

## О РАСКЛИНИВАНИИ ХРУПКОГО ТЕЛА КЛИНОМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

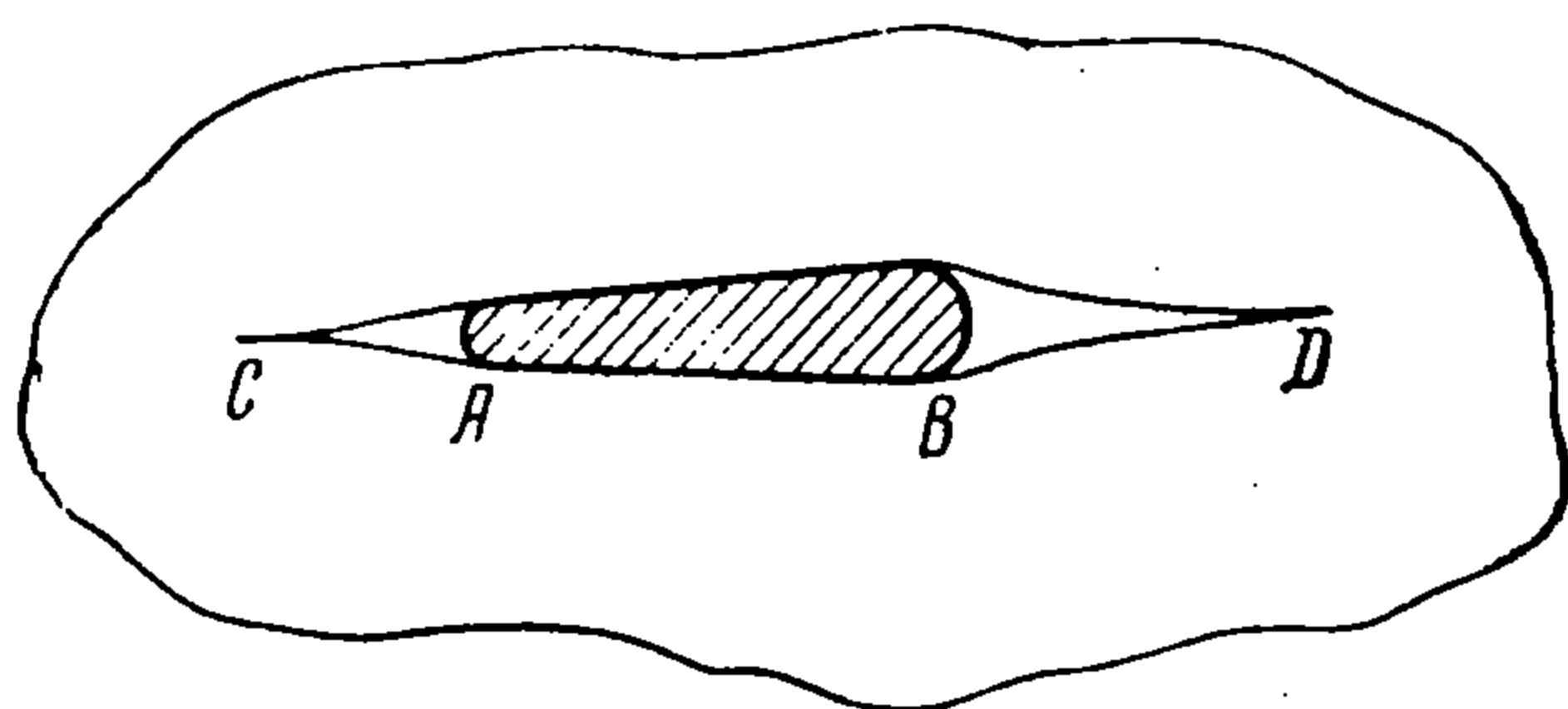
И. А. Маркузон

(Москва)

Рассматривается задача о расклинивании в условиях плоской деформации бесконечного изотропного хрупкого тела неподвижным жестким клином конечной длины, симметричным относительно своей продольной оси. Силами трения между клином и расклиниваемой поверхностью тела пренебрегается. Рассмотрение ведется в рамках общей схемы теории трещин, данной в работе Г. И. Баренблатта [1].

§ 1. Постановка задачи. В соответствии с общими представлениями о расклинивании [1], картина расклинивания рисуется следующим образом. В месте внедрения клина по обе стороны его образуется свободная трещина (фиг. 1), положение концов которой  $C$  и  $D$  должно быть определено в ходе решения задачи. Если концы клина имеют закругленную форму, то положение точек схода  $A$  и  $B$  поверхности трещины с клина также не является заранее известным и должно быть определено в процессе решения.

