

О ВОЛОЧЕНИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

В. В. Соколовский

(Москва)

Настоящая работа посвящена задаче о волочении пластической полосы между жесткими стенками матрицы. Решение этой задачи проведено на основе условия пластичности специального вида [1] в простой замкнутой форме.

Плоское пластическое равновесие, как всегда, определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

и условием пластичности специального вида

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2 \sin^2 \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2k} + \frac{m}{k} \right) \quad (2)$$

при

$$\frac{\pi k}{2} \leq \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + m \leq \pi k$$

Эту систему уравнений удобно преобразовать путем перехода от компонент σ_x , σ_y и τ_{xy} к новым переменным ψ и φ по формулам

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = k(2\psi \pm \sin 2\psi \cos 2\varphi) - m, \quad \tau_{xy} = k \sin 2\psi \sin 2\varphi \quad (3)$$

Внося в дифференциальные уравнения (1) выражения (3), получим систему двух уравнений первого порядка для двух новых переменных ψ и φ . Она принадлежит к гиперболическому типу и после введения переменных

$$\xi = \psi + \varphi, \quad \eta = \psi - \varphi \quad \text{или} \quad 2\psi = \xi + \eta, \quad 2\varphi = \xi - \eta \quad (4)$$

может быть сведена к двум дифференциальным уравнениям такого вида:

$$\cos \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \sin \eta \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad \cos \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sin \xi \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

Уравнения характеристик

$$\begin{array}{l} x \sin \eta + y \cos \eta = \text{const}, \quad \eta = \text{const} \\ x \sin \xi - y \cos \xi = \text{const}, \quad \xi = \text{const} \end{array}$$

определяют на плоскости xy два семейства прямых. Эти прямые наклонены к оси x под углами $\varphi \mp \psi$ и пересекаются под переменными углами 2ψ . Основная система уравнений (5) имеет интегралы

$$x \sin \eta + y \cos \eta = f(\eta), \quad x \sin \xi - y \cos \xi = g(\xi) \quad (6)$$

содержащие произвольные функции $f(\eta)$ и $g(\xi)$.

Кроме того, существуют простые частные интегралы, соответствующие постоянным ξ и η .

Сначала обратим внимание на частные интегралы

$$\xi = \xi_0, \quad x \sin \eta + y \cos \eta = f(\eta) \quad (7)$$

которые имеют сетку характеристик, состоящую из непараллельных прямых $\eta = \text{const}$ и семейства параллельных прямых.

Далее укажем на частные интегралы

$$\eta = \eta_0, \quad x \sin \xi - y \cos \xi = g(\xi) \quad (8)$$

которые обладают сеткой характеристик, образованной семейством параллельных прямых и непараллельными прямыми $\xi = \text{const}$.

Наконец, отметим частные интегралы $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$, которые имеют сетку характеристик, состоящую из двух семейств параллельных прямых.

Нетрудно видеть, что вдоль характеристик $\eta = \text{const}$, наклоненных к оси x под углами $\varphi - \psi$, нормальная σ_n и касательная τ компоненты напряжения имеют вид

$$\sigma_n = k(2\psi - \sin 2\psi \cos 2\psi) - m, \quad \tau = k \sin^2 2\psi$$

Аналогичным образом легко показать, что вдоль характеристик $\xi = \text{const}$, образующих с осью x углы $\varphi + \psi$, нормальная σ_n и касательная τ компоненты напряжения будут

$$\sigma_n = k(2\psi - \sin 2\psi \cos 2\psi) - m, \quad \tau = -k \sin^2 2\psi$$

Исследуем распределение напряжений в пластической полосе при волочении ее между жесткими гладкими стенками матрицы [1, 2], образующими угол 2γ , считая, что силы натяжения и противонатяжения равны $2P_1$ и $2Q$. Вследствие симметрии относительно оси x можно изучать только верхнюю половину полосы, имея в виду, что вдоль указанной оси компонента $\tau_{xy} = 0$, а угол $\varphi = 0$.

