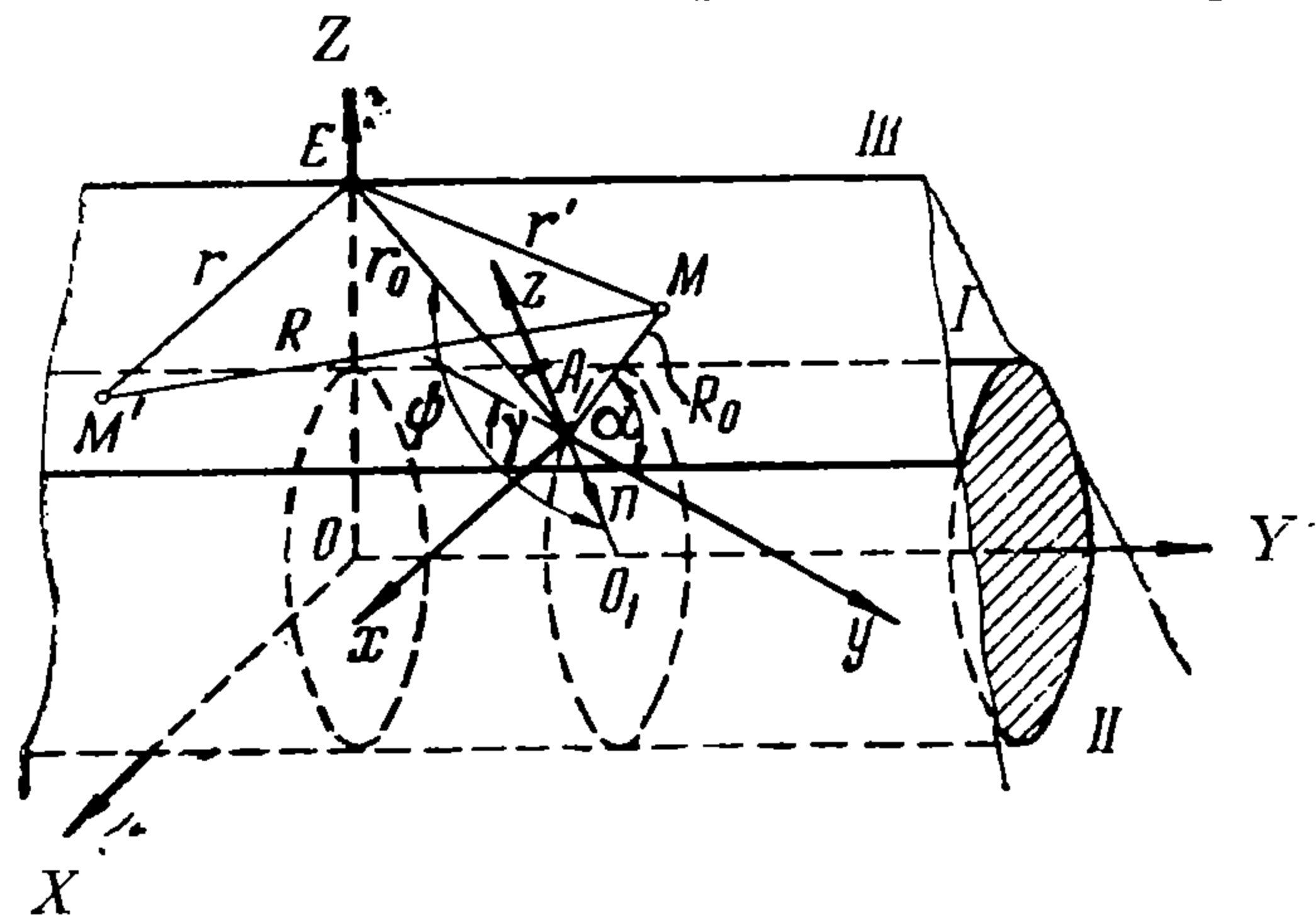
$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(\Sigma)} \rho \frac{i + ikR'}{R'^2} \frac{\partial R'}{\partial n} e^{-ikR'} d\sigma = - \frac{ikr}{2\pi r^2} e^{-ikr} \cos \psi = - \frac{1 + ikr}{2\pi r^2} e^{-ikr} \cos \psi$$

Тем самым доказана справедливость формулы (2.5). Таким образом, на поверхности $(\Sigma - C)$ цилиндра $\rho = 0$.