Ввиду тонкости клина можно линеаризовать задачу, снося граничные условия ее на поверхность разреза  $CD$ , направление которого принимается за ось  $x$ . Ввиду очевидной симметрии задачи относительно оси  $x$  можно ограничиться рассмотрением только нижней полуплоскости (фиг. 2, где  $c, a, b, d$  — абсциссы точек  $C, A, B, D$ , соответственно). Граничные условия задачи для нижней полуплоскости без учета сил сцепления, действующих вблизи концов трещины, приводятся к виду



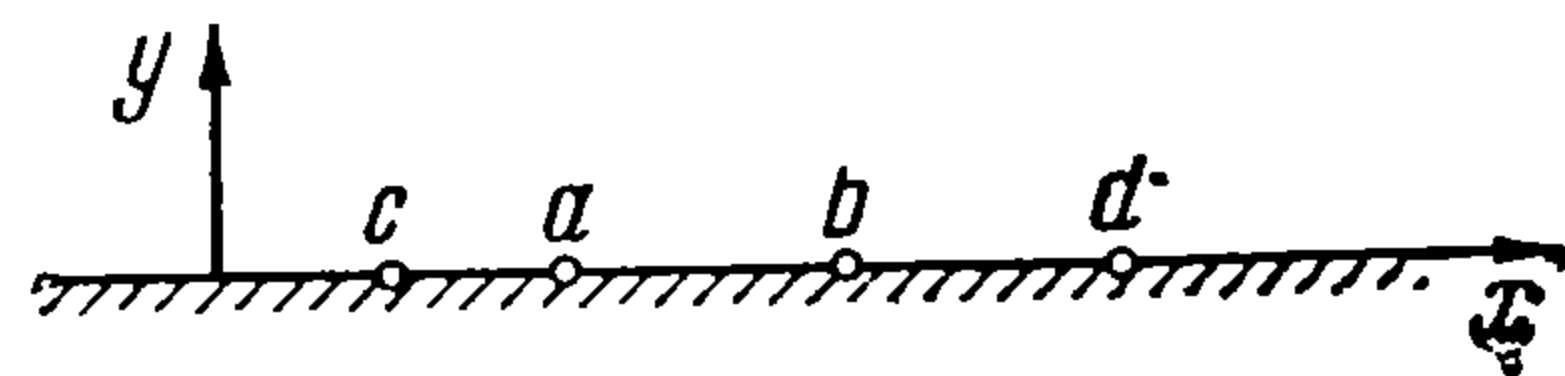
Фиг. 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad X_y = 0 & \quad \begin{cases} -\infty < x \leq c \\ d \leq x < \infty \end{cases} \\ Y_y = g(x), \quad X_y = 0 & \quad \begin{cases} c \leq x \leq a \\ b \leq x \leq d \end{cases} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = f'(x), \quad X_y = 0 & \quad a \leq x \leq b \quad (1.1) \end{aligned}$$

Здесь  $v(x)$  — компонента смещения по оси ординат,  $Y_y, X_y$  — компоненты тензора напряжений,  $f(x)$  — функция, определяющая уравнение поверхности клина в системе координат, связанной с клином, а  $g(x)$  — разрывающие напряжения, возникающие в сплошном теле на месте свободной трещины под действием нагрузок, приложенных к телу с трещиной.

Согласно методу Н. И. Мусхелишвили [2], компоненты тензоров, напряжений и деформаций можно выразить через одну аналитическую функцию  $\Phi(z)$ :

$$\begin{aligned} X_x + Y_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z) \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2 [(\bar{z} - z) \Phi'(z) - \Phi(z) - \bar{\Phi}(z)] \\ 2\mu(u' + iv') &= \kappa \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \Phi'(z) \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 2

Если на границе полуплоскости  $X_y = 0$ , то на этой границе

$$Y_y = 2 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\kappa + 1}{2\mu} \operatorname{Im} \Phi(z) \quad (1.3)$$

так что

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{1}{2} Y_y, \quad \operatorname{Im} \Phi(z) = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Для определения функции  $\Phi(z)$  в нижней полуплоскости получаем следующую смешанную краевую задачу:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi(z) &= 0 & (-\infty < x \leq c, \quad d \leq x < \infty) & \quad (1.4) \\ \operatorname{Re} \Phi(z) &= \frac{1}{2} g(x) & \begin{cases} c \leq x \leq a, \\ b \leq x \leq d, \end{cases} & \quad \operatorname{Im} \Phi(z) = \frac{2\mu}{\kappa + 1} f'(x) & \quad a \leq x \leq b \end{aligned}$$

§ 2. Решение граничной задачи и определение констант, входящих в решение. Полученная смешанная граничная задача (1.4) решается при помощи формулы Келдыша — Седова [3], так что

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i X(z)} \left\{ \frac{1}{2} \int_c^a g(t) X(t) \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2} \int_b^d g(t) X(t) \frac{dt}{t-z} - \right. \quad (2.1)$$

$$\left. - i \frac{2\mu}{\kappa+1} \int_a^b f'(t) X(t) \frac{dt}{t-z} \right\} + \frac{C_0 + C_1 z}{X(z)} \quad (X(z) = \sqrt{(z-c)(z-a)(z-b)(z-d)})$$

Здесь действительные постоянные  $C_0$  и  $C_1$  подлежат в дальнейшем определению наряду с входящими в выражение (2.1) постоянными  $c, a, b, d$ .