Сначала рассмотрим поле напряжений в пластической полосе, состоящее из треугольных и четырехугольных областей, изображенных на фиг. 1, и будем считать, что вдоль всего контактного участка AB действует равномерно распределенное нормальное давление.

Координаты точки A условимся обозначать через x_1, y_1 , а координаты точки B — через x_2, y_2 .

Теперь нетрудно построить величины ξ и η в областях AEB, CAE, EBD и $CEDF$ при помощи частных интегралов (7) и (8). Эти величины ξ и η должны удовлетворять уравнениям (5) и быть непрерывными на прямых AED и BEC . Относительное уменьшение толщины полосы — обжатие полосы r — определяется следующим образом

$$r = 1 - \frac{y_1}{y_2} = 1 - \frac{\sin(\psi_* - \gamma)}{\sin(\psi_* + \gamma)}$$

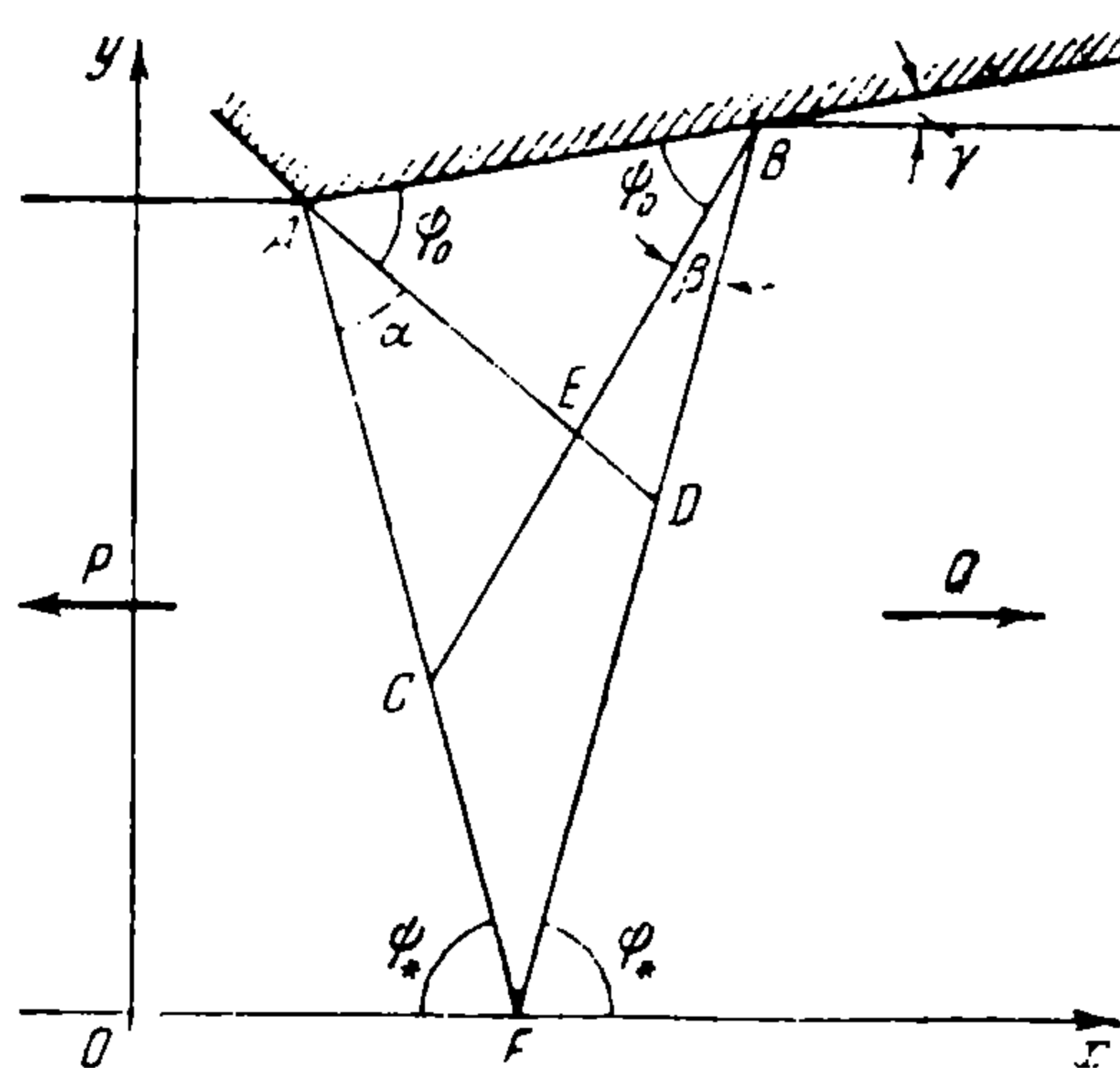
а углы α и β будут

$$\alpha = \psi_* - \psi_0 + \gamma, \quad \beta = \psi_* - \psi_0 - \gamma$$

В области AEB углы $\psi = \psi_0, \varphi = \gamma$, величины ξ и η постоянны

$$\xi = \psi_0 + \gamma, \quad \eta = \psi_0 - \gamma$$

а сетка характеристик образована двумя семействами параллельных прямых, наклоненных к оси x под углами $\psi_0 \mp \gamma$.



Фиг. 1

В области CAE величины ξ и η определены так:

$$\xi = \psi_0 + \gamma, \quad \operatorname{tg} \eta = -\frac{y - y_1}{x - x_1}$$

а сетка характеристик состоит из пучка прямых, проходящих через точку A , и прямых, параллельных BC .

В области EBD величины ξ и η выражены так:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{y - y_2}{x - x_2}, \quad \eta = \psi_0 - \gamma$$