§ 3. Определение функции f для цилиндрического препятствия. Здесь учитывалось, что

Две касательные плоскости, проведенные из точки E к поверхности цилиндра, делят пространство на три области: область I , заключенная между касательными плоскостями и частью поверхности (C) , область III , заключенная между касательными плоскостями и частью поверхности $(\Sigma - C)$, область II — остальная часть пространства (фиг. 4).

I. Пусть исследуемая точка M находится в области I или в области III . Определим начало A подвижной системы координат $Axyz$. Построим софокусные эллипсоиды вращения с фокусами в точках E и M . Тогда один из них будет касаться поверхности (C) , а другой — поверхности $(\Sigma - C)$. Интересно рассмотреть тот случай, когда точка A лежит на поверхности (C) , так как $\rho = 0$ на $(\Sigma - C)$.



Фиг. 4

Из точки A проведем две прямые AE и AM , которые одинаково наклонены к касательной плоскости в точке A поверхности Σ под углом α .

Тогда плоскость EAM проходит через нормаль O_1A к поверхности Σ . Возьмем координатную систему $Axyz$ (фиг. 4). Разложение $R+r$ в ряд Тейлора дает

$$R+r = R_0 + r_0 + \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{2\sin\alpha \sin^2\beta}{a} \right] + \quad (3.1)$$

$$+ \frac{y^2}{2} \left[\sin^2\alpha \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} \right) + \frac{2\sin\alpha \cos^2\beta}{a} \right] + \dots$$

Функция f на основании формул (1.4), (2.1), (2.4) и (3.1) определяется так:

$$f = \iint_{(\Sigma)} \frac{1+ikr}{2\pi r^2} \frac{\cos\psi}{R_0} e^{-ik(R_0+r_0)} \exp \left\{ -ki \left[\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{2\sin\alpha \sin^2\beta}{a} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{y^2}{2} \left\{ \sin^2\alpha \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} \right) + \frac{2\sin\alpha \cos^2\beta}{a} \right\} \right] \right\} d\sigma =$$

$$= \frac{1+ikr_0}{2\pi r_0^2} \frac{\cos\psi_0}{R_0} e^{-ik(R_0+r_0)} \frac{-2\pi i}{k} \left\{ \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{2\sin\alpha \sin^2\beta}{a} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\sin^2\alpha \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} \right) + \frac{2\sin\alpha \cos^2\beta}{a} \right] \right\}^{-1/2} = \frac{1+ikr_0}{2\pi r_0} \frac{-2\pi i \cos\psi_0}{k \frac{R_0+r_0}{a}} \times$$

$$\times e^{-ik(R_0+r_0)} \left\{ \left(a + \frac{2R_0r_0 \sin\alpha \sin^2\beta}{R_0+r_0} \right) \left(a \sin^2\alpha + \frac{2R_0r_0 \sin\alpha \cos^2\beta}{R_0+r_0} \right) \right\}^{-1/2}$$

Задача рассматривается с точностью до слагаемых порядка $1/ka$ по сравнению с единицей, т. е. $1 \ll ka$. Так как $a < r_0$, то $1 \ll ka < kr_0$. Поэтому имеем

$$\frac{1+ikr_0}{2\pi r_0} \frac{-2\pi i}{k} \approx \frac{ikr_0}{2\pi r_0} \frac{-2\pi i}{k} = 1$$

Следовательно

$$f = \cos\psi_0 e^{-ik(R_0+r_0)} \left\{ \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{2\sin\alpha \sin^2\beta}{a} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\sin^2\alpha \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} \right) + \frac{2\sin\alpha \cos^2\beta}{a} \right] \right\}^{-1/2} \quad (3.2)$$