Найдем смещение  $v(x)$  для точек трещины, не находящихся в соприкосновении с клином. Подставляя (2.1) в (1.3) и интегрируя, получаем, что на участке  $c \leq x \leq a$

$$v(x) = \frac{\kappa+1}{4\pi\mu} \int_c^x \frac{1}{X_2(x)} \left[ \int_c^a g(t) X_2(t) \frac{dt}{t-x} - \int_b^d g(t) X_4(t) \frac{dt}{t-x} \right] dx - \quad (2.2)$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_c^x \frac{1}{X_2(x)} \left[ \int_a^b f'(t) X_3(t) \frac{dt}{t-x} \right] dx - \frac{(\kappa+1)C_0}{2\mu} \int_c^x \frac{dt}{X_2(t)} - \frac{(\kappa+1)C_1}{2\mu} \int_c^x \frac{tdt}{X_2(t)} + D_2$$

$$\left( \begin{array}{l} X_2(z) = \sqrt{(z-c)(a-z)(b-z)(d-z)}, \quad X_3(z) = \sqrt{(z-c)(z-a)(b-z)(d-z)} \\ X_4(z) = \sqrt{(z-c)(z-a)(z-b)(d-z)} \end{array} \right)$$

и  $D_1$  постоянная интегрирования, равная нулю, так как в конце трещины (при  $x=c$ ) смещение равно нулю. В точке схода  $A$  смещение  $v(x)$  равно заданному значению  $f(a)$ , поэтому

$$f(a) = \frac{\kappa+1}{4\pi\mu} \int_c^a \frac{1}{X_2(x)} \left[ \int_c^a g(t) X_2(t) \frac{dt}{t-x} - \int_b^d g(t) X_4(t) \frac{dt}{t-x} \right] dx -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_c^a \frac{1}{X_2(x)} \left[ \int_a^b f'(t) X_3(t) \frac{dt}{t-x} \right] dx - \frac{\kappa+1}{2\mu} C_0 J_1 - \frac{\kappa+1}{2\mu} C_1 J_2 \quad (2.3)$$

Здесь

$$J_1 = \int_c^a \frac{dt}{X_2(t)} = \frac{4}{m_1 + m_2} F \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right), \quad n_1 = \sqrt{(b-c)(d-c)}, \quad n_2 = \sqrt{(b-a)(d-a)}$$

$$m_1 = \sqrt{(b-c)(d-a)}, \quad m_2 = \sqrt{(b-a)(d-c)}$$

$$J_2 = \int_c^a \frac{tdt}{X_2(t)} = \frac{an_1 - cn_2}{n_1 - n_2} J_1 - \frac{8n_1 n_2}{(n_1^2 - n_2^2)(m_1 + m_2)} H \left[ - \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2; \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right]$$

при этом  $F$  и  $H$  — обычные обозначения полных эллиптических интегралов первого и третьего рода соответственно. Аналогично получаем второе условие

$$f(b) = \frac{\kappa+1}{\pi\mu} \int_b^d \frac{1}{X_4(x)} \left[ \int_c^a g(t) X_2(t) \frac{dt}{t-x} - \int_b^d g(t) X_4(t) \frac{dt}{t-x} \right] dx -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_b^d \frac{1}{X_4(x)} \left[ \int_a^b f'(t) X_3(t) \frac{dt}{t-x} \right] dx - \frac{\kappa+1}{2\mu} C_0 J_3 - \frac{\kappa+1}{2\mu} C_1 J_4 \quad (2.4)$$

Здесь

$$J_3 = \int_b^d \frac{dt}{X_4(t)} = J_1 \quad l_1 = \sqrt{(b-c)(b-a)}, \quad l_2 = \sqrt{(d-c)(d-a)}$$

$$J_4 = \int_b^d \frac{tdt}{X_4(t)} = \frac{dl_1 - bl_2}{l_1 - l_2} J_1 - \frac{8l_1 l_2}{(l_1^2 - l_2^2)(m_1 + m_2)} H \left[ - \left( \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2} \right)^2; \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right]$$

Найдем распределение напряжений в области контакта клина с полуплоскостью. Подставляя (2.1) в первую из формул (1.3), получаем

$$Y_y = \frac{1}{\pi X_3(x)} \left\{ \int_c^a g(t) X_2(t) \frac{dt}{t-x} - \int_b^d g(t) X_4(t) \frac{dt}{t-x} - \frac{2\mu}{\kappa+1} \int_a^b f'(t) X_3(t) \frac{dt}{t-x} - 2\pi C_0 - 2\pi C_1 x \right\} \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.5)$$