а сетка характеристик состоит из пучка прямых, проходящих через точку B , и прямых, параллельных AD .

В области $CEDF$ величины ξ и η будут

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{y - y_2}{x - x_2}, \quad \operatorname{tg} \eta = -\frac{y - y_1}{x - x_1}$$

а сетка характеристик образована двумя пучками прямых, проходящих через точки A и B .

Горизонтальная компонента равнодействующей всех усилий, приложенных к разрезу ACF , должна быть равна силе натяжения P . Отсюда следует, что

$$P = \int_0^{y_1} [\sigma_n + \tau \operatorname{ctg} \psi_*] dy, \quad P = py_1$$

или

$$(p + m)y_1 = \int_0^{y_1} [(\sigma_n + m) + \tau \operatorname{ctg} \psi_*] dy$$

Очевидно, что вдоль всего отрезка AF величина $\eta = \psi_*$, а компоненты напряжения σ_n и τ выражаются так:

$$\sigma_n + m = k [(\xi + \psi_*) - \sin(\xi + \psi_*) \cos(\xi + \psi_*)], \quad \tau = k \sin^2(\xi + \psi_*)$$

Вместе с тем нетрудно показать, что на отрезке AC величина $\xi = \psi_0 + \gamma$, в точке F величина $\xi = \psi_*$, а вдоль CF имеет место соотношение

$$y - y_1 = -y_1 \sin 2\psi_* \frac{\sin(\xi - \gamma)}{\sin(\psi_* - \gamma) \sin(\xi + \psi_*)}$$

Вычисляя предыдущий интеграл, после некоторых преобразований получим

$$p + m = 2k \left\{ \psi_* + \frac{\cos \psi_*}{\sin(\psi_* - \gamma)} [\sin \psi_0 \sin(\psi_0 + \gamma) - (\psi_0 + \gamma - \psi_*) \sin \gamma] \right\} \quad (9)$$

а при $\psi_* = \pi/2$ будем иметь $p + m = \pi k$.

