

ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

Г. Я. Попов
 (Новосибирск)

В работах Б. Г. Коренева [1] изложен метод построения решения задачи об изгибе неограниченной плиты, лежащей на линейно деформируемом основании общего типа. В работах [2,3], а затем и в работе [4], основываясь на теории интегральных уравнений типа Винера-Хопфа [5], было получено решение задачи об изгибе полубесконечной плиты для некоторых частных типов упругих оснований.

Ниже предлагается общий метод построения решения задачи об изгибе полубесконечной плиты на линейно деформируемом основании общего типа с учетом пригрузки.

Метод детализируется применительно к задаче об изгибе полубесконечной балки на упругой полуплоскости. Известно, что М. И. Горбунов-Посадов [6] предложил приближенный метод решения этой задачи, уступающий (по признанию самого автора) в точности его методу для расчета балок конечной длины. Приводятся результаты вычислений, показывающие, насколько отклоняется решение М. И. Горбунова-Посадова от полученного в данной работе.

§ 1. Пусть тонкая полубесконечная плита ($0 \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$) с цилиндрической жесткостью D покоится на линейно-деформируемом основании, для которого справедливо

$$w_0(r) = \int_0^{\infty} f_0(t) J_0(rt) dt \quad (1.1)$$

Через $w_0(r)$ обозначена осадка поверхностной точки основания, расположенной на расстоянии $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ от начала координат, где приложена единичная сила. Функция $f_0(t)$ может быть произвольной. Предполагается известным только поведение ее на бесконечности.

$$f_0(t) = c_1 t^{-\mu} [1 + o(1)], \quad \mu > -\frac{1}{2}, \quad c_1 = \text{const} \quad (1.2)$$

Почти для всех предложенных моделей линейно-деформируемых оснований справедливы уравнения (1.1) и (1.2). Заметим, что для однородного полупространства

$$f_0(t) = (1 - \nu_0^2) (\pi E_0)^{-1} = 1/2 \theta$$

Допустим далее, что к полубесконечной плите приложена нагрузка $q^+(x, y)$, а к свободной поверхности основания — пригрузка $q^-(x, y)$, причем

$$q^+(x, y) \equiv 0, \quad (x < 0), \quad q^-(x, y) \equiv 0, \quad (x \geq 0) \quad (1.3)$$

В этом случае задача определения контактного напряжения $p(x, y)$ и прогибов плиты $w(x, y)$ эквивалентна решению следующей системы:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} w_0(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) [p(\xi, \eta) + q^-(\xi, \eta)] d\xi d\eta = w(x, y) \\
 (-\infty < x, y < \infty) \\
 D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = q^+(x, y) - p(x, y) \quad (0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty)$$

с последующим удовлетворением условий свободного края для плиты

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=0} = 0$$

где ν — коэффициент Пуассона материала плиты.

Если от функций $w(x, y)$, $p(x, y)$, $q^+(x, y)$ перейти к их преобразованиям [7] Фурье $w_\lambda(x)$, $p_\lambda(x)$, $q_\lambda^+(x)$, то записанную выше систему можно привести к виду

$$\theta\pi \int_{-\infty}^{\infty} k(|x - \xi|) [p_\lambda(\xi) + q_\lambda^-(\xi)] d\xi = w_\lambda(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$D \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 w_\lambda(x) = q_\lambda^+(x) - p_\lambda(x) \quad (0 \leq x < \infty) \quad (1.4)$$

При этом условия свободного края для плиты примут вид

$$w_\lambda^{(2)}(+0) - \lambda^2 \nu w_\lambda(+0) = 0, \quad w_\lambda^{(3)}(+0) - (2 - \nu) \lambda^2 w_\lambda^{(1)}(+0) = 0 \quad (1.5)$$

Через $k(\alpha)$ обозначено

$$k(\alpha) = \frac{1}{\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} w_0(\sqrt{\alpha^2 + \tau^2}) e^{-i\lambda\tau} d\tau \quad (1.6)$$

Для этой функции потребуется преобразование Фурье $K(u)$

$$K(u) = \frac{1}{\pi\theta} \iint_{-\infty}^{\infty} w_0(\sqrt{\alpha^2 + \tau^2}) \exp(i\lambda\tau + i\alpha u) d\alpha d\tau$$

Используя известные приемы ([7], стр. 80), последнее выражение можно преобразовать к виду

$$K(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^{\infty} r w_0(r) J_0(r \sqrt{u^2 + \lambda^2}) dr$$

Учитывая (1.1) и формулу обращения для преобразований Ханкеля [7], найдем

$$K(u) = \frac{2f(\sqrt{u^2 + \lambda^2})}{\theta \sqrt{u^2 + \lambda^2}} \quad (1.7)$$

Считая $\lambda > 0$, представим общее равное нулю при $x \rightarrow \infty$ решение дифференциального уравнения системы (1.4) в виде

$$w_\lambda(x) = (a_0 + a_1 \lambda x) e^{-\lambda x} + \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{\infty} g(|x - s|) [q_\lambda^+(s) - p_\lambda(s)] ds \quad (x \geq 0) \quad (1.8)$$

При этом можно показать, что

$$g(t) = \frac{1}{4\lambda^3} (1 + \lambda t) e^{-\lambda t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm iut} du}{(u^2 + \lambda^2)^2} \quad (1.9)$$

Через a_0 и a_1 обозначены произвольные вещественные постоянные. Приравняв (1.7) к первому из уравнений системы (1.4), придем к интегральному уравнению

$$\int_0^{\infty} l(|x - s|) p_\lambda(s) ds = f(x) \quad (x \geq 0) \quad (1.10)$$

с ядром

$$l(t) = k(t) + c^3 g(t), \quad c^3 = (\pi\theta D)^{-1} \quad (1.11)$$

и правой частью, которую путем использования теоремы о свертках [7] с учетом (1.3), можно представить в следующем виде

$$f(x) = (a_0 + a_1 \lambda x) e^{-\lambda x} + \frac{c^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q^+(-\zeta)}{(\zeta^2 + \lambda^2)^2} - \frac{2Q^-(-\zeta) f \sqrt{\zeta^2 + \lambda^2}}{c^3 \theta \sqrt{\zeta^2 + \lambda^2}} \right] e^{i\zeta x} d\zeta$$

Здесь через $Q^\pm(u)$ обозначены преобразования Фурье функций $q_\lambda^\pm(x)$.