В точках схода трещины с поверхности клина (т. е. при  $x = a$  и  $x = b$ ) напряжения должны быть конечными (для случая закругленных концов); отсюда имеем

$$\int_c^a \frac{g(t) X_2(t) dt}{t-a} - \int_b^d \frac{g(t) X_4(t) dt}{t-a} - \frac{2\mu}{\kappa+1} \int_a^b \frac{f'(t) X_3(t) dt}{t-a} - 2\pi(C_0 - C_1 a) = 0 \quad (2.6)$$

$$\int_c^a \frac{g(t) X_2(t) dt}{t-b} - \int_b^d \frac{g(t) X_4(t) dt}{t-b} - \frac{2\mu}{\kappa+1} \int_a^b \frac{f'(t) X_3(t) dt}{t-b} - 2\pi(C_0 - C_1 b) = 0 \quad (2.7)$$

Для определения положения концов трещины потребуем, чтобы вблизи концов трещины разрывающее напряжение, вычисленное без учета сил сцепления, имело порядок  $K / \pi \sqrt{s}$ , где  $K$  — модуль сцепления,  $s$  — координата, отсчитываемая от соответствующего кончика трещины. Для использования этого условия заметим, что напряжения вне трещины (для  $-\infty < x \leq c$ ,  $d \leq x < \infty$ )

$$Y_y = \frac{1}{\pi X(x)} \left\{ - \int_c^a g(t) X_2(t) \frac{dt}{t-x} + \int_b^d g(t) X_4(t) \frac{dt}{t-x} + \frac{2\mu}{\kappa+1} \int_a^b f'(t) X_3(t) \frac{dt}{t-x} + 2\pi C_0 + 2\pi C_1 x \right\} \quad (2.8)$$

Отсюда

$$- \int_c^a g(t) X_2(t) \frac{dt}{t-c} + \int_b^d g(t) X_4(t) \frac{dt}{t-c} + \frac{2\mu}{\kappa+1} \int_a^b f'(t) X_3(t) \frac{dt}{t-c} + 2\pi C_0 + 2\pi C_1 c = K \sqrt{(a-c)(b-c)(d-c)} \quad (2.9)$$

$$- \int_c^a g(t) X_2(t) \frac{dt}{t-d} + \int_b^d g(t) X_4(t) \frac{dt}{t-d} + \frac{2\mu}{\kappa+1} \int_a^b f'(t) X_3(t) \frac{dt}{t-d} + 2\pi C_0 + 2\pi C_1 d = K \sqrt{(d-c)(d-a)(d-b)} \quad (2.10)$$

Таким образом получено шесть соотношений (2.3) — (2.4), (2.6) — (2.7) и (2.9) — (2.10) между шестью искомыми постоянными.

Рассмотрим случай, когда клин является симметричным также и относительно вертикальной оси  $y$ ; предполагая, кроме того, симметричность относительно этой оси и внешней нагрузки, так что  $a = -b$ ,  $c = -d = -l$ , получаем

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i X(z)} \left[ \frac{1}{2} \int_{-l}^{-b} g(t) X(t) \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2} \int_b^l g(t) X(t) \frac{dt}{t-z} - i \frac{2\mu}{\kappa+1} \int_{-b}^b f'(t) X(t) \frac{dt}{t-z} \right] + \frac{C_0 + C_1 z}{X(z)} \quad (X(z) = \sqrt{(z^2 - b^2)(z^2 - l^2)}) \quad (2.11)$$

Используя четность функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , нетрудно показать, что  $C_1 = 0$ . Найденные выше шесть соотношений между остальными постоянными сводятся к трем

$$f(b) = \frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \int_b^l \frac{1}{\sqrt{(l^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \left[ \int_{-l}^{-b} g(t) \sqrt{(l^2 - t^2)(t^2 - b^2)} \frac{dt}{t - x} - \int_b^l g(t) \sqrt{(l^2 - t^2)(t^2 - b^2)} \frac{dt}{t - x} \right] dx - \frac{1}{\pi} \int_b^l \frac{1}{\sqrt{(l^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \left[ \int_{-b}^b f'(t) \sqrt{(l^2 - t^2)(b^2 - t^2)} \frac{dt}{t - x} \right] dx - \frac{\kappa + 1}{2\mu} J_0 C_0 \quad (2.12)$$

$$\int_{-l}^{-b} g(t) \sqrt{l^2 - t^2} \sqrt{\frac{t + b}{t - b}} dt - \int_b^l g(t) \sqrt{l^2 - t^2} \sqrt{\frac{t + b}{t - b}} dt + \frac{2\mu}{\kappa + 1} \int_{-b}^b f'(t) \sqrt{l^2 - t^2} \sqrt{\frac{b + t}{b - t}} dt - 2\pi C_0 = 0 \quad (2.13)$$