Так как $\cos\psi_0 = \cos(1/2\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, то

$$f = -P \frac{e^{-ik(R_0+r_0)}}{R_0+r_0} P = \frac{a \sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\left(a + \frac{2R_0r_0 \sin\alpha \sin^2\beta}{R_0+r_0} \right) \left(a \sin\alpha + \frac{2R_0r_0 \cos^2\beta}{R_0+r_1} \right)}} \quad (3.3)$$

Отсюда решение уравнения (1.1) с учетом временного множителя $e^{i\omega t}$ и интенсивности источника звука I_0 можно написать в виде

$$\Phi = I_0 \frac{e^{i(\omega t - kr')}}{r'} - I_0 P \frac{e^{i(\omega t - kR_0 - kr_0)}}{R_0+r_0} \quad (3.5)$$

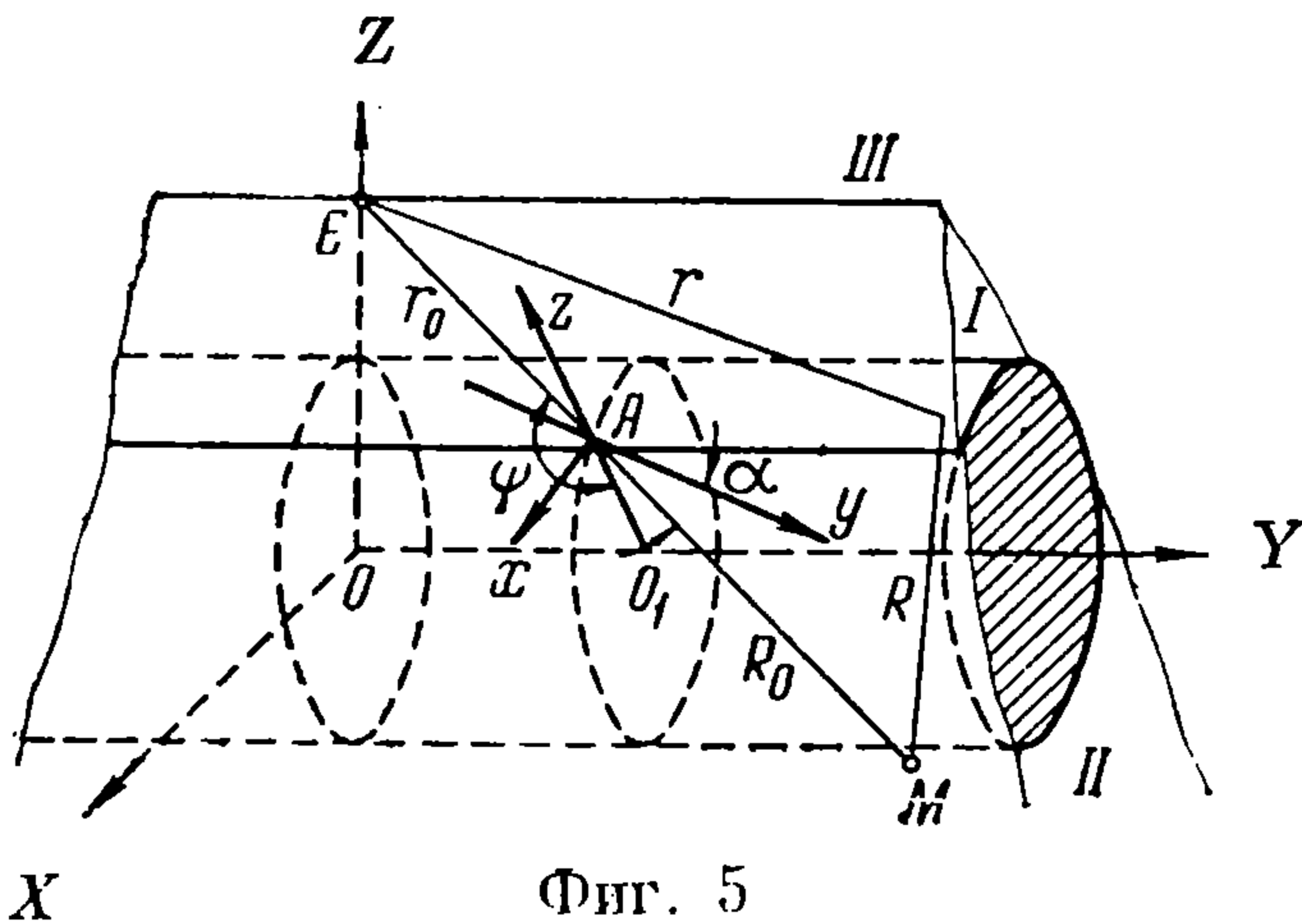
II. Теперь найдем функцию f , следовательно и функцию Φ , когда точка M находится в области II (фиг. 5).