Для решения полученного интегрального уравнения типа Винера — Хопфа 1-го рода воспользуемся приемом, который нами уже применялся [8, 9]. Сначала решим уравнение

$$\int_0^{\infty} l(|x-s|) \chi_\zeta(s) ds = e^{i\zeta x} \quad (x \geq 0, \operatorname{Im} \zeta \geq 0) \quad (1.12)$$

В рассматриваемом случае, если будет найдено $\chi_\zeta(x)$, то решение уравнения (1.10) можно получить по формуле

$$p_\lambda(x) = a_0 [\chi_\zeta(x)]_{\zeta=i\lambda} - i\lambda a_1 \left[\frac{\partial \chi_\zeta(x)}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=i\lambda} + \frac{c^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q^+(-\zeta)}{(\zeta^2 + \lambda^2)^2} - \frac{2Q^-(-\zeta) f \sqrt{\zeta^2 + \lambda^2}}{c^3 \theta \sqrt{\zeta^2 + \lambda^2}} \right] \chi_\zeta(x) d\zeta \quad (1.13)$$

Решение уравнения (1.12) строится по формуле

$$\chi_\zeta(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\psi_\lambda(\zeta) \psi_\lambda(u)}{u + \zeta} e^{-iux} du \quad (1.14)$$

установленной и обоснованной для интегральных уравнений аналогичного типа, но 2-го рода [6]. При этом функция $\psi_\lambda(w)$ должна быть регулярна и отлична от нуля в верхней полуплоскости (без точки ∞) и удовлетворять уравнению

$$\left[L(u) = \int_{-\infty}^{\infty} l(x) e^{ixu} dx \right]^{-1} = \psi_\lambda(u) \psi_\lambda(-u) \quad (-\infty < u < \infty) \quad (1.15)$$

Кроме того, должно быть ограничено ее поведение на бесконечности

$$\psi_\lambda(w) = O(w^\mu) \quad (\mu < 1, w \rightarrow \infty) \quad (1.16)$$

Под контуром γ следует понимать прямую $(-\infty, \infty)$, параллельную вещественной оси и удаленную от нее на достаточно малое расстояние, точнее, на такое, чтобы все особые точки функции $\psi_\lambda(w)$ лежали ниже этой прямой. Непосредственно подстановкой (1.14) в уравнение (1.10) с учетом (1.15) (1.16) можно показать, что оно удовлетворяется [8, 9].

Таким образом, решение уравнения (1.12) свелось к отысканию функции $\psi_\lambda(w)$ или, используя терминологию работы [6], к проблеме факторизации функции $L(u)$, которая в разбираемом случае согласно (1.11), (1.9) и (1.7) имеет вид

$$L(u) = \frac{2f \sqrt{u^2 + \lambda^2}}{\theta \sqrt{u^2 + \lambda^2}} + \frac{c^3}{(u^2 + \lambda^2)^2} \quad (1.17)$$

В упомянутой работе показано, что любую непрерывную в промежутке $(-\infty, \infty)$ функцию $H(u)$, отличную от нуля и равную единице

при $u \rightarrow \pm \infty$, можно факторизовать. Если к тому же еще функция $H(u)$ четная, то факторизация ее $H^{-1}(u) = \kappa(u)\kappa(-u)$ единственна и обеспечивается функцией

$$\kappa(w) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H(u)}{u-w} du \right] \quad (1.18)$$

Имея в виду сказанное, функцию (1.17), подлежащую факторизации, преобразуем предварительно к следующему виду:

$$L(u) = \frac{2c_1}{\theta} (u^2 + \lambda^2)^{-\frac{1+\mu}{2}} \left\{ \frac{f \sqrt{u^2 + \lambda^2}}{c_1 (u^2 + \lambda^2)^{-\mu/2}} + \frac{(2c_1)^{-1} \theta c^3}{(u^2 + \lambda^2)^{(3-\mu)/2}} \right\}$$

Отсюда, учитывая (1.2), видно, что выражение в фигурных скобках удовлетворяет условиям, необходимым для факторизации ее по формуле (1.18). Множитель же перед скобками факторизуется элементарно. В соответствии со сказанным будем иметь

$$\psi_\lambda(w) = \left(\frac{2c_1}{\theta} \right)^{-1/2} (\lambda - iw)^{\frac{1+\mu}{2}} X_\lambda(w) \quad (1.19)$$

$$X_\lambda(w) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{f \sqrt{u^2 + \lambda^2}}{c_1 (u^2 + \lambda^2)^{-\mu/2}} + \frac{(2c_1)^{-1} \theta c^3}{(u^2 + \lambda^2)^{(3-\mu)/2}} \right] \frac{du}{u-w} \right\} \quad (1.20)$$

Как показано в работе [2], в случае упругого однородного полупространства ($f_0(t) = \theta/2 = c_1$, $\mu = 0$) последние формулы приобретают вид

$$\psi_\lambda(w) = \sqrt{\lambda - iw} X_\lambda(w), \quad X_\lambda(w) = \prod_{j=1}^3 \chi_j(w; \lambda), \quad \operatorname{Re} \sqrt{\lambda - iw} > 0 \quad (1.21)$$

$$\chi_j(w; \lambda) = \chi_j(i\lambda \cos \tau, \lambda) = \sqrt{\frac{\cos \tau + 1}{\cos \tau + \cos \sigma_j}} \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\tau - \sigma_j}^{\tau + \sigma_j} \frac{u}{\sin u} du \right], \quad \sin \sigma_j = a_j / \lambda \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.22)$$

$$a_1 = c\varepsilon, \quad a_2 = c\bar{\varepsilon}, \quad a_3 = -c, \quad \varepsilon = e^{i\pi/3} \quad (1.23)$$

§ 2. Подставим найденное выражение (1.19) для $\psi_\lambda(w)$ в формулу (1.14), найдем $\chi_\zeta(x)$, после чего выражение для $\chi_\zeta(x)$ подставим в (1.13).

В результате дальнейших очевидных преобразований получим

$$p_\lambda(x) = \frac{c^3}{2\pi} \int_{\gamma} \left[\frac{iP_\lambda(w)}{(w+i\lambda)^2} - I(-w) \right] \psi_\lambda(w) e^{-iw x} dw \quad (2.1)$$

где

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q^+(-\zeta)}{(\zeta^2 + \lambda^2)^2} - \frac{2Q^-(-\zeta) f \sqrt{\zeta^2 + \lambda^2}}{c^3 \theta \sqrt{\zeta^2 + \lambda^2}} \right] \frac{\psi_\lambda(u)}{u-z} du \quad (2.2)$$

$$P_\lambda(w) = A_0 + (w + i\lambda) A_1 \quad (2.3)$$

$$c_3 A_0 = a_1 i \lambda \psi_\lambda(i\lambda), \quad c^3 A_1 = a_0 \psi_\lambda(i\lambda) - a_1 i \lambda \psi_\lambda'(i\lambda) \quad (2.4)$$

Здесь и всюду в дальнейшем штрих означает производную.

В результате подстановки полученного (2.1) выражения для $p_\lambda(x)$ в

формулу (1.8) и выполнения простых преобразований получим

$$Dw_\lambda(x) = D(a_0 + a_1\lambda x)e^{-\lambda x} + \frac{c^3}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_\lambda(w) \psi_\lambda(w) e^{-iw x}}{(w + i\lambda)^2 (w^2 + \lambda^2)^2} dw + \\ + \frac{c^3}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{Q^+(-w) + I(-w) \psi_\lambda(w)}{(w^2 + \lambda^2)^2} e^{-iw x} dw \quad (x \geq 0) \quad (2.5)$$

Можно получить и другое выражение для $w_\lambda(x)$, если подставить (2.1) не в (1.8), а в первое уравнение системы (1.4). Получаемое таким образом выражение оказывается в некоторых случаях полезным.