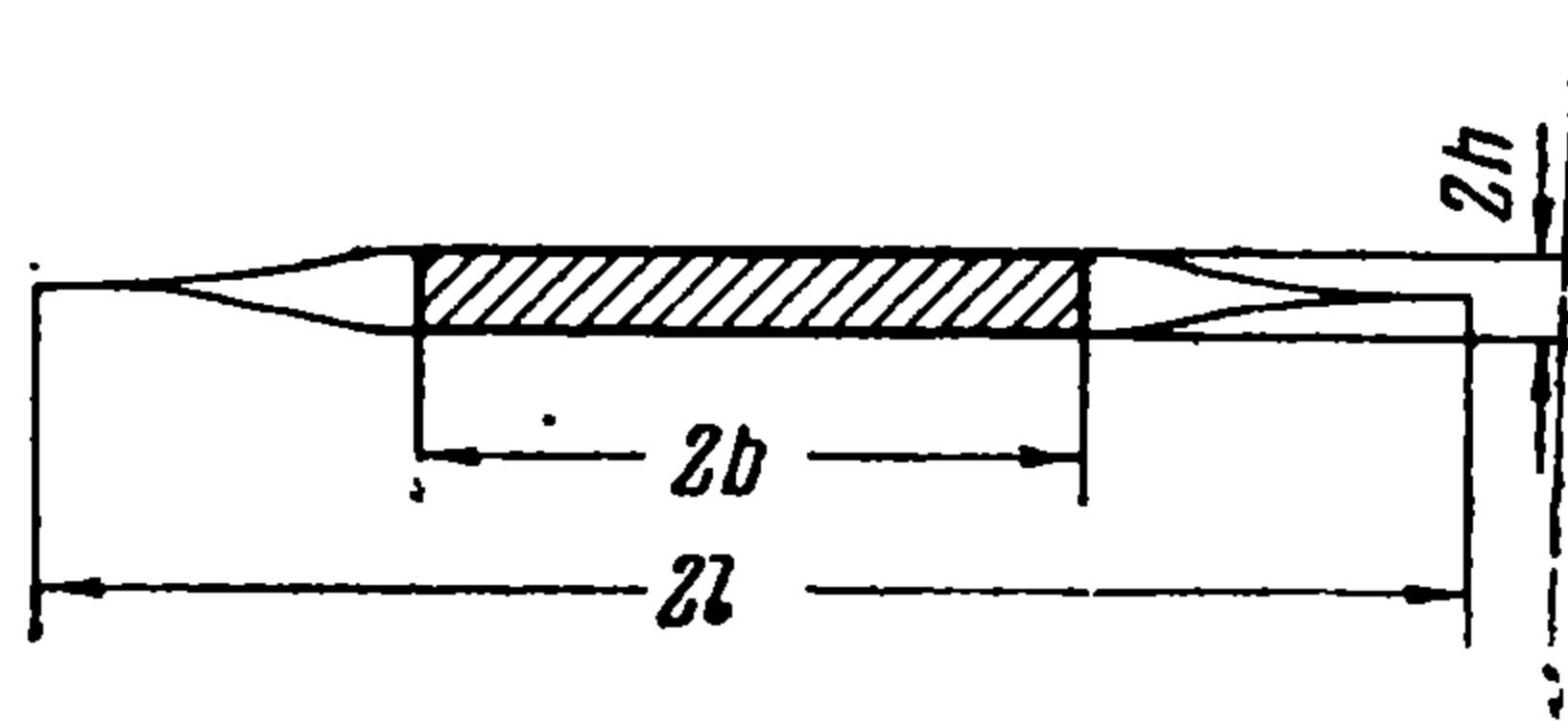
$$\int_{-l}^{-b} g(t) \sqrt{t^2 - b^2} \sqrt{\frac{l + t}{l - t}} dt - \int_b^l g(t) \sqrt{t^2 - b^2} \sqrt{\frac{l + t}{l - t}} dt - \frac{2\mu}{\kappa + 1} \int_{-b}^b f'(t) \sqrt{b^2 - t^2} \sqrt{\frac{l + t}{l - t}} dt + 2\pi C_0 = K \sqrt{2l} \sqrt{l^2 - b^2} \quad (2.14)$$

Здесь

$$J_0 = \int_b^l \frac{dx}{\sqrt{(l^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{l} F(k), \quad k = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{l}$$

Здесь  $F(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$ .

§ 3. Решение задачи о расклинивании полосой конечной длины в постоянном поле. Пусть в плоскую безграничную пластинку с модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и модулем сцепления  $K$ , находящуюся в однородном поле напряжений  $Q$ , вдавливаются жесткий прямоугольный клин толщиной  $2h$  и длиной  $2b$  (фиг. 3); в результате в пластинке образуется трещина от  $-l$  до  $+l$ . Координаты точек схода трещины ( $x_1 = -b$ ,  $x_2 = b$ ) являются заранее известными, однако напряжения в точках схода бесконечны.