Покажем, что область II является теневой областью звука.

Прямая EA пересекает поверхности Σ в двух точках. Возьмем точку A , лежащую на части поверхности (C) цилиндра.

Тогда относительно этой подвижной точки построим координатную систему $Axyz$, как показано на фиг. 5. Тогда разложение $R+r$ в ряд Тейлора дает

$$R+r = R_0 + r_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} \right) + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0} \right) \sin^2\alpha + \dots \quad (3.6)$$



Фиг. 5

Функция f на основании формул (1.4), (2.1), (2.4) и (3.6) будет

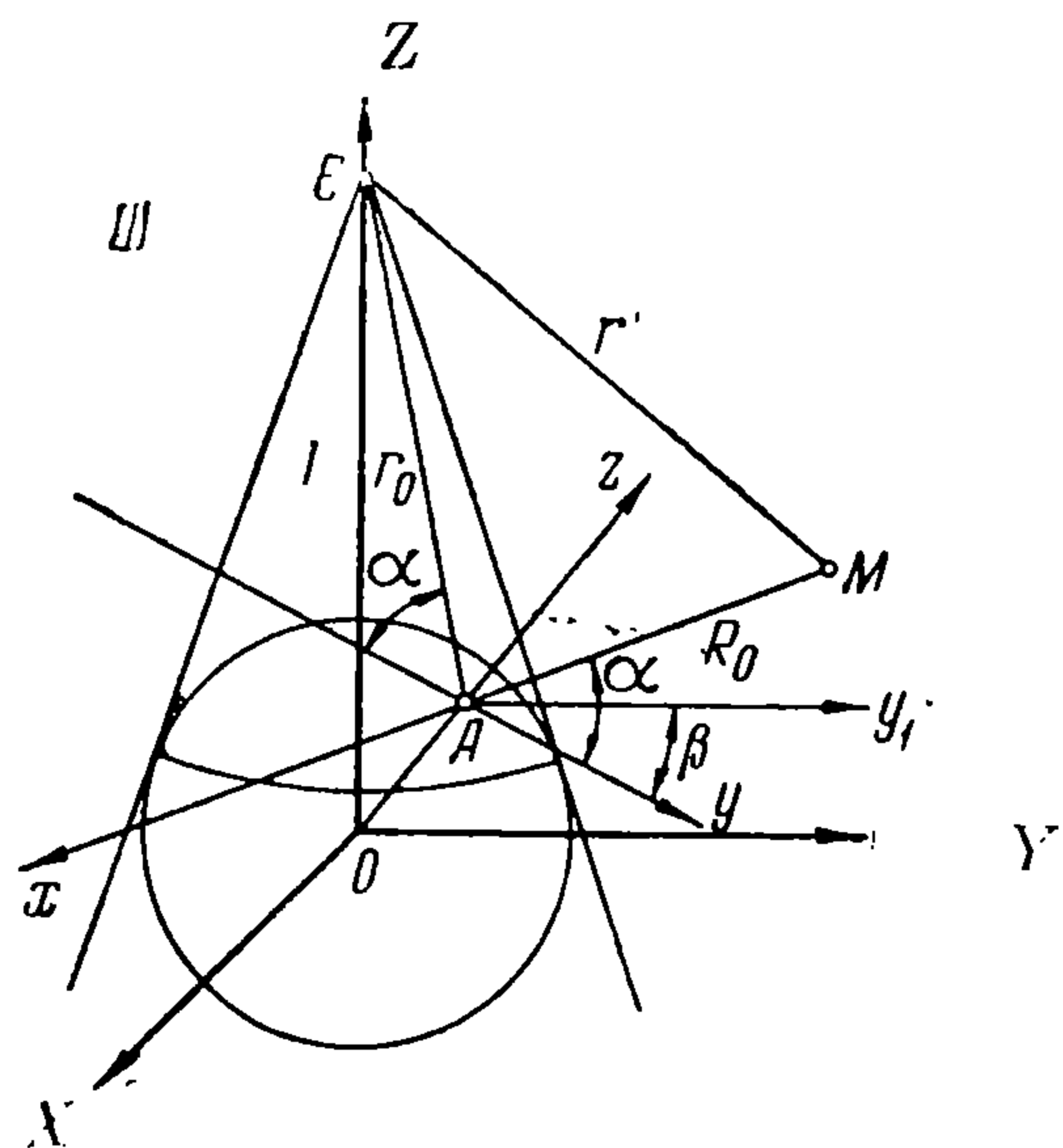
$$f = \iint_{(\Sigma)} \rho \frac{e^{-ikR}}{R} d\sigma = \iint_{(C)} \frac{1 + ikr}{2\pi r^2} \cos \psi \frac{e^{-ik(R+r)}}{R} d\sigma =$$

