

О ВЛИЯНИИ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

А. И. Цейтлин

(Москва)

Выводится уравнение типа Тимошенко колебаний однородной балки, лежащей на упругом винклеровом основании, и дается его приближенное решение для случая бесконечной балки при действии внезапно приложенной силы. Из полученного решения, полагая коэффициент постели равным нулю, можно получить решение для свободной балки. От решения, соответствующего внезапно приложенной силе, дифференцированием по времени можно перейти к решению для мгновенного импульса, а при помощи интеграла Дюамеля — к решению для импульса конечной продолжительности и для переменной силы.

Дифференциальные уравнения движения балки, лежащей на винклеровом основании, с учетом влияния сдвига и инерции вращения, имеют вид

$$EI \frac{\partial^3 y_{\text{н}}}{\partial x^3} + k'FG \frac{\partial y_{\text{с}}}{\partial x} - I\rho \frac{\partial^3 y_{\text{н}}}{\partial x \partial t^2} = 0$$

$$\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k'FG \frac{\partial^2 y_{\text{с}}}{\partial x^2} + ky = q$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y_{\text{н}}}{\partial x} + \frac{\partial y_{\text{с}}}{\partial x}$$
(1)

Здесь y — полный прогиб балки; $y_{\text{н}}$ — прогиб, вызванный изгибом; $y_{\text{с}}$ — прогиб, вызванный сдвигом; ρ — плотность материала балки; I, F — момент инерции и площадь поперечного сечения; E, G — модули упругости и сдвига; k — коэффициент постели; q — нагрузка; k' — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Решая систему (1), получим

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{EI k}{k'FG} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\rho F + \frac{k\rho I}{k'FG} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho EI}{k'G} + \rho I \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + ky = q - \frac{EI}{k'FG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{k'FG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$
(2)

Замечая, что

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 y_{\text{н}}}{\partial x^2}, \quad Q(x, t) = k'FG \frac{\partial y_{\text{с}}}{\partial x}$$
(3)

при действии внезапно приложенной сосредоточенной силы будем иметь следующие граничные условия

$$\frac{\partial y_{\text{н}}}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 y_{\text{н}}}{\partial x^3}(0, t) = \frac{P}{2EI}, \quad \frac{\partial y_{\text{с}}}{\partial x}(0, t) = -\frac{P}{2k'FG}$$
(4)

Последнее граничное условие найдем, рассматривая уравнение равновесия балки с учетом только сдвиговых усилий

$$k'FG \frac{\partial^2 y_{\text{с}}}{\partial x^2} - \rho F \frac{\partial^2 y_{\text{с}}}{\partial t^2} - ky_{\text{с}} = 0$$
(5)

Отсюда

$$\frac{\partial^3 y_{\text{с}}}{\partial x^3}(0, t) = -\frac{Pk}{2(k'FG)^2}$$
(6)

Таким образом

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = -\frac{P}{2k'FG}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0, t) = \frac{P}{2EI} - \frac{Pk}{2(k'FG)^2}$$
(7)

Кроме того, функция y и ее производные должны обращаться в нуль на бесконечности. Начальные условия

$$y(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$$
(8)

Решая уравнение (12) при помощи косинус-преобразования Фурье, получим для трансформанты

$$Y(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} y \cos \xi x dx$$

следующее уравнение

$$\left(\frac{c_1 c_2 c_4}{c_3}\right)^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial t^4} + \left[c_1^2 + c_2^2 c_4^2 + \xi^2 \left(c_2^2 + \frac{c_1^2 c_4^2}{c_3^2} \right) \right] \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + (c_3^2 + c_4^2 \xi^2 + \xi^4) Y = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P c_5^2}{2} \left(1 + \xi^2 \frac{c_4^2}{c_3^2} \right) \quad (9)$$

где

$$c_1^2 = \frac{\rho F}{EI}, \quad c_2^2 = \frac{\rho}{E}, \quad c_3^2 = \frac{k}{EI}, \quad c_4^2 = \frac{k}{k' FG}, \quad c_5^2 = \frac{1}{EI}$$

В характеристическом уравнении для (9) член, содержащий четвертую степень, в нижней части спектра частот при подстановке в него как первого приближения решения, соответствующего классической теории, дает малую величину второго порядка по сравнению с малой поправкой на инерцию вращения и сдвиг. Этот факт известен в литературе. Для простой балки он был отмечен С. П. Тимошенко [1], показавшим, что четвертой производной по времени в уравнении частот соответствует малая величина второго порядка. В рассматриваемом случае характеристическое уравнение для (9) по существу идентично уравнению частот в случае свободных колебаний. Поэтому, пренебрегая членом, содержащим четвертую производную по времени, получим в результате

$$Y(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P c_5^2 (1 + c_4^2 c_3^{-2} \xi^2)}{2(c_3^2 + c_4^2 \xi^2 + \xi^4)} (1 - \cos \omega t) \quad (10)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{c_3^2 + c_4^2 \xi^2 + \xi^4}{c_1^2 + c_2^2 c_4^2 + \xi^2 (c_2^2 + c_1^2 c_4^2 c_3^{-2})}}$$