Принимая во внимание (2.3), (2.4) и используя приемы теории вычетов из (2.5), можно найти выражение для $w_\lambda(x)$ и ее производных $w_\lambda^{(n)}$ при $x \rightarrow +0$; вычисления дают

$$Dw_\lambda^{(n)}(+0) = a_0 \left[c^3 \frac{(2n-3) \psi_\lambda^2(i\lambda) + 2i\lambda \psi_\lambda'(i\lambda) \psi_\lambda(i\lambda)}{16\lambda^{4-n}} + (-\lambda)^n D \right] + \\ + a_1 \left[-n(-\lambda)^n D + c^3 \frac{(n-2) \psi_\lambda^2(i\lambda) - (2n-3) i\lambda \psi_\lambda(i\lambda) \psi_\lambda'(i\lambda) + 2\lambda^2 [\psi_\lambda'(i\lambda)]^2}{16\lambda^{4-n}} \right] + \\ + \frac{c^3}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{Q^+(-w) + I(-w) \psi_\lambda(w)}{(w^2 + \lambda^2)^2} (-iw)^n dw, \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

Подставим выражения для $w_\lambda(x)$ и ее производных при $x = +0$ в преобразованные краевые условия (1.5). В результате получим два уравнения, из которых найдутся произвольные постоянные a_0 и a_1 , и тем самым будет исчерпан вопрос об определении функций $w_\lambda(x)$ и $p_\lambda(x)$.

Однако для получения окончательных формул непосредственное обращение преобразования Фурье функции $w(x, y)$ и $p(x, y)$ по формуле [7]

$$w(x, y), p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [w_\lambda(x), p_\lambda(x)] e^{-i\lambda y} d\lambda$$

выполнить нельзя, так как $w_\lambda(x)$ и $p_\lambda(x)$ были получены в предположении, что $\lambda > 0$. Это условие будет соблюдаться только в том случае, когда функции $w(x, y)$ и $p(x, y)$ одновременно будут четны, либо нечетны по y . Следовательно, в общем случае необходимо поступить так. Разбить заданные нагрузки $q^+(x, y)$ и $q^-(x, y)$ на симметричные и кососимметричные относительно оси x составляющие, т. е.

$$q^+(x, y) = q_1^+(x, y) + q_2^+(x, y), \quad q^-(x, y) = q_1^-(x, y) + q_2^-(x, y)$$

найти $w(x, y)$ и $p(x, y)$ для четных составляющих q_1^+ , q_1^- и для нечетных q_2^+ , q_2^- и затем результаты сложить.

Оказывается, что построенные здесь функции $p_\lambda(x)$ и $w_\lambda(x)$ представляют и самостоятельный интерес. Дело в том, что их предельные выражения при $\lambda \rightarrow 0$ будут решением соответствующей плоской задачи, т. е. задачи об изгибе балочной плиты на линейно-деформируемом основании. Это следует из того, что при загрузке плиты нагрузкой $q^+(x, y) = q^+(x) \cos \lambda y$, а свободной поверхности основания пригрузкой $q^-(x, y) = q^-(x) \cos \lambda y$ контактное напряжение и прогибы плиты будут

$$p(x, y) = p_\lambda(x) \cos \lambda y, \quad w(x, y) = w_\lambda(x) \cos \lambda y$$

Таким образом, обозначив через $M(x)$, $Q(x)$, $p(x)$ соответственно изгибающий момент, поперечную силу и контактное напряжение для балочной плиты, нетрудно убедиться в справедливости следующего

$$M(x) = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} Dw_{\lambda^2}(x), \quad Q(x) = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} Dw_{\lambda^3}(x), \quad p(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} p_{\lambda}(x) \quad (2.7)$$

Однако выполнение этих предельных переходов является здесь далеко не простой операцией, так как согласно (2.6) для этого требуется знать асимптотическое представление функций $\psi_{\lambda}(i\lambda)$ и $\psi'_{\lambda}(i\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$, что связано с весьма детальным анализом свойств функции (1.19).

Ввиду этого удалось выполнить предельный переход только для случая упругого однородного полупространства. При этом оказалось удобным исходить не из формулы (2.5), а из формулы для $w_{\lambda}(x)$, которую можно получить, как уже указывалось, подставляя (2.1) в первое уравнение (1.4). Приведем здесь эту формулу.

При этом ограничимся случаем, когда пригрузки нет ($q^-(x, y) \equiv 0$) и на полубесконечную плиту в точке с абсциссой $x = b$ действует единичная сила. Тогда вместо (2.2) будем иметь

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ibu}}{(u^2 + \lambda^2)^2} \frac{\psi_{\lambda}(u)}{u - z} du = I_b(z; \lambda) \quad (2.8)$$

Как показано в работе [2], подстановка (2.1) с учетом (2.8) в первое уравнение системы (1.4) в результате выполнения указанных там преобразований даст нужную формулу

$$\begin{aligned} Dw_{\lambda^{(n)}}(x) = & -\frac{ic^4}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{P_{\lambda}(-ics)(cs + \lambda)(-cs)^n e^{-cxs} ds}{\sqrt{cs - \lambda} [c^6 + (c^2s^2 - \lambda^2)^3] X_{\lambda}(ics)} + \\ & + \sum_{j=1}^2 \frac{P_{\lambda}(-\alpha_j) a_j^3 (i\alpha_j)^n}{\psi_{\lambda}(\alpha_j) (i\lambda - \alpha_j)^2} r_j e^{i\alpha_j x} - \frac{c^4}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{I_b(ics; \lambda) (c^2s^2 - \lambda^2)^{3/2} (-cs)^n e^{-cxs} ds}{[c^6 + (c^2s^2 - \lambda^2)^3] \psi_{\lambda}(ics)} + \\ & + i \sum_{j=1}^2 \frac{I_b(\alpha_j; \lambda)}{\psi_{\lambda}(\alpha_j)} a_j^3 (i\alpha_j)^n r_j e^{i\alpha_j x} + \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(icu)^n e^{i(x-b)cu} du}{\sqrt{c^2u^2 + \lambda^2} [c^3 + (c^2u^2 + \lambda^2)^{3/2}]} \quad (n = 2, 3) \end{aligned} \quad (2.9)$$

причем¹

$$r_j = \frac{(-1)^j a_j}{ic \sqrt{3} (a_j + c) \alpha_j}, \quad (j = 1, 2), \quad \alpha_j = \sqrt{a_j^2 - \lambda^2}, \quad (2.10)$$

$$\operatorname{Im} \sqrt{a_j^2 - \lambda^2} > 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Формулы (2.1) и (2.8) путем деформирования пути интегрирования (эта операция более подробно описана в работах [2, 9]) в петлю, охватывающую луч $(-i\lambda, -i\infty)$, могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned} p_{\lambda}(x) = & \frac{ic^4}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{P_{\lambda}(-ics)(c^2s^2 - \lambda^2)^{3/2} (cs + \lambda)^2}{\psi_{\lambda}(ics) [c^6 + (c^2s^2 - \lambda^2)^3]} e^{-cxs} ds + \\ & + c^3 \sum_{j=1}^2 \frac{P_{\lambda}(-\alpha_j) a_j^4 r_j}{\psi_{\lambda}(\alpha_j) (i\lambda - \alpha_j)} e^{i\alpha_j x} + \frac{c^4}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{I_b(ics; \lambda) (c^2s^2 - \lambda^2)^{3/2} e^{-cxs}}{\psi_{\lambda}(ics) [c^6 + (c^2s^2 - \lambda^2)^3]} ds + \end{aligned} \quad (2.11)$$