Фиг. 3

Используя формулу (2.11) и учитывая, что  $f'(x) = 0$ ,  $g(x) = -Q$ , имеем

$$\Phi(z) = -\frac{Q}{2} + \frac{Qz^2}{2\sqrt{(z^2 - l^2)(z^2 - b^2)}} + \frac{C_0'}{2\sqrt{(z^2 - l^2)(z^2 - b^2)}} \quad (C_0' = 2C_0). \quad (3.1)$$

Распределение смещений на участке  $b \leq x \leq l$  имеет вид

$$v(x) = \frac{\kappa + 1}{4\mu} \left[ \int_b^x \frac{C_0' dx}{\sqrt{(l^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} + \int_b^x \frac{Qx^2 dx}{\sqrt{(x^2 - b^2)(l^2 - x^2)}} \right] - h$$

(здесь учтено, что  $v(b) = -h$ .) Используя теперь, что  $v(l) = 0$ , получаем

$$C_0' \int_b^l \frac{dx}{\sqrt{(l^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} + Q \int_b^l \frac{x^2 dx}{\sqrt{(l^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} - \frac{Eh}{2(1 - \nu^2)} = 0$$

Замечая, что

$$\int_b^l \frac{dx}{\sqrt{(l^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{F(k)}{l}, \quad \int_b^c \frac{x^2 dx}{\sqrt{(l^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} = lE(k)$$

где  $E(k)$  — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $k$ , введенным в конце § 2, имеем

$$C_0' = -Ql^2 \frac{E(k)}{F(k)} + \frac{Ehl}{2(1-\nu^2)F(k)} \quad (3.2)$$

Для нахождения длины трещины воспользуемся соотношением, определяющим длину равновесной трещины в бесконечном теле [1]

$$\int_0^l \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2l}} \quad (3.3)$$

где  $\rho(x)$  — распределение давления на поверхности трещины. Для точек под клином

$$\rho(x) = \frac{Qx^2 + C_0'}{\sqrt{(l^2-x^2)(b^2-x^2)}} + Q \quad (-b \leq x \leq b) \quad (3.4)$$

Учитывая, кроме того, что в точках «свободной» трещины ( $b \leq x \leq l$ ) приложено давление  $Q$  и используя (3.3), имеем

$$Q \int_0^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{b^2-x^2}(l^2-x^2)} + Q \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{l^2-x^2}} + C_0' \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}(l^2-x^2)} = \frac{K}{\sqrt{2l}}$$

Отсюда, вычисляя входящие в это выражение интегралы, получаем соотношение, определяющее длину равновесной трещины

$$(C_0' + Ql^2) \pi = K \sqrt{2l} \sqrt{l^2 - b^2} \quad (3.5)$$

Разумеется, это же соотношение (3.5) получается из условия, что разрывающие напряжения  $Y_y$ , вычисленные без учета сил сцепления, вне трещины вблизи конца  $x = l$  должны иметь порядок  $K / \pi \sqrt{x-l}$ .

Подставляя в (3.5) вместо  $C_0'$  его значение (3.2), представим условие, определяющее длину равновесной трещины, в следующем виде:

$$\frac{Ql}{\sqrt{l^2-b^2}} \left[ \frac{F(k) - E(k)}{F(k)} \right] + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)F(k)\sqrt{l^2-b^2}} = \frac{K\sqrt{2}}{\pi\sqrt{l}} \quad (3.6)$$

Это основное соотношение кратко можно записать так:

$$\lambda_1 A(k) + B(k) = \mu_1$$

где

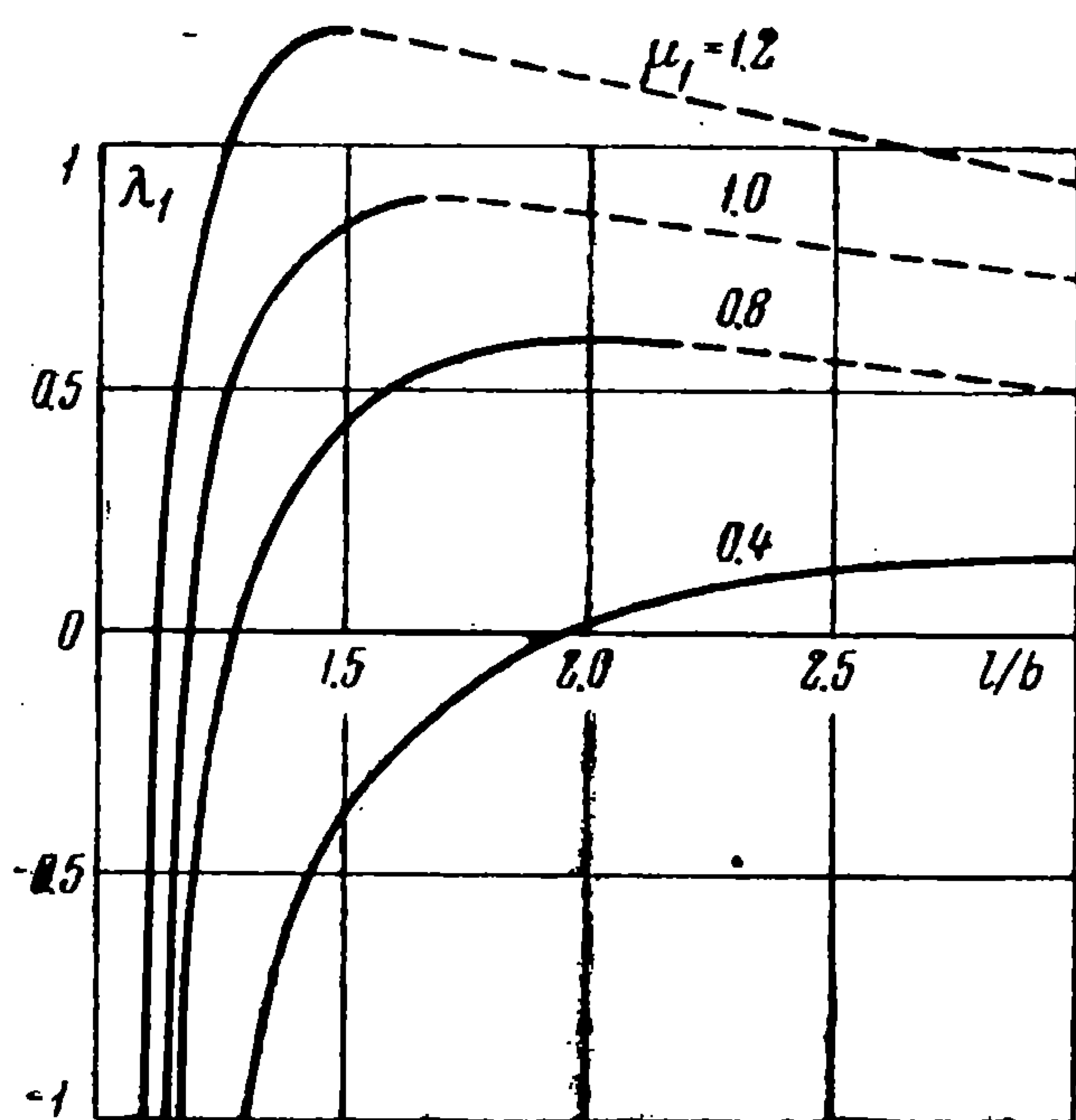
$$A(k) = \frac{F(k) - E(k)}{kF(k)\sqrt{1-k^2}}, \quad B(k) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{kF(k)}$$