По формуле обращения

$$y(x, t) = \frac{P c_5^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x (1 + c_4^2 c_3^{-2} \xi^2) (1 - \cos \omega t) d\xi}{c_3^2 + c_4^2 \xi^2 + \xi^4} \quad (11)$$

Преобразуем (11), перейдя к безразмерному времени $\tau = c_3 t / c_1$ и полагая $\xi^2 = c_3 z$

$$y(x, \tau) = \frac{P c_5^2}{2\pi c_3^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(x \sqrt{c_3 z}) (1 + c_4^2 c_3^{-1} z) (1 - \cos \omega_1 \tau) dz}{\sqrt{z} (1 + c_4^2 c_3^{-1} z + z^2)} \quad (12)$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1 + c_4^2 c_3^{-1} z + z^2}{1 + c_2^2 c_4^2 c_1^{-2} + z (c_4^2 c_3^{-1} + c_2^2 c_3 c_1^{-2})}}$$

Если выражение (12) разбить на два интеграла, то первый из них даст статический прогиб балки, лежащей на винклеровом основании, под действием сосредоточенной силы P с учетом влияния сдвигов.

Для балки прямоугольного сечения, принимая $k' = 0.833$, $k = k_0 b$, $G = 0.375 E$, получим

$$\frac{c_4^2}{c_3} = \gamma, \quad \frac{c_4^2 c_2^2}{c_1^2} = 3.04 \gamma^2, \quad \frac{c_2^2 c_3}{c_1^2} = 0.305 \gamma \quad \left(\gamma = 0.935 \sqrt{\frac{k_0 h}{E}} \right) \quad (13)$$

Здесь k_0 — единичный коэффициент постели; h, b — высота и ширина балки, γ — безразмерный параметр, определяющий влияние инерции вращения и сдвига.

Для подавляющего большинства случаев, встречающихся в практике расчета балок на грунтовом основании, γ — величина малая по сравнению с единицей, и ее квадратом можно пренебречь, следовательно

$$y(x, \tau) = \frac{Pc_5^2}{2\pi c_3^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(x\sqrt{c_3z})(1+\gamma z)(1-\cos\omega_2\tau)}{\sqrt{z}(1+\gamma z+z^2)} dz \quad (14)$$

где

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1+\gamma z+z^2}{1+1.305\gamma z}}$$

Таким образом, влияние инерции вращения и сдвига тем больше, чем больше коэффициент постели и высота балки.

Выражение для изгибающего момента можно получить из (12) в соответствии с (3), полагая $c_4 = 0$. Учитывая (13), найдем

$$M(x, \tau) = \frac{P}{2\pi c_3^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{z} \cos(x\sqrt{c_3z})(1-\cos\omega_3\tau)}{1+z^2} dz \quad \left(\omega_3 = \sqrt{\frac{1+z^2}{1+1.305z\gamma}}\right) \quad (15)$$