¹ Третий и четвертый члены правой части формулы (2.9) для $w_{\lambda^{(n)}}(x)$ в работе [2] содержат опечатки. Здесь они исправлены.

$$+ ic^3 \sum \frac{I_b(\alpha_j; \lambda) a_j^4}{\Psi_\lambda(\alpha_j)} r_j e^{i\alpha_j x} + \frac{c^4}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x-b)u} du}{c^3 + (c^2 u^2 + \lambda^2)^{3/2}}$$

$$I_b(z; \lambda) = -\frac{ic}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{(c^2 s^2 - \lambda^2)^{3/2} e^{-bcs} ds}{\Psi_\lambda(ics) [c^3 + (c^2 s^2 - \lambda^2)^3] (z + ics)} + \sum_{j=1}^2 \frac{r_j}{\Psi_\lambda(\alpha_j)} \frac{e^{ib\alpha_j}}{(\alpha_j + z)} \quad (2.12)$$

§ 3. Для расчета полубесконечной балки (балочной плиты), лежащей на упругой полуплоскости (полупространства) и нагруженной сосредоточенной силой (нагрузкой равномерно сосредоточенной по бесконечной линии $x = b$) на расстоянии $x = b$ от конца, совершим предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ в формулах (2.9—2.12) согласно (2.7). Начнем с функции $\chi_i(w; \lambda)$, определяемой формулой (1.22). Заметив, что

$$w = i\lambda \cos \tau = i\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right), \quad \tau = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{w}{i\lambda}$$

$$\cos \tau = \frac{w}{i\lambda}, \quad \sigma_j = \arcsin \frac{a_j}{\lambda}, \quad \cos \sigma_j = -\frac{i\alpha_j}{\lambda}, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(\arcsin z) < \frac{\pi}{2}$$

можно записать

$$\chi_j(ics; \lambda) = \sqrt{\frac{cs + \lambda}{cs - i\alpha_j}} \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_{\tau - \sigma_j}^{\tau + \sigma_j} \frac{u}{\sin u} du\right] \quad (3.1)$$

При этом

$$\tau \pm \sigma_j = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{cs}{\lambda} \pm \arcsin \frac{a_j}{\lambda} \quad (3.2)$$

Используя далее формулы ([¹⁰], стр. 113 и 157)

$$\arcsin \frac{x \pm iy}{\lambda} = \arcsin \frac{2x}{r+s} \pm i \operatorname{Arch} \frac{r+s}{2\lambda}$$

$$\operatorname{Arch} \frac{r+s}{2\lambda} = \ln(r+s) - \ln \lambda - O(\lambda^2), \quad \lambda \rightarrow 0$$

$$r = \sqrt{(x+\lambda)^2 + y^2}, \quad s = \sqrt{(x-\lambda)^2 + y^2}, \quad y > 0$$

нетрудно обнаружить, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \arcsin \frac{x \pm iy}{\lambda} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm i (\ln 2\sqrt{x^2 + y^2} + i\infty) \quad (3.3)$$

В дальнейшем условимся считать отрицательное (положительное) вещественное число пределом комплексного числа с отрицательной (положительной) мнимой частью. Как показывают соответствующие выкладки, изменение этого условия на обратное не отражается на окончательных формулах. Принимая это во внимание, а также формулы (3.2), (3.3) и (1.23), можно обнаружить, что

$$\begin{aligned} \tau + \sigma_1 &\rightarrow \pi/6 - i \ln(s/c), & \tau - \sigma_1 &\rightarrow -\pi/6 - i\infty. \\ \tau + \sigma_2 &\rightarrow \pi/6 - i\infty, & \tau - \sigma_2 &\rightarrow -\pi/6 - i \ln(s/c) \\ \tau + \sigma_3 &\rightarrow -\pi/2 + i\infty, & \tau - \sigma_3 &\rightarrow \pi/2 - i \ln(s/c) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь следует, например, под $\tau + \sigma_1 \rightarrow \pi/6 - i \ln s/c$ понимать следующее:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\tau + \sigma_1) = \frac{\pi}{6} - i \ln \frac{s}{c} - \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(\ln z) < \frac{\pi}{2}$$

Теперь нетрудно найти

$$\chi_1(ics) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \chi_1(ics; \lambda) = \sqrt{\frac{cs}{cs - ia_1}} \exp[I(s)] \quad (3.5)$$

где

$$I(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/6 - i\infty}^{\pi/6 - i \ln s/c \pi/6} \frac{u}{\sin u} du = \frac{i}{2\pi} \left(\int_{i\pi/6 - \infty}^0 + \int_0^{i\pi/6 - \ln s/c} \right) \frac{u}{\operatorname{sh} u} du \quad (3.6)$$

Далее на основании теоремы Коши для аналитических функций

$$\frac{i}{2\pi} \int_{i\pi/6 - \infty}^0 \frac{u}{\operatorname{sh} u} du = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{-\infty} \frac{u}{\operatorname{sh} u} du = \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{u}{\operatorname{sh} u} du = \frac{i\pi}{8} \quad (3.7)$$

При нахождении последнего интеграла была использована известная формула ([¹¹], стр. 169). В справочнике ([¹²], стр. 171) она содержит опечатку. Учитывая (3.5—3.7), а также (1.23), вместо (3.5) будем иметь

$$\chi_1(ics) = \sqrt{\frac{s}{s - i\varepsilon}} \exp \left[\frac{i\pi}{8} - \frac{i}{2\pi} \int_0^{\ln s + i\pi/6} \frac{u}{\operatorname{sh} u} du \right]$$

Аналогично, приняв во внимание (2.10), найдем

$$\chi_2(ics) = \sqrt{\frac{s}{s + i\varepsilon}} \exp \left[-\frac{i\pi}{8} + \frac{i}{2\pi} \int_0^{\ln s - i\pi/6} \frac{u}{\operatorname{sh} u} du \right]$$

$$\chi_3(ics) = \sqrt{\frac{s}{s - i}} \exp \left[-\frac{i\pi}{8} + \frac{i}{2\pi} \int_0^{\ln s + i\pi/2} \frac{u}{\operatorname{sh} u} du \right]$$

Следовательно, согласно (1.21)

$$X_0(ics) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} X_\lambda(ics) = X(s) = \frac{s^{3/2}}{\sqrt{s^2 + \sqrt{3}s + 1}} \exp \left[-\frac{i\pi}{8} + \sum_{j=1}^3 h_j(s) \right] \quad (3.8)$$

где

$$h_{1,2}(s) = \mp \frac{i}{2\pi} \int_0^{\ln s \pm i\pi/6} \frac{u}{\operatorname{sh} u} du, \quad h_3(s) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{\ln s + i\pi/2} \frac{u}{\operatorname{sh} u} du \quad (3.9)$$

В соответствии с (1.21) и (2.10) справедливо следующее:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi_\lambda(ics) = \sqrt{cs} X_0(ics) = \sqrt{cs} X(s)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi_\lambda(\alpha_1) = \sqrt{c\varepsilon} e^{-i\pi/12} X_0(c\varepsilon), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi_\lambda(\alpha_2) = \sqrt{c\varepsilon} e^{i\pi/12} X_0(-c\varepsilon) \quad (3.10)$$

Заметив, что

$$X_0(c\varepsilon) = X_0[ic \exp(-i\pi/6)], \quad X_0(-c\varepsilon) = X_0\left[ic \exp\left(\frac{i\pi}{6}\right)\right]$$

подставим в формулу (3.8) вместо s один раз $e^{-i\pi/6}$, а другой раз $e^{i\pi/6}$; получим

$$X_0(c\varepsilon) = \frac{e^{-i\pi/8}}{\sqrt{6}}, \quad X_0(-c\varepsilon) = \frac{e^{i\pi/8}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \exp \left[-\frac{i}{2\pi} \left(\int_0^{i\pi/3} - \int_0^{i2\pi/3} \right) \frac{u}{\operatorname{sh} u} du \right]$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, равно $-1/4 \ln 3$. Чтобы убедиться в этом, следует фигурирующие там интегралы объединить

в один с интервалом интегрирования $(i\pi/3, i2\pi/3)$, сделать в нем замену $u = i(\pi/2 - v)$, в результате чего упомянутый интеграл можно будет привести к табличному с интервалом интегрирования $(0, \pi/6)$.