$$= \frac{1 + ikr_0}{2\pi r_0^2} \cos \psi_0 \frac{e^{-ik(R_0+r_0)}}{R_0} \frac{-2\pi i}{k(R_0^{-1} + r_0^{-1}) \sin \alpha} = - \frac{e^{-ik(R_0+r_0)}}{R_0 + r_0} = - \frac{e^{-ikr'}}{r'} \quad (3.7)$$

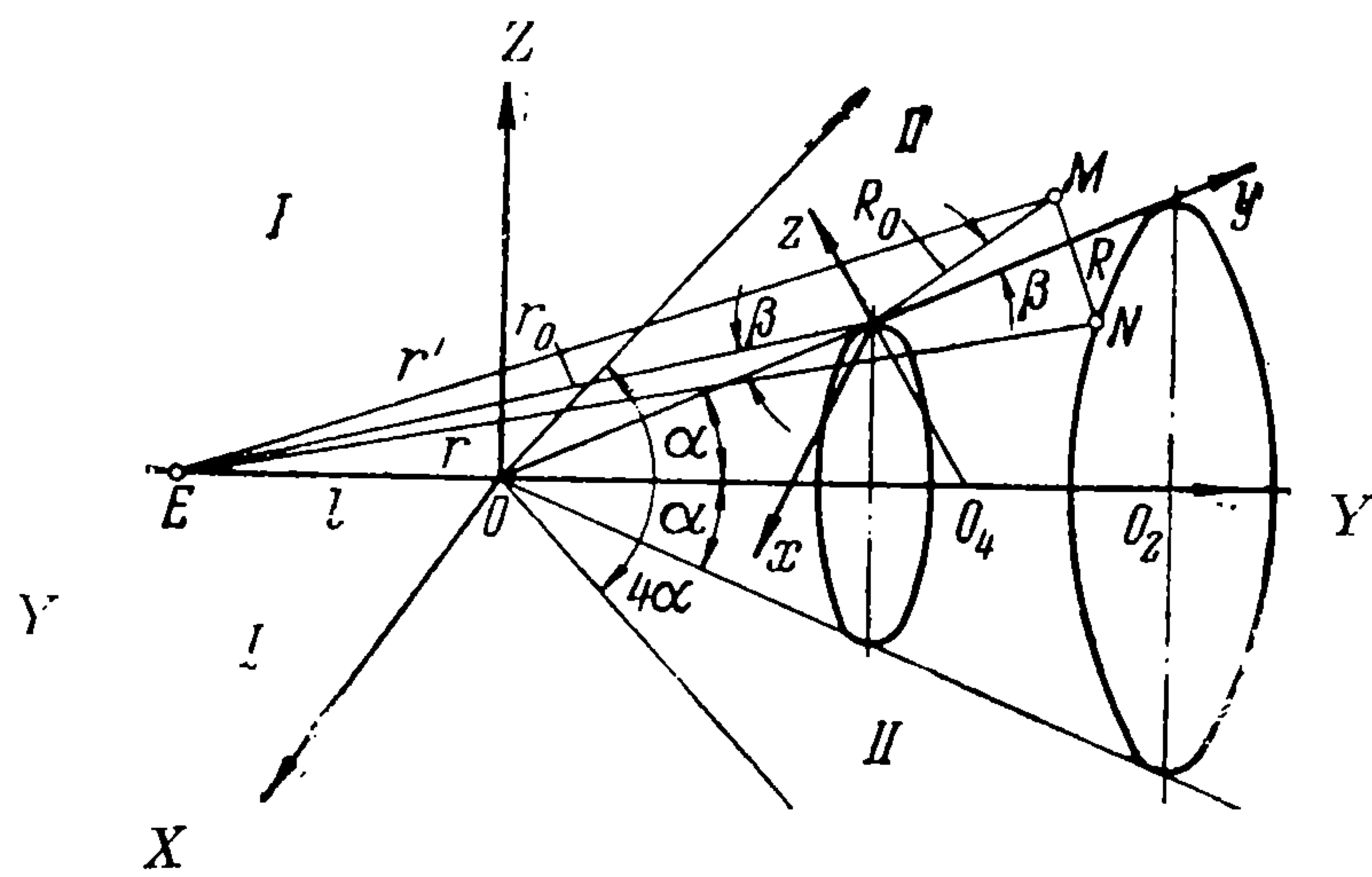
Здесь учитывается, что $R_0 + r_0 = r'$ для исследуемой точки M . Тогда решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\Phi = I_0 \frac{e^{i(\sigma t - kr')}}{r'} - I_0 \frac{e^{i(\sigma t - kr')}}{r'} = 0 \quad (3.8)$$

Таким образом, для вычисления потенциала скоростей для коротких звуковых волн в случае цилиндрического препятствия можно применять с точностью до $O(1/ka)$ приближенные асимптотические формулы (3.5) и (3.8).



Фиг. 6



Фиг. 7

§ 4. Решение уравнения (1.1) в случае различных препятствий. Применяя § 2 и § 3 к различным препятствиям, получим вне теневой области

$$\Phi = I_0 \frac{e^{i(\sigma t - kr')}}{r'} - p I_0 \frac{e^{i(\sigma t - kR_0 - kr_0)}}{R_0 + r_0} \quad (4.1)$$

где p определяется в виде:
для сферы [3] (фиг. 6)

$$p = \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\sqrt{\left(\sin \alpha + \frac{2R_0 r_0}{a(R_0 + r_0)}\right) \left(1 + \frac{2R_0 r_0}{a(R_0 + r_0)} \sin \alpha\right)}} \quad (4.2)$$

для конуса (фиг. 7) в областях I и II соответственно

$$p = 0, \quad p = \sin \beta \left(1 + \frac{2R_0 r_0 \sin \beta \cos^2 \beta}{a(R_0 + r_0) \sin \alpha}\right)^{-1/2} \quad (4.3)$$

для плоскости (фиг. 8)

$$p = \sin \beta \quad (4.4)$$

В теневой области для всех вышеуказанных препятствий $\Phi = 0$

Поступило 18 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H. Sur la diffraction des ondes hertziennes. Rendiconti der Circolo Matematico di Palermo, t. 29, 1910; 3 Oeuvres; t. X, p. 94—203. Gauthier—Villars, Paris, 1954.
2. Цой П. И. Дифракция коротких звуковых волн относительно цилиндрического препятствия. Уч. зап. V. ТГПИ, 1954.