Горизонтальная компонента равнодействующей всех усилий, приложенных к разрезу BDF , должна быть равна силе противонапряжения Q . Отсюда вытекает, что

$$Q = \int_0^{y_2} [\sigma_n - \tau \operatorname{ctg} \psi_*] dy, \quad Q = qy_2$$

или

$$(q + m)y_2 = \int_0^{y_2} [(\sigma_n + m) - \tau \operatorname{ctg} \psi_*] dy$$

Ясно, что вдоль всего отрезка BF величина $\xi = \psi_*$, а компоненты напряжения σ_n и τ будут

$$\sigma_n + m = k [(\psi_* + \eta) - \sin(\psi_* + \eta) \cos(\psi_* + \eta)], \quad \tau = -k \sin^2(\psi_* + \eta)$$

Кроме того, легко показать, что на отрезке BD величина $\eta = \psi_0 - \gamma$, в точке F по-прежнему величина $\eta = \psi_*$, а вдоль DF имеет место соотношение

$$y - y_2 = -y_2 \sin 2\psi_* \frac{\sin(\gamma + \eta)}{\sin(\psi_* + \gamma) \sin(\psi_* + \eta)}$$

Вычисляя интеграл, аналогично предыдущему найдем

$$q + m = 2k \left\{ \psi_* + \frac{\cos \psi_*}{\sin(\psi_* + \gamma)} [\sin \psi_0 \sin(\psi_0 - \gamma) + (\psi_0 - \gamma - \psi_*) \sin \gamma] \right\}$$

а при $\psi_* = \pi/2$ будем иметь $q + m = \pi k$. (10)

Горизонтальная компонента равнодействующей давлений вдоль контактного участка AB должна уравниваться разностью $P - Q$. Отсюда следует равенство

$$Q - P = \sigma_n (y_2 - y_1)$$

или

$$(q + m) y_2 - (p + m) y_1 = (\sigma_n + m) (y_2 - y_1)$$

Очевидно, что вдоль участка AB приложена нормальная компонента $[\sigma_n + m = k(2\psi_0 - \sin 2\psi_0)]$

Поэтому после простых преобразований получим

$$(q - p) \operatorname{tg} \psi_* + (p + q + 2m) \operatorname{tg} \gamma = 2k(2\psi_0 - \sin 2\psi_0) \operatorname{tg} \gamma$$

Легко видеть, что это равенство является следствием уже выведенных ранее равенств (9) и (10).

Заметим, что построенное решение справедливо, пока углы

$$\beta \geq 0, \quad \psi_0 \geq \frac{1}{4} \pi, \quad \psi_* \geq \frac{1}{4} \pi$$

а вместе с тем, пока выполнено условие :