Учитывая предыдущее, нетрудно обнаружить, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi_\lambda(\alpha_1) = \sqrt{c/6} \exp\left(-\frac{5\pi i}{24}\right), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi_\lambda(\alpha_2) = \sqrt{c/6} \exp\left(\frac{5\pi i}{24}\right) \quad (3.11)$$

Приняв во внимание (2.10) и (1.23), можно найти

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} r_1 = \frac{1}{3} c^{-2} e^{i\pi/3}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} r_2 = -\frac{1}{3} c^{-2} e^{-i\pi/3} \quad (3.12)$$

Считая $X(s)$ вещественной функцией (ниже это будет доказано), из формулы (2.12) следует

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_b(ics; \lambda) = J_b(ics) = c^{-1/2} & \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau^3 e^{-bc\tau} d\tau}{\sqrt{\tau}(1+\tau^6) X(\tau)(\tau+s)} + \right. \\ & \left. + \frac{2\sqrt{6} \exp(-\sqrt{3}bc/2)}{3(1+\sqrt{3}s+s^2)} \left[\sin\left(\frac{17}{24}\pi + \frac{bc}{2}\right) + s \sin\left(\frac{13}{24}\pi + \frac{bc}{2}\right) \right] \right\} \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_b(\alpha_1; \lambda) = J_b(c\varepsilon) = c^{-1/2} & \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\tau + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \tau^3 e^{-bc\tau} d\tau}{(\tau^2 + \sqrt{3}\tau + 1) \sqrt{\tau}(\tau^6 + 1) X(\tau)} + \right. \\ & + \frac{\sqrt{6}}{3} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}bc\right) \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{24} + \frac{bc}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{5\pi}{24} + \frac{bc}{2}\right) + \right. \\ & \left. \left. + i \left(\frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\pi}{24} + \frac{bc}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{24} + \frac{bc}{2}\right) \right) \right] \right\} = \bar{J}_b(-c\bar{\varepsilon}) \quad (3.14) \end{aligned}$$

Чтобы получить более удобные при вычислениях формулы для расчетных усилий $M(x)$, $Q(x)$, $p(x)$, введем безразмерную абсциссу и новые произвольные постоянные, вместо определяемых формулами (2.4)

$$\xi = cx, \quad \beta = bc, \quad B_0 = ic^{3/2}A_0, \quad B_1 = c^{5/2}A_1 \quad (3.15)$$

Кроме того, введем приведенные расчетные усилия $M^*(\xi)$, $Q^*(\xi)$, $p^*(\xi)$, связанные с истинными согласно формулам

$$M^*(\xi) = cM(\xi/c), \quad Q^*(\xi) = Q(\xi/c), \quad p^*(\xi) = \frac{1}{c}p(\xi/c) \quad (3.16)$$

Выполнив теперь предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ в формулах (2.9) и (2.11) с учетом (3.10—3.14) и приняв во внимание (2.7), (3.15) и (3.16), получим

$$\begin{aligned} M^*(\xi) = B_0 & \left[\frac{1}{\pi} J^{(0)}(\xi) - \varphi(\xi) \right] + B_1 \left[\frac{1}{\pi} J^{(1)}(\xi) + \varphi'(\xi) \right] - \frac{1}{\pi^2} J_2(\xi) - \\ & - \frac{1}{2\pi} [\varphi'(\xi) J_*^{(0)}(\beta) - \varphi''(\xi) J_*^{(1)}(\beta) - \varphi''(\beta) J_*^{(2)}(\xi) + \varphi'''(\beta) J_*^{(3)}(\xi)] - \\ & - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\xi - \beta}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\xi + \beta}{2}\right) \right] \times \\ & \times \exp\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(\xi + \beta)\right] + M_\infty(\xi - \beta) \quad (3.17) \end{aligned}$$

$$Q^*(\xi) = \frac{dM}{d\xi}, \quad p^*(\xi) = \frac{d^2M}{d\xi^2} \quad (3.18)$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{2\sqrt{6}}{3} e^{-\sqrt{3}x/2} \cos\left(\frac{\pi}{24} + \frac{x}{2}\right) \quad (3.19)$$

$$J^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} \vartheta_n(s, x) ds \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

$$J_*^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} \frac{\vartheta_n(s, x) ds}{(1 + \sqrt{3}s + s^2)} \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \quad (3.20)$$

$$J_n x = \int_0^{\infty} I_\beta(s) \vartheta_n(s, x) ds \quad (n = 2, 3, 4), \quad I_\beta(x) = \int_0^{\infty} \frac{\vartheta_0(s, \beta) ds}{(s+x)}$$

$$\vartheta_n(s, x) = \frac{s^{3+n} e^{-sx}}{\sqrt{s(1+s^6)} X(s)}$$

Через

$$M_\infty(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u \cos ux}{1+u^3} du \quad (3.21)$$

обозначен приведенный изгибающий момент в бесконечно длинной балке, нагруженной единичной силой при $x = 0$.

Эта функция стабулирована [6], в работе [13] дана, кроме того, аппроксимация ее элементарными функциями. В этой же работе изложен прием преобразования медленно сходящихся несобственных интегралов типа (3.21) в очень быстро сходящиеся. К сожалению, автор не был знаком с работой И. Г. Альперина [14], в которой изложен тот же прием применительно к тем же интегралам. На это обратил внимание Б. Г. Корнев, за что автор ему весьма признателен.

Фигурирующие в (3.17) и (3.18) произвольные постоянные B_0 и B_1 найдутся из условий свободного края балки, т. е. $M^*(0) = 0$, $Q^*(0) = 0$. Подставив в левые части этих равенств $M^*(0)$ и $Q^*(0)$, получаемые из формул (3.17), (3.18), придем к системе

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\pi} J^{(0)}(0) - \frac{2\sqrt{6}}{3} \cos \frac{\pi}{24} \right] B_0 + \left[\frac{1}{\pi} J^{(1)}(0) - \frac{2\sqrt{6}}{3} \cos \frac{\pi}{8} \right] B_1 + f_1(\beta) &= 0 \\ - \left[\frac{1}{\pi} J^{(1)}(0) - \frac{2\sqrt{6}}{3} \cos \frac{\pi}{8} \right] B_0 - \left[\frac{1}{\pi} J^{(2)}(0) - \frac{2\sqrt{6}}{3} \sin \frac{5\pi}{24} \right] B_1 + f_2(\beta) &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Функции $f_{1,2}(\beta)$ получим из приведенных выше формул для $M^*(\xi)$ и $Q^*(\xi)$ соответственно, отбрасывая там члены, содержащие B_0 и B_1 , и полагая $\xi = 0$. Заметим, что определитель системы (3.22) с точностью до четвертого знака равен единице.

