Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ВЫПУЧИВШЕГОСЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ВДАВЛИВАНИИ ТОНКОГО ЛЕЗВИЯ В ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Д. Д. Ивлев
(Воронеж)

Плоская и осесимметричная линеаризированные задачи о вдавливании тонких тел в пластическое полупространство рассматривались в работах [1,2].

В работе [3] рассматривались линеаризированные уравнения некоторых пространственных задач теории идеальной пластичности.

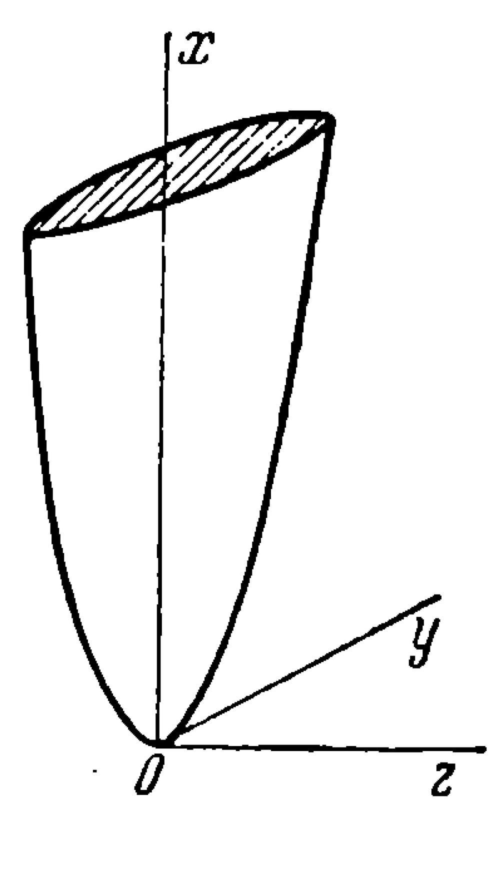
В настоящей работе исследуется задача о вдавливании тонкого лезвия в пластическое полупространство. Устанавливается аналогия между линеаризированными задачами теории идеальной пластичности и газовой динамики. Указанное обстоятельство позволяет использовать результаты, полученные в теории крыла конечного размаха [4,5], для определения поля скоростей перемещений при вдавливании тонкого лезвия в пластическое полупространство.

1. Представим, что в полупространство из идеального жесткопластического материала вдавливается некоторое тонкое симметричное лезвие (фиг. 1). Уравнение поверхности лезвия зададим в виде

$$z = \delta F(x,\ y) \tag{1.1}$$

где δ — малый безразмерный параметр.

Полупространство материала в начальный момент занимает положение $x \leqslant 0$. Обращая движение, будем предполагать, что лезвие неподвижно, а полупространство поступательно смещается вверх по оси x с некоторой постоянной скоростью. Процесс движения будем предполагать настолько медленным, чтобы можно было пренебречь силами инерции.



Фиг. 1

Обозначим через σ_{ij} — компоненты напряжения, ε_{ij} — компоненты скорости деформации, а через u, v, w — компоненты скорости перемещения вдоль осей x, y, z.

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} + \delta\sigma_{ij}', \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\circ} + \delta\varepsilon_{ij}', \qquad u = u^{\circ} + \delta u', \ldots \tag{1.2}$$

Компоненты с индексом нулик наверху соответствуют состоянию $\delta = 0$, т. е. вдавливанию лезвия нулевой толщины.

Положим

$$\sigma_y^{\circ} = \sigma_z^{\circ} = -2k, \qquad \sigma_x^{\circ} = \tau_{xy}^{\circ} = \tau_{yz}^{\circ} = \tau_{zx}^{\circ} = 0 \qquad u^{\circ} = \mathrm{const}, \qquad v^{\circ} = w^{\circ} = 0 \tag{1.3}$$

где k — предел текучести материала.

Задача сводится к определению компонент возмущения, им приписан всюду индекс штрих наверху.