$$\psi_* - \psi_0 \geq \gamma$$

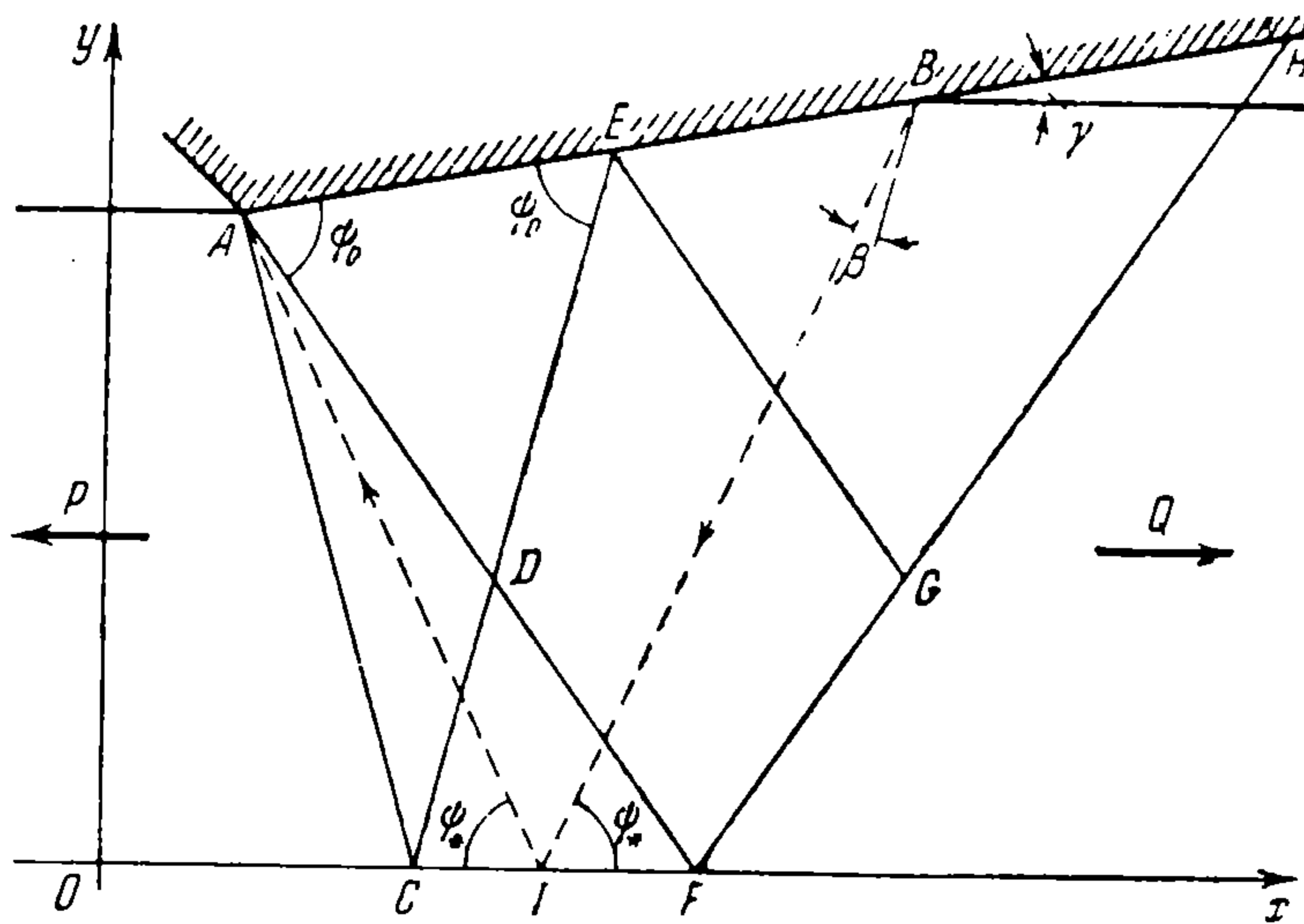
Частный случай, когда сторона BEC совпадает со стороной BDF , а область $CEDF$ вырождается в отрезок DF , соответствует

$$\beta = 0, \quad \psi_* - \psi_0 = \gamma, \quad p + m = k(2\psi_* + \sin 2\psi_*)$$

Далее рассмотрим другое поле напряжений в пластической полосе, состоящее из треугольных и четырехугольных областей, нанесенных на фиг. 2, и будем считать, что вдоль контактного участка AE действует равномерно распределенное нормальное давление.

Теперь легко найти величины ξ и η в областях ADE , CAD , CDF , $DEGF$ и EGH при помощи общих интегралов (6) и частных интегралов (7) и (8). Эти величины ξ и η должны удовлетворять уравнениям (5) и быть непрерывными на прямых ADF , CDE и EG .

Относительное уменьшение толщины — обжатие полосы r по-прежнему



Фиг. 2

выражается так

$$r = 1 - \frac{y_1}{y_2} = 1 - \frac{\sin(\psi_* - \gamma)}{\sin(\psi_* + \gamma)}$$

а угол

$$\beta = \psi_0 - \psi_* + \gamma$$

В области ADE углы $\psi = \psi_0$, $\varphi = \gamma$, величины ξ и η постоянны

$$\xi = \psi_0 + \gamma, \quad \eta = \psi_0 - \gamma$$

а сетка характеристик образована двумя семействами параллельных прямых, наклоненных к оси x под углами $\psi_0 \mp \gamma$.

В области CAD величины ξ и η определены следующим образом

$$\xi = \psi_0 + \gamma, \quad \operatorname{tg} \eta = -\frac{y - y_1}{x - x_1}$$

а сетка характеристик состоит из пучка прямых, проходящих через точку A , и прямых, параллельных CD .