§ 4. Дадим представление функции $X(s)$, удобное для ее вычисления и вместе с тем упростим интегралы (3.20). Для этого сделаем замену

$$u = \ln t \quad \left(-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Im}(\ln z) < \frac{1}{2}\pi\right)$$

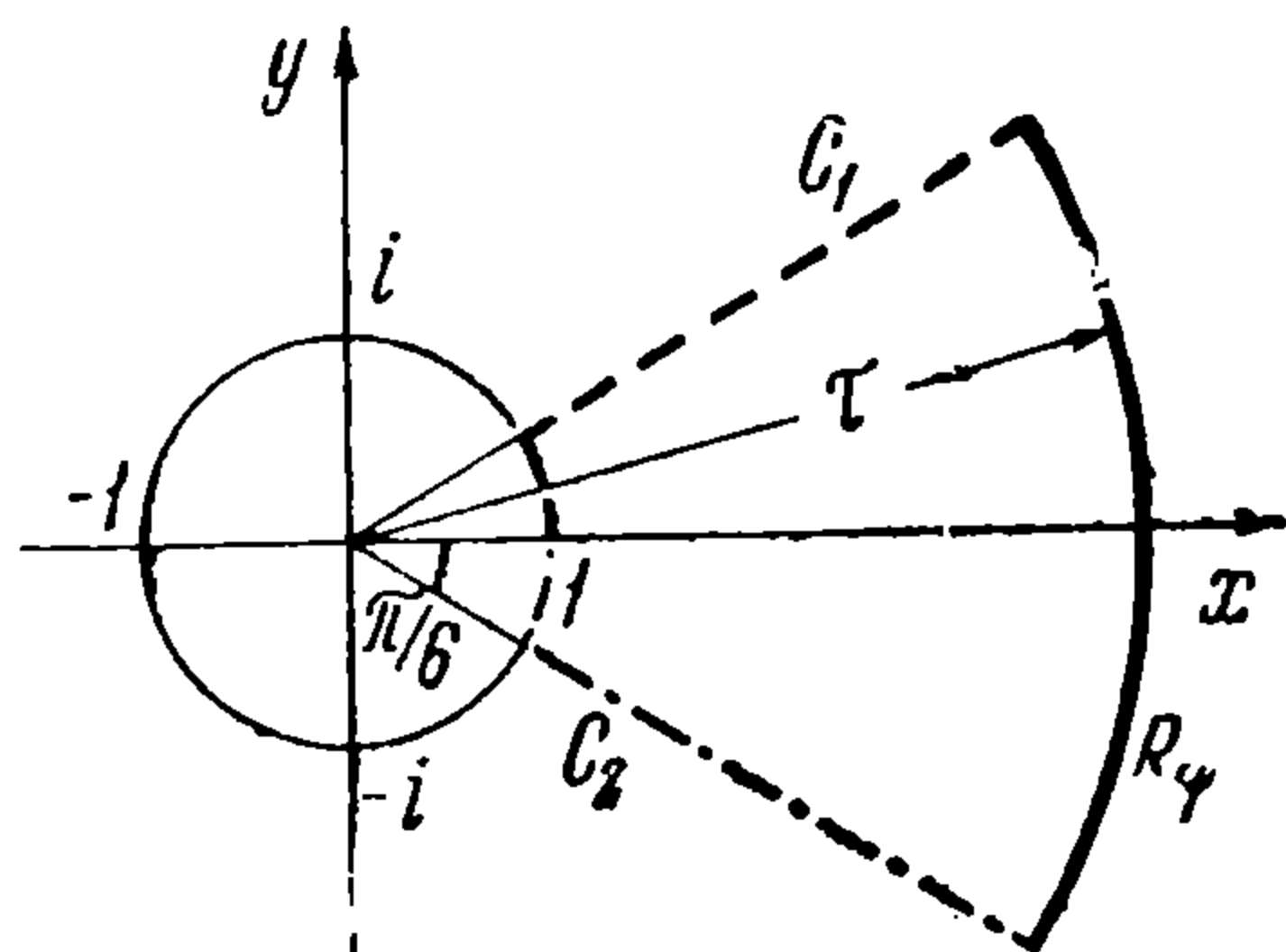
в формулах (3.9)

$$h_{1,2}(\tau) = \mp \frac{i}{\pi} \int_1^{\tau \exp(\pm i\pi/6)} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt, \quad h_3(\tau) = \frac{i}{\pi} \int_1^{\tau \exp(i\pi/2)} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt \quad (4.1)$$

Далее на основании теоремы Коши можно записать (фиг. 1)

$$\frac{i}{\pi} \left(\int_{C_2} + \int_{R_\varphi} + \int_{C_1} \right) \frac{\ln t}{1-t^2} dt = 0 \quad (4.2)$$

Отсюда, учитывая (4.1), нетрудно усмотреть



Фиг. 1

$$\begin{aligned} h_1(\tau) + h_2(\tau) &= \frac{i}{\pi} \int_{\tau \exp(-i\pi/6)}^{\tau \exp(i\pi/6)} \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \\ &= -\frac{\tau}{\pi} \left[i \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\varphi e^{i\varphi} d\varphi}{1-\tau^2 e^{2i\varphi}} + \ln \tau \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{e^{i\varphi} d\varphi}{1-\tau^2 e^{2i\varphi}} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Согласно (4.1) имеем (фиг. 2)