Предположим, что имеет место условие полной пластичности. Будем иметь [6]

$$
\begin{aligned}
\tau_{xy}^2 &= \left(\sigma_x - \sigma + \tfrac{2}{3}k\right)\left(\sigma_y - \sigma + \tfrac{2}{3}k\right)\\
\tau_{yz}^2 &= \left(\sigma_y - \sigma + \tfrac{2}{3}k\right)\left(\sigma_z - \sigma + \tfrac{2}{3}k\right)\\
\tau_{zx}^2 &= \left(\sigma_z - \sigma + \tfrac{2}{3}k\right)\left(\sigma_x - \sigma + \tfrac{2}{3}k\right)
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

или

$$
\begin{aligned}
\tau_{xy}\tau_{yz} &= \tau_{zx}\left(\sigma_y - \sigma + \tfrac{2}{3}k\right)\\
\tau_{zx}\tau_{xy} &= \tau_{yz}\left(\sigma_x - \sigma + \tfrac{2}{3}k\right)\\
\tau_{yz}\tau_{zx} &= \tau_{xy}\left(\sigma_z - \sigma + \tfrac{2}{3}k\right)
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Соотношения (1.4) и (1.5) получаются путем исключения направляющих углов при использовании соотношений, обобщающих известные соотношения М. Леви для случая плоского деформированного состояния.

Отметим, что соотношения (1.4) и (1.5) эквивалентны, однако при линеаризации необходимо их совместное использование, так как при их выводе исходные соотношения возводятся в квадрат.

Подставляя выражения (1.2) в соотношения (1.4) и (1.5), учитывая (1.3), получим

$$\sigma_x' = \sigma_y' = \sigma_z' = \sigma', \qquad \tau_{yz}' = 0 \tag{1.6}$$

Полагая

$$\sigma' = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \tau_{xy}' = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \tau_{xz}' = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{1.7}$$

из уравнений равновесия, получим

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{1.8}$$

Рассмотрим соотношения для скоростей перемещений. Исходные соотношения запишем в виде [7]

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \tag{1.9}$$

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_x + \varepsilon_{xy}\frac{\sigma_y - \sigma + {}^2/_3 k}{\tau_{xy}} + \varepsilon_{xz}\frac{\sigma_z - \sigma + {}^2/_3 k}{\tau_{xz}} = \varepsilon_{xy}\frac{\sigma_x - \sigma + {}^2/_3 k}{\tau_{xy}} + \varepsilon_y + \\
+ \varepsilon_{yz}\frac{\sigma_z - \sigma + {}^2/_3 k}{\tau_{yz}} = \varepsilon_{xz}\frac{\sigma_x - \sigma + {}^2/_3 k}{\tau_{xz}} + \varepsilon_{yz}\frac{\sigma_y - \sigma + {}^2/_3 k}{\tau_{yz}} + \varepsilon_z
\end{gathered}
$$

Линеаризируя соотношения (1.9), получим

$$\varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z' = 0, \qquad \varepsilon_{xy}' = \varepsilon_{xz}' = 0 \tag{1.10}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} = 0 \tag{1.11}$$

Полагая

$$u' = -\frac{\partial W}{\partial x}, \qquad v' = \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad w' = \frac{\partial W}{\partial z}$$

получим

$$-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0 \tag{1.12}$$

Ниже ограничимся рассмотрением кинематической стороны явления, сопровождающего вдавливание лезвия. Нормаль к поверхности лезвия запишется в виде

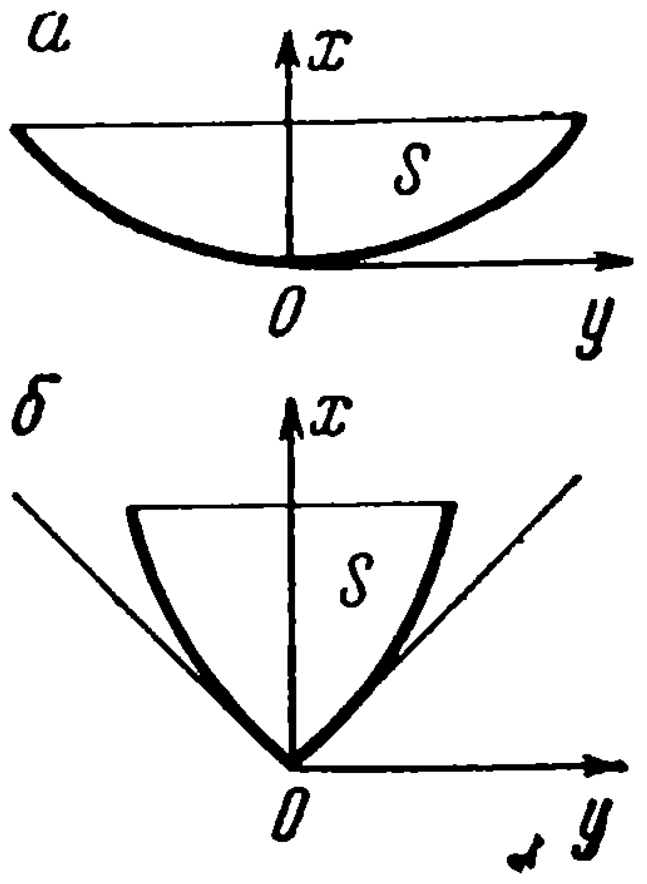
$$\mathbf{n} = \delta\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \delta\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k} \tag{1.13}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные орты координатных осей. Вектор скорости

$$\mathbf{v} = (u_0 + \delta u')\,\mathbf{i} + \delta v'\mathbf{j} + \delta w'\mathbf{k} \tag{1.14}$$

На поверхности лезвия скорости направлены по касательной к лезвию, поэтому

$$(\mathbf{vn}) = \delta (u_0 + \delta u')\frac{\partial F}{\partial x} + \delta^2 v' \frac{\partial F}{\partial y} - \delta w' = 0 \tag{1.15}$$



Фиг. 2

Линеаризируя соотношение (1.15), получим

$$w' = u_0 \frac{\partial F}{\partial x} \qquad \text{при } z = 0, \text{ на } S$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial z} = u_0 \frac{\partial F}{\partial x} \qquad \text{при } z = 0, \text{ на } S \tag{1.16}$$

где S — проекция лезвия на плоскость xy.

На фиг. 2 изображено вдавливаемое лезвие в плане ($z = 0$). Могут представиться два случая: а) когда возмущения в плоскости xy не выходят за область S, б) когда возмущения выходят за область S.

Первый случай реализуется при

$$-F_y / F_x \leqslant 1 \tag{1.17}$$

Второй случай реализуется при

$$-F_y / F_x > 1 \tag{1.18}$$

Во втором случае следует рассмотреть условия в возмущенной зоне в плоскости xy вне S. Из условия симметрии в ней вытекает, что

$$W(x,\ y,\ -z) = -W(x,\ y,\ z)$$

поэтому в возмущенной зоне в плоскости xy будем иметь

$$W = 0 \qquad \text{при } z = 0, \text{ вне } S \tag{1.19}$$

Для определения поверхности выпучившегося материала достаточно знать профиль скоростей u'. В самом деле, предположим, что глубина вдавливания равна величине h. Уравнение поверхности выпучившегося материала запишем в виде

$$x - h = \delta\Phi(y,\ z) \tag{1.20}$$

Точки на поверхности полупространства получат смещения $\delta s_x'$, $\delta s_y'$, $\delta s_z'$, поэтому точка с координатами $h + \delta s_x'$, $\delta s_y'$, $\delta s_z'$ должна лежать на поверхности выпучившегося материала. Будем иметь

$$s_x' = \Phi(y + \delta s_y',\ z + \delta s_z') \tag{1.21}$$

Линеаризируя соотношения (1.21), получим

$$s_x' = \Phi(y,\ z) \tag{1.22}$$

Величина $\delta s_x'$ — смещение точек поверхности по оси x. В теории идеальной пластичности из исходных соотношений скорости определяются с точностью до некоторого множителя, поэтому истинное значение скорости возмущения по оси x равно $\delta\lambda u'$. Следовательно,

$$s_x' = \lambda \int_0^h u' dx \tag{1.23}$$

Величину λ найдем из условия равенства объемов выпучившейся части материала и внедренной части лезвия

$$\lambda \int_0^h \iint_\Sigma u'\, dx\, dy\, dz = \int_S F(x, y)\, dx\, dy \tag{1.24}$$

где Σ — область определения u' при $x = h$.