В области CDF величины ξ и η выражены так

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{y + y_1}{x - x_1}, \quad \operatorname{tg} \eta = -\frac{y - y_1}{x - x_1}$$

а сетка характеристик образована двумя пучками прямых, проходящих через точку A и через точку, симметричную A .

Горизонтальная компонента равнодействующей всех усилий, приложенных к разрезу AC , должна быть равна силе натяжения P . Отсюда следует, что

$$p + m = k[2(\psi_0 + \gamma) + \sin 2(\psi_0 + \gamma)] \quad (11)$$

В области $DEGF$ величины ξ и η даны так

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{y + y_1}{x - x_1}, \quad \eta = \psi_0 - \gamma$$

а сетка характеристик образована пучком прямых, проходящих через точку, симметричную A , и прямыми, параллельными DF .

В области EGH величины ξ и η будут

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{y + y_1}{x - x_1}, \quad \operatorname{tg} \eta = -\frac{y - y_1 - 2y_1 \cos 2\gamma}{x - x_1 + 2y_1 \sin 2\gamma}$$

а сетка характеристик состоит из двух семейств непараллельных прямых.

Следует отметить, что построенные решения имеют механический смысл только в тех частях областей CDF , $DEGF$ и EGH , которые расположены слева от прямой IB .

Горизонтальная компонента равнодействующей давлений вдоль контактного участка AB должна уравниваться разностью $P - Q$. Отсюда следует равенство

$$Q - P = \int_{y_1}^{y_2} \sigma_n dy$$

или

$$(q + m)y_2 - (p + m)y_1 = \int_{y_1}^{y_2} (\sigma_n + m) dy$$

Очевидно, что вдоль участка AE приложена нормальная компонента

$$\sigma_n + m = k(2\psi_0 - \sin 2\psi_0)$$

а вдоль участка EB — нормальная компонента

$$\sigma_n + m = k(2\psi - \sin 2\psi)$$

причем угол ψ связан с y так

$$y - y_1 = 2y_1 \frac{\sin \gamma \cos(\psi + \gamma)}{\sin \psi}$$

Вычисляя предыдущий интеграл, после простых преобразований, будем иметь

$$\begin{aligned} & (q + m) \sin(\psi_* + \gamma) - (p + m) \sin(\psi_* - \gamma) = \quad (12) \\ & = 4k \sin \gamma \{ (\psi_* - \gamma) \cos(\psi_* - \gamma) \cos \gamma - \sin(\psi_* - \gamma) [\psi_0 \sin \gamma + \cos \psi_0 \cos(\psi_0 + \gamma)] \} \end{aligned}$$