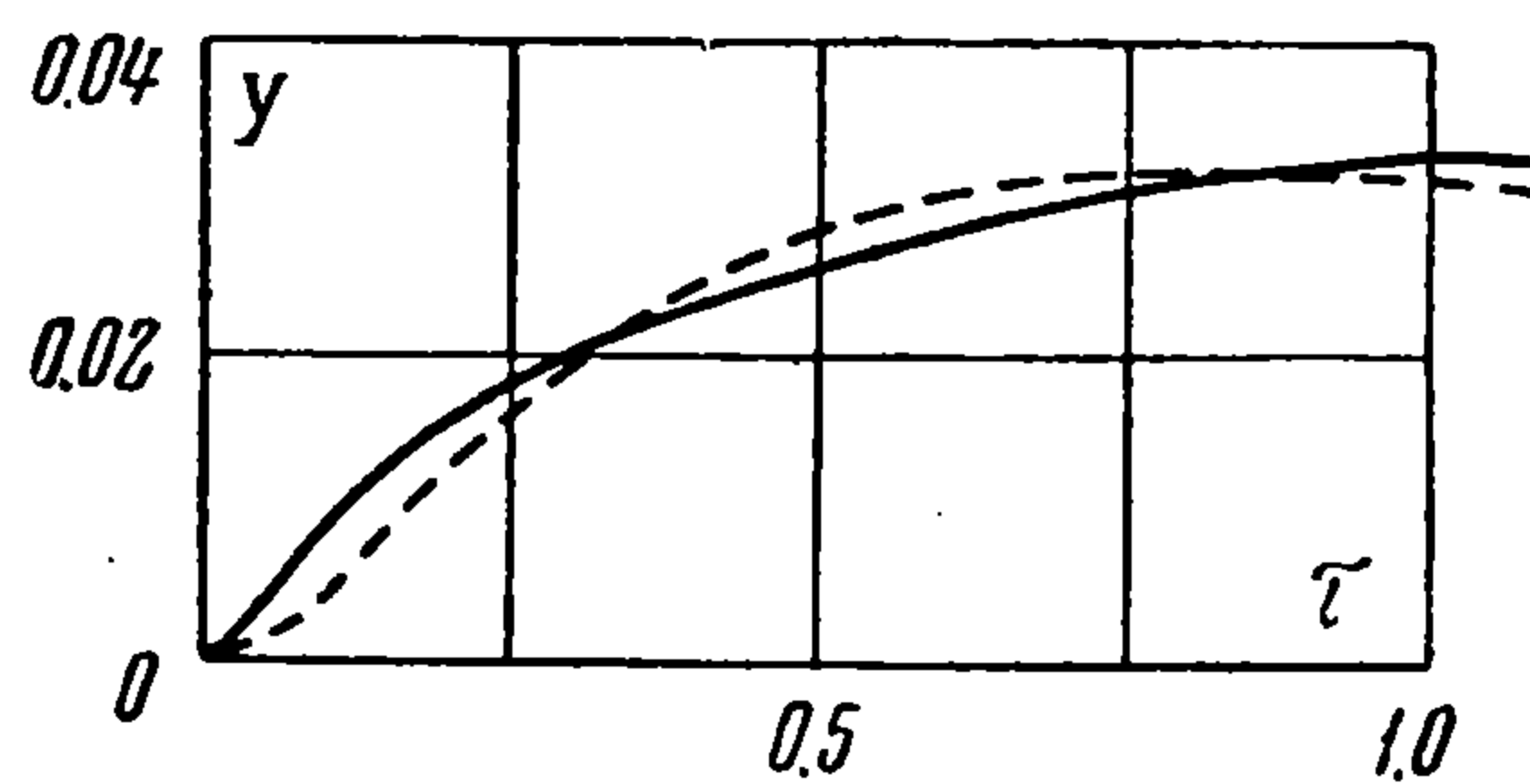
Наибольший интерес представляет учет влияния инерции вращения и сдвига в случае кратковременного действия нагрузки.

Сравним результаты обычной классической теории колебаний балки с волновой теорией при нагрузке в виде прямоугольного сосредоточенного импульса продолжительности t_0 . Рассмотрим прогибы и изгибающие моменты в точке приложения импульса. В этом случае получим

$$y(0, \tau) = \frac{Pc_5^2}{2\pi c_3^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{(1+\gamma z)[\cos\omega_2(\tau-\tau_0) - \cos\omega_2\tau]}{\sqrt{z}(1+\gamma z+z^2)} dz \quad (16)$$

$$M(0, \tau) = \frac{P}{2\pi c_3^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{z}[\cos\omega_3(\tau-\tau_0) - \cos\omega_3\tau]}{1+z^2} dz \quad (17)$$

Выражение (17) даже для высоких значений $\gamma = 0.05-0.07$ дает практически одинаковые результаты с обычной теорией. Интеграл (16) вычислим методом механических квадратур с использованием полиномов Лежандра при $\tau_0 = 0.1$, приняв весовую функцию $p(z) = z^{-1/2}$, ограничивая участок интегрирования отрезком $[0, 8]$ и приводя его затем к отрезку $[0, 1]$. Ортогональную систему функций по весу $z^{-1/2}$ на отрезке $[0, 1]$ образуют многочлены $P_{2n}(\sqrt{z})$. Значения корней и квадратурных коэффициентов для этих многочленов приведены в работе [2]. На фигуре сплошной линией показан прогиб, подсчитанный в соответствии с обычной теорией, а пунктирной линией — прогиб, подсчитанный по формуле (16) для $\gamma = 0.065$.



Фиг. 1

Значительное расхождение кривых наблюдается в начальный период; при приближении к максимуму обе кривые почти совпадают.

Поступила 19 XII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Физматгиз, М., 1959.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, М., 1959.