$$\lambda_1 = \frac{2Qb(1-\nu^2)}{Eh}, \quad \mu_1 = \frac{2\sqrt{2}K(1-\nu^2)\sqrt{b}}{\pi Eh}$$

На фиг. 4 показаны графики, позволяющие определять длину равновесной трещины в зависимости от  $Q, b, h$ .

При разрывающих внешних усилиях ( $\lambda_1 > 0$ ) график функции  $(\mu_1 - B)/A$  имеет две ветви: устойчивую и неустойчивую по отношению к  $Q$ . Ветвь, соответствующая неустойчивым трещинам, показана пунктиром. При увеличении интенсивности растягивающего напряжения длина трещины сперва увеличивается, причем трещина остается устойчивой. Однако, если величина

$Q$  превосходит некоторое критическое значение  $Q^*$ , зависящее от свойств материала и параметров клина, то решения не существует. При сжимающих внешних усилиях при расклинивании пластинки образуются лишь устойчивые трещины. Полагая в формулах (3.1), (3.5) и (3.6)  $Q = 0$ , получаем решение задачи о расклинивании бесконечной пластинки полосой конечного размера при отсутствии внешних нагрузок.



Фиг. 4

В частности, соотношение для определения длины трещины принимает вид

$$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{kF(k)} = \frac{2\sqrt{2K}(1-\nu^2)\sqrt{b}}{E\pi h} \quad (B(k) = \mu_1) \quad (3.7)$$

Ввиду того что функция  $B(k)$  — монотонно убывающая, каждому значению  $h$  при неизменной длине клина  $2b$  соответствует свой однозначно определенный размер трещины. С увеличением  $h$  размер трещины увеличивается.

Соотношение (3.7) можно представить в следующем виде:

$$\frac{l-b}{L_0} = \frac{\pi^2}{2} B^2(k) \left(\frac{b}{L_0}\right) \quad (3.8)$$

Здесь  $L_0$  длина свободной трещины, образующейся впереди полубесконечного клина при отсутствии внешних нагрузок [1]. Таким образом, отношение длины свободной равновесной трещины, образующейся у концов клина конечной длины, к длине трещины, образующейся впереди полубесконечного клина той же толщины, не зависит от  $h, E, k, \nu$ . На фиг. 5 дан график зависимости  $(l-b)/L_0$  от  $b/L_0$ .