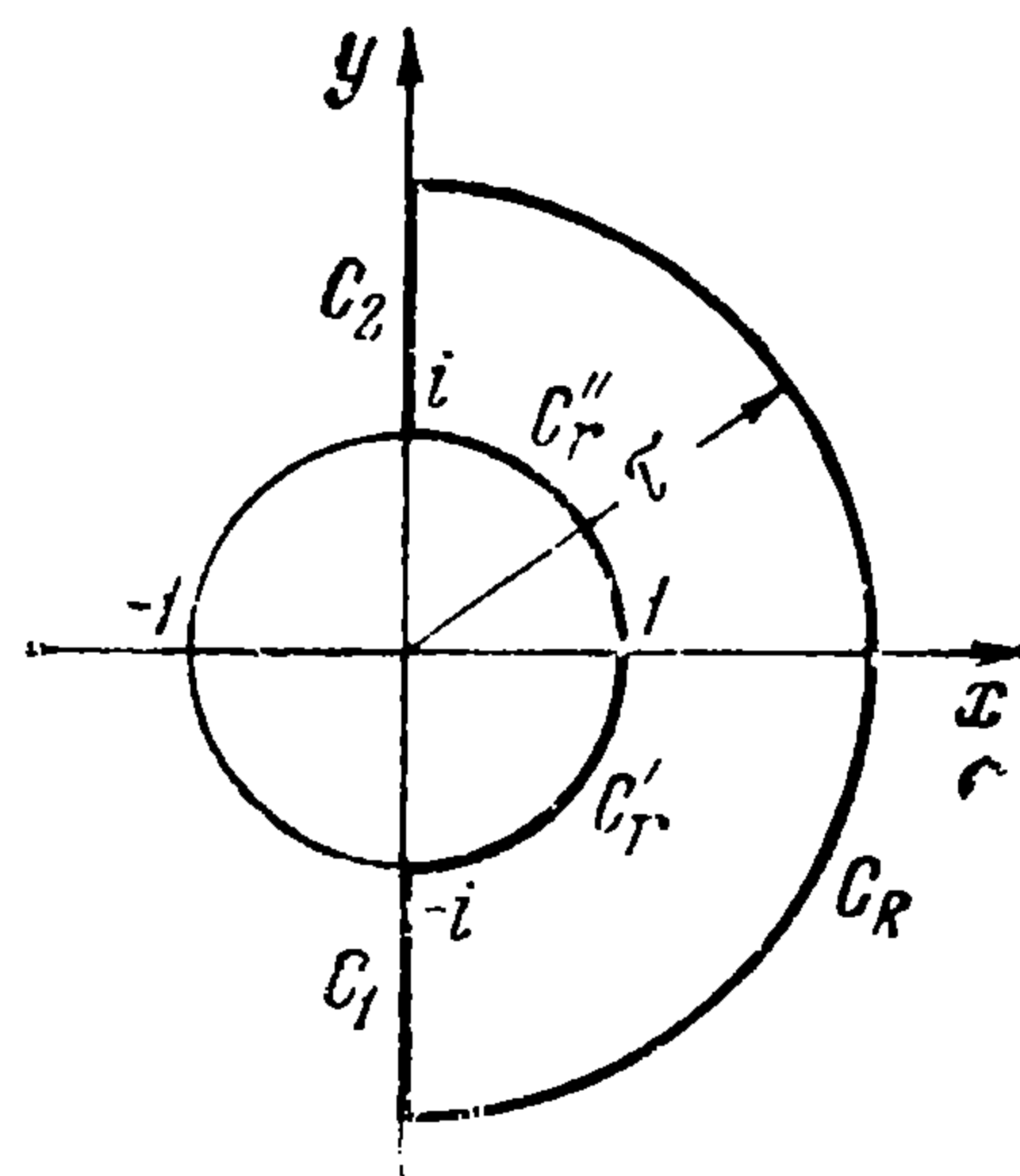
$$h_3(\tau) = -\frac{i}{\pi} \left(\int_{C_r''} + \int_{C_2} \right) \frac{\ln t}{1-t^2} dt \quad (4.4)$$

После соответствующих замен переменных интегрирования получим

$$h_3(\tau) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{i\pi/2} \frac{u}{\operatorname{sh} u} du + \frac{1}{\pi} \int_1^\tau \frac{\ln s}{1+s^2} ds + \frac{i}{2} \int_1^\tau \frac{ds}{1+s^2} \quad (4.5)$$

С другой стороны, имея в виду (4.4), а также следующее (фиг. 2)

$$\frac{i}{\pi} \left[\int_{C_r'} + \int_{C_1} + \int_{C_R} + \int_{C_2} + \int_{C_r''} \right] \frac{\ln t}{1-t^2} dt = 0$$



Фиг. 2

можно обнаружить, что

$$h_3(\tau) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{-i\pi/2} \frac{u}{\operatorname{sh} u} du - \frac{1}{\pi} \int_1^\tau \frac{\ln s}{1+s^2} ds + \frac{i}{2} \int_1^\tau \frac{ds}{1+s^2} + \frac{\tau}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ln(\tau e^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{1-\tau^2 e^{2i\varphi}} d\varphi \quad (4.6)$$

В результате сложения (4.5) с (4.6) и выполнения очевидных выкладок получим

$$h_3(\tau) = \frac{i}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau - \frac{i\pi}{8} + \frac{\tau}{2\pi} \left[i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varphi e^{i\varphi} d\varphi}{1-\tau^2 e^{2i\varphi}} + \ln \tau \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{i\varphi} d\varphi}{1-\tau^2 e^{2i\varphi}} \right] \quad (4.7)$$

Наконец, введя обозначения

$$S_\varphi(\tau) = \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{ue^{iu} du}{1-\tau^2 e^{2iu}}, \quad S_\varphi^*(\tau) = \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{e^{iu} du}{1-\tau^2 e^{2iu}} \quad (4.8)$$

$$H_0(\tau) = \frac{i\tau}{\pi} (1/2 S_{\pi/2} - S_{\pi/6}) + \frac{\tau \ln \tau}{\pi} (1/2 S_{\pi/2}^* - S_{\pi/6}^*) \quad (4.9)$$

приняв во внимание (3.8), (4.3), (4.7) а также

$$(\tau - i)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau - \frac{1}{4} i\pi\right) = (1 + \tau^2)^{-1/4}$$

найдем

$$X(\tau) = \tau^{1/2} (\tau^2 + \sqrt{3}\tau + 1)^{-1/2} (\tau^2 + 1)^{-1/4} \exp[+H_0(\tau)] \quad (4.10)$$

Функцию $H(\tau)$ можно разложить в ряд

$$H_0(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k - 2 \sin [(2k+1)\pi/6]}{2k+1} \ln \tau - \frac{\pi}{3} \frac{\cos [(2k+1)\pi/6]}{2k+1} - \frac{(-1)^k - 2 \sin [(2k+1)\pi/6]}{(2k+1)^2} \right] \tau^{2k+1} \quad (4.11)$$

сходящийся при $\tau \leq 1$. Этот ряд получен путем разложения подынтегрального выражения в интегралах (4.8) в ряд по восходящим степеням τ . Если его разложить по нисходящим степеням τ , то для $H_0(\tau)$ получаем ряд

$$H_0(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^k - 2 \sin [(2k+1)\pi/6]}{2k+1} \ln \tau - \frac{\pi}{3} \frac{\cos [(2k+1)\pi/6]}{2k+1} - \frac{(-1)^k - 2 \sin [(2k+1)\pi/6]}{(2k+1)^2} \right] \tau^{-(2k+1)} \quad (\tau \geq 1) \quad (4.12)$$

Из полученного представления (4.11), (4.12) функции $H_0\tau$ во всем промежутке $(0, \infty)$ следует ее вещественность, а вместе с ней и вещественность функции $X(\tau)$ и следующее весьма важное свойство

$$H_0(\tau) = H_0(\tau^{-1}) \quad (0 \leq \tau \leq 1) \quad (4.13)$$

позволяющее существенно упростить вычисление интегралов (3.20).

Покажем это на примере интегралов $J^{(n)}(\xi)$, $n = 0, 1, 2, 3$. Для этого, приняв во внимание (4.10), разобьем промежуток интегрирования на два

$$J^{(n)}(\xi) = \left(\int_0^1 + \int_1^{\infty} \right) e^{-H_0(\tau)} \frac{\sqrt{\tau^2 + \sqrt{3}\tau + 1} \sqrt{\tau^2 + 1}}{\tau^6 + 1} \tau^{1+n} e^{-\tau\xi} d\tau$$

после чего, сделав во втором интеграле замену $\tau = s^{-1}$ и воспользовавшись (4.13), получим

$$J^{(n)}(\xi) = \int_0^1 F(s) \left[s^{1+n} e^{-s\xi} + \frac{s^{2-n}}{\sqrt{s}} e^{-\xi/s} \right] ds \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad (4.14)$$

где

$$F(s) = \sqrt{s^2 + \sqrt{3}s + 1} \sqrt{s^2 + 1} (s^6 + 1)^{-1} e^{-H_0(s)} \quad (4.15)$$

Остальные интегралы (3.20) таким же образом преобразуются к аналогичному виду. При этом в подынтегральных выражениях также будет фигурировать функция (4.15). В табл. 1 приведены ее значения, необходимые для вычисления интегралов по правилу Симпсона с различной точностью. Для вычисления функции $H_0(s)$ использовалось ее представление (4.11) с учетом того, что для фигурирующих там медленно сходящихся рядов удалось найти сумму

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \sin (2k+1)\pi/6 - (-1)^k}{2k+1} \tau^{2k+1} = \arctg \frac{\tau}{1-\tau^2} - \arctg \tau \quad (\tau \leq 1)$$

$$\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos (2k+1)\pi/6}{2k+1} \tau^{2k+1} = \frac{1}{12} \ln \frac{1 + \sqrt{3}\tau + \tau^2}{1 - \sqrt{3}\tau + \tau^2} \quad (\tau \leq 1)$$

При суммировании этих рядов было использовано разложение $\arctg \tau$ в ряд, а также два разложения, приведенных в справочнике ([12], стр. 54).

Все интегралы (3.20) проще всего вычислять по правилу Симпсона. Исключение составляет $J^{(2)}(0)$, к вычислению которого оно неприменимо в непосредственном виде. В этом случае оказалась полезной следующая достаточно точная аппроксимация (табл. 1) функции

$$F(s) = \begin{cases} 1 + 1.320s & (0 \leq s < 0.6) \\ -0.8000 + 7.600s - 5.500s^2 & (0.6 \leq s \leq 1) \end{cases} \quad (4.16)$$

При помощи полученных здесь формул вычислены значения M^* , Q^* , P^* для полубесконечной балки на упругой полуплоскости при действии на ее конец единичной силы (табл. 2), либо единичного момента (табл. 3). В указанных таблицах

Таблица 1

s	Значения F(s)		s	Значения F(s)	
	Точные	По (4.16)		Точные	По (4.16)
0	1.000	1.000	0.6	1.782	1.780
0.1	1.120	1.132	0.625	1.802	1.802
0.125	1.153	1.165	0.7	1.824	1.825
0.2	1.253	1.264	0.75	1.804	1.806
0.25	1.323	1.330	0.8	1.758	1.760
0.3	1.394	1.396	0.875	1.627	1.639
0.375	1.501	1.495	0.9	1.572	1.585
0.4	1.537	1.528	1	1.297	1.300
0.5	1.674	1.660			

Таблица 2

ξ	Точное решение			Решение согласно [4]		
	M*	Q*	P*	M*	Q*	P*
0.0	0	-1	∞	0	-1	—
0.2	-0.123	-0.558	1.298	-0.16	-0.61	1.60
0.4	-0.190	-0.246	0.754	-0.25	-0.34	1.16
0.6	-0.227	-0.124	0.452	-0.30	-0.16	0.73
0.8	-0.243	-0.041	0.339	-0.32	-0.05	0.48
1.0	-0.245	0.015	0.227	-0.32	—	0.31
1.2	-0.237	0.052	0.141	-0.31	0.08	0.21
1.4	-0.225	0.076	0.089	-0.29	0.11	0.11
1.6	-0.208	0.089	0.046	-0.26	0.13	0.05
1.8	-0.189	0.095	0.016	-0.34	0.13	0.01
2.0	-0.170	0.096	0.006	-0.21	0.13	-0.02
3.0	-0.086	0.067	-0.038	-0.10	0.09	-0.05
4.0	-0.037	0.033	-0.027	-0.04	0.04	-0.03

Таблица 3

ξ	Точное решение			Решение согласно [4]		
	M*	Q*	P*	M*	Q*	P*
0.0	1.00	0.00	-∞	1.00	0.00	—
0.2	0.94	-0.43	-0.75	0.97	-0.28	-1.02
0.4	0.84	-0.52	-0.20	0.90	-0.43	-0.51
0.6	0.74	-0.53	0.03	0.81	-0.49	-0.18
0.8	0.63	-0.51	0.15	0.70	-0.51	0.02
1.0	0.53	-0.48	0.21	0.60	-0.49	0.14
1.2	0.44	-0.43	0.25	0.51	-0.46	0.20
1.4	0.36	-0.38	0.25	0.42	-0.41	0.23
1.6	0.29	-0.33	0.24	0.35	-0.36	0.24
1.8	0.23	-0.28	0.23	0.28	-0.32	0.24
2.0	0.18	-0.24	0.21	0.22	-0.27	0.22
3.0	0.03	-0.08	0.11	0.04	-0.10	0.12
4.0	-0.01	-0.01	0.04	-0.01	-0.02	0.05

даются те же значения $M^*(\xi)$, $Q^*(\xi)$, $p^*(\xi)$, соответствующие приближенному решению М. И. Горбунова-Посадова [6] стр. 140).

Заметим, что в случае нагрузки, приложенной к концу балки, формулы (3.17) и (3.18) упрощаются, так как все члены, не содержащие B_0 и B_1 , следует считать в этом случае равными нулю; при этом для единичного момента формулы перехода (3.16) к истинным расчетным усилиям примут вид

$$M^*(\xi) = M(\xi/c), \quad Q^*(\xi) = \frac{1}{c} Q(\xi/c), \quad p^*(\xi) = \frac{1}{c^2} p(\xi/c)$$

Для единичной силы на конец балки в качестве свободных членов в системе (3.22) следует взять

$$f_1(\beta) = 0, \quad f_2(\beta) = 1$$

а в случае единичного момента

$$f_1(\beta) = -1, \quad f_2(\beta) = 0$$

Поступила 14 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Коренев Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. Госстройиздат, М., 1954.
2. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты на упругом полупространстве. Научн. докл. высш. школы. Стр-во. 1958, № 4.
3. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты на упругом комбинированном основании. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 3.
4. Серебрянный Р. В. Об изгибе тонкой полубесконечной плиты, опирающейся на упругий слой конечной толщины. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4.
5. Крейн М. Г. Интегральное уравнение на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. «Усп. матем. наук», 1958, т. 13, вып. 5.
6. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании. Госстройиздат, М., 1953.
7. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИИЛ, 1955.
8. Попов Г. Я. Вдавливание полубесконечного штампа в упругое полупространство. «Теор. и прикл. матем.», Львов, 1958, № 1.
9. Попов Г. Я. Об одном интегродифференциальном уравнении. Укр. матем. журнал, 1960, № 1.
10. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов. ИИЛ, 1948.
11. Уиттекер Е. Г., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа. ч. 11, Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1934.
12. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
13. Попов Г. Я. О расчете неограниченной шарнирно-разрезной балочной плиты, лежащей на упругом полупространстве. Изв. высш. учебн. заведений, Стр-во и архит-ра, 1959, № 3.
14. Альперин И. Г. Задача о бесконечно длинной балке на упругой полуплоскости. ПММ, 1939, т. II, вып. 3.