Из (1.22) и (1.24) получим

$$\Phi(y, z) = \left(\int_0^h u' dx\right) \int_S F(x, y)\, dx\, dy \Big/ \left(\int_0^h \iint_\Sigma u' dx\, dy\, dz\right) \tag{1.25}$$

2. Рассмотрим вначале первый случай (фиг. 2, a). Искомое решение запишем в виде потенциала

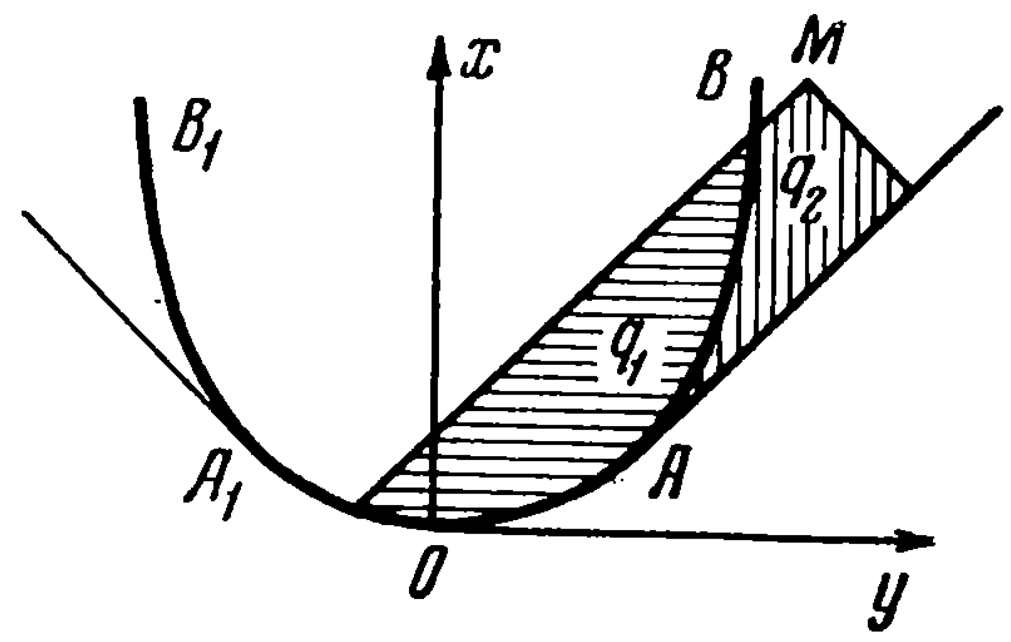
$$W(x, y, z) = -\frac{u_0}{\pi} \int_q \frac{\partial F}{\partial x} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}} \tag{2.1}$$

где q — часть плоскости xy, лежащая в пересечении с характеристическим конусом с вершиной в точке x, y, z.

Отметим, что потенциал скоростей полностью определяется граничными условиями, не зависящими от времени, поэтому поле скоростей перемещений является установившимся. Очевидно также, что на границе жесткой и пластической областей имеет место $u' = v' = w' = 0$. Выражение u' определим из (2.1) по формуле

$$u' = \frac{u_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_q \frac{\partial F}{\partial x} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}} \tag{2.2}$$

Рассмотрим второй случай (фиг. 2,$б$). В этом случае также следует использовать формулу (2.1), причем вне лезвия в области q_2 (фиг. 3) следует положить функцию $\partial F / dx$, равную нулю.



Фиг. 3

Следует подчеркнуть одно обстоятельство: аналогия между линеаризированными соотношениями газовой динамики и теории идеальной пластичности оказалась по существу полной, хотя исходные предпосылки в обоих случаях совершенно различны: в первом случае рассматривается безвихревое течение идеального сжимаемого газа, во втором случае имеет место течение (без сдвига по двум компонентам) несжимаемого идеально пластического материала.

Воронежский
государственный университет

Поступила 2 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. О вдавливании тонкого лезвия в пластическую среду. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 10.
2. Ивлев Д. Д. О вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство, ПМТФ, 1960, № 4.
3. Ивлев Д. Д. Об уравнениях линеаризированных пространственных задач теории идеальной пластичности, Докл. АН СССР, т. 130, № 6, 1960.
4. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. Гостехтеоретиздат, М., 1952.
5. Puckett, Supersonic wave drag of thin aerofoils. Journal of the Aeronautical Sciences, 1946, v. 13, № 9.
6. Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды, ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
7. Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 3.