Из соотношений (3.4) и (3.6) можно попутно получить решение задачи для полубесконечного клина, раскалывающего пластинку, находящуюся в однородном поле. Действительно, переходя надлежащим образом к пределу в выражении (3.4), получим закон распределения давления на щеках упомянутого клина. С этой целью, положив  $x = x_1 - l$  и устремив  $l$  к бесконечности вместе с  $b$  так, чтобы разность  $l - b = L$  сохранялась постоянной, получим

$$p_1(x_1) = \left( \frac{Eh}{2\pi(1-\nu^2)} + \frac{QL}{2} - Qx_1 \right) \frac{1}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_1-L}} + Q \quad (3.9)$$

Величина  $L$ , входящая в выражение (3.9), определяется также при помощи аналогичного предельного перехода в (3.6). Имеем

$$Q\sqrt{L} + \frac{Eh}{(1-\nu^2)\pi\sqrt{L}} = \frac{2K}{\pi} \quad (3.10)$$

Полученное выражение позволяет явно выразить длину трещины  $L$  в зависимости от приложенной нагрузки. Введем параметр  $\alpha$  по следующей формуле

$$Q = \frac{(1-\alpha^2)m^2}{4n} \quad (-1 < \alpha < \infty),$$

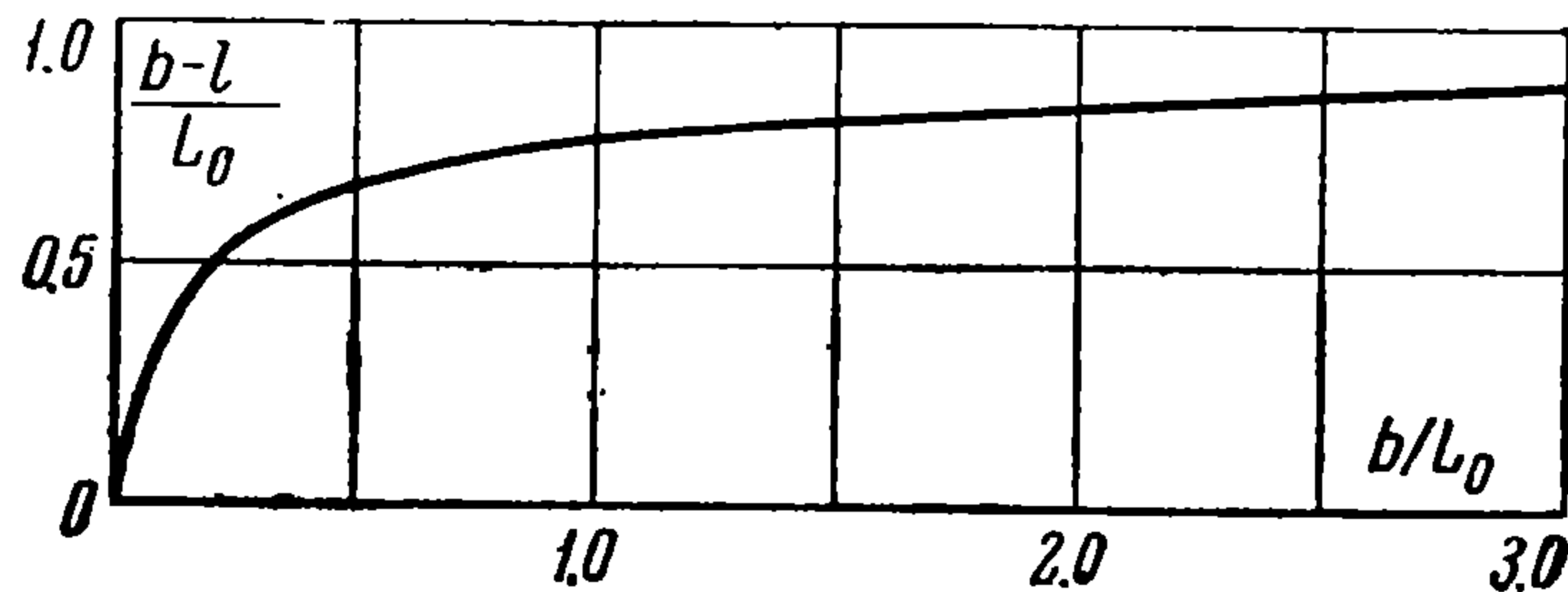
$$\frac{2K}{\pi} = m, \quad \frac{Eh}{\pi(1-\nu^2)} = n$$

Тогда

$$\sqrt{L} = \frac{2n}{m} \frac{1}{\alpha+1} \quad (3.11)$$

При  $Q = 0$  ( $\alpha = 1$ ) получается, что

$$L_0 = \frac{n^2}{m^2} = \frac{E^2 h^2}{4(1-\nu^2)^2 K^2}$$



Фиг. 5

Этот результат полностью совпадает с результатом, данным в работе [1]. В случае разрывающих внешних напряжений получаются, как и для случая клина конечной длины, две различные ветви. На устойчивом участке  $0 < \alpha < 1$  с увеличением  $Q$  длина трещины  $L$  также возрастает. На неустойчивом участке ( $-1 < \alpha < 0$ ) большему значению  $Q$  соответствует меньший размер равновесной трещины.

Однако, если  $Q > Q^* = m^2/4n$ , то решение теряет смысл. Максимальная длина трещины не может превосходить  $4L_0$ . Если же внешняя нагрузка сжимающая, то с увеличением значения  $Q$  размер трещины уменьшается, будучи всегда меньше  $L_0$ .

Поступила 2 I 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3, 4, 5.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
3. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.