Заметим, что построенное решение справедливо, пока углы

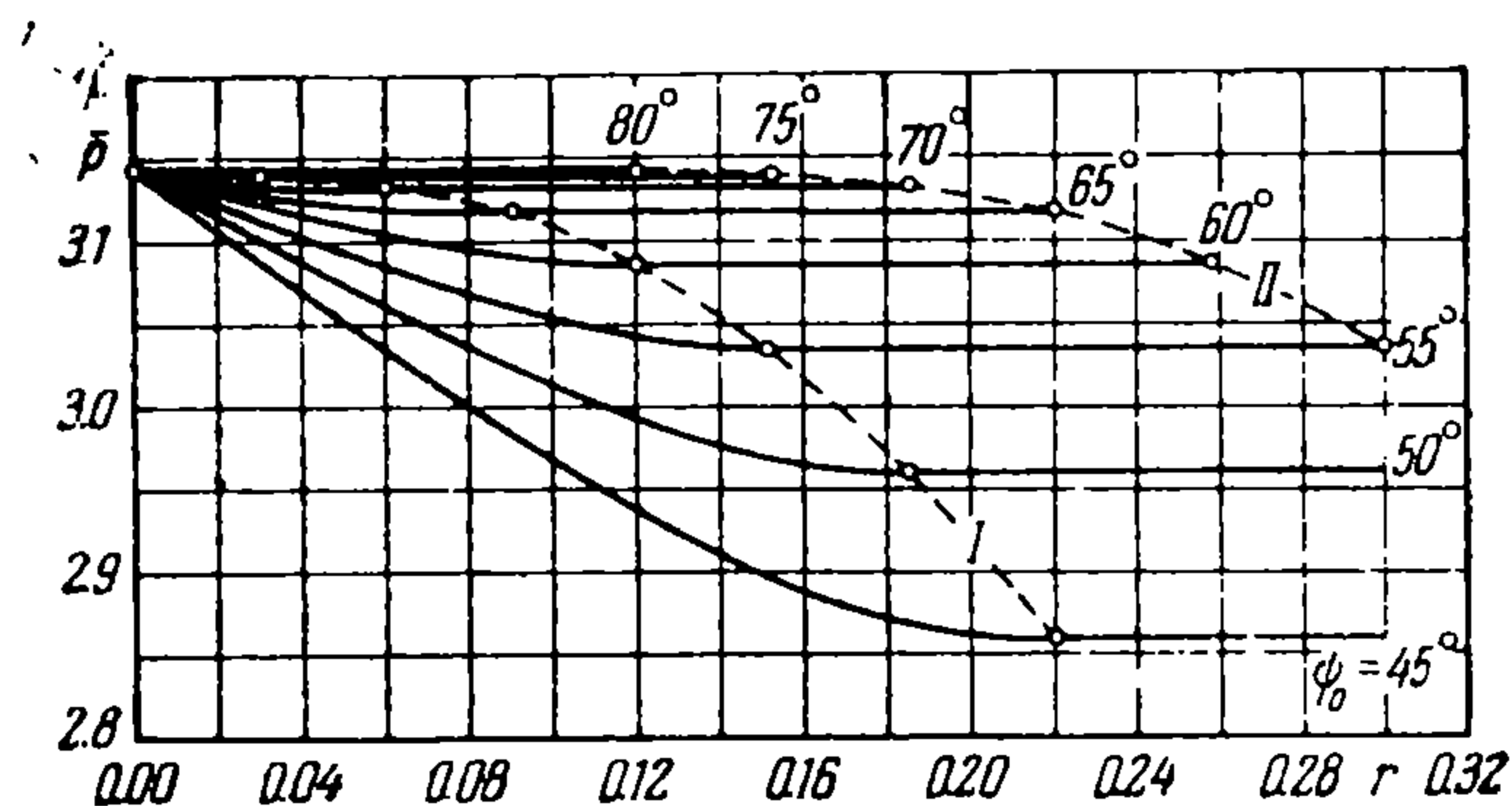
$$0 \leq \beta \leq 2\gamma, \quad \psi_0 \geq \frac{1}{4}\pi, \quad \psi_* \geq \frac{1}{4}\pi$$

а вместе с тем, пока справедливо условие

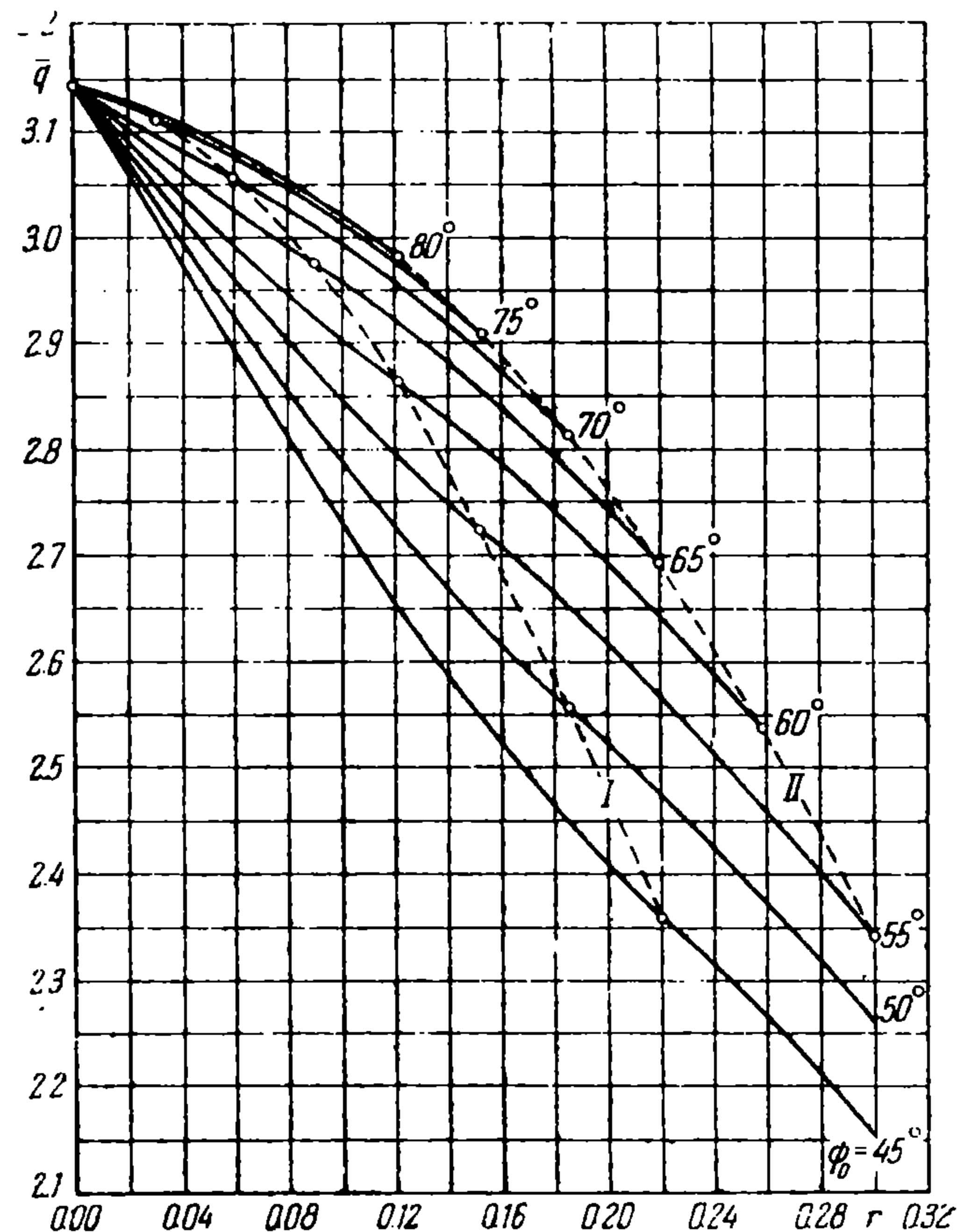
$$-\gamma \leq \psi_* - \psi_0 \leq \gamma$$

Частный случай, когда сторона IB совпадает со стороной CE , соответствует

$$\begin{aligned} \beta &= 0, \quad \psi_* - \psi_0 = \gamma, \\ p + m &= k(2\psi_* + \sin 2\psi_*) \end{aligned}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Ниже приведены результаты вычислений для угла $\gamma = 10^\circ$ и для различных значений угла ψ_0 от 45° до 80° через 5° .

Значения $\bar{p} = (p + m)/k$ и $\bar{q} = (q + m)/k$ в зависимости от r , определенные по формулам (9) и (10) или по формулам (11) и (12), изображены на фиг. 3 и 4 сплошными кривыми. Значения p и q , соответствующие $\psi_* - \psi_0 = \gamma$ и $\psi_0 - \psi_* = \gamma$, соединены пунктирными кривыми I и II.

В заключение отметим, что наряду с полями напряжений в пластической полосе нетрудно построить и поля скоростей. Вместе с тем можно показать, что между этими полями нет никаких противоречий и что они полностью согласуются между собой.

Поступила 15 XII 1960

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В., Теория пластичности, Гостехиздат, 1950.
2. Хилл Р., Математическая теория пластичности, Гостехиздат